

## 相互評価の下での不可能性定理

安藤 和敏\*  
静岡大学

小原 朱理†

山本 芳嗣‡  
筑波大学

(Received 2002 年 3 月 13 日; 再受理 2003 年 1 月 30 日)

*Abstract* 民主的な社会的決定方法が存在しないことを示唆する Arrow の不可能性定理は, 社会的選択理論における古典的結果である. Arrow の設定では, 社会の各構成員は全ての選択肢に対する選好順序を表明するが, 本論文では社会の構成員が相互に評価しあう状況, すなわち, 社会の各構成員が自分自身を除いた他の全ての構成員に対して選好順序を表明する状況を対象とする. このような相互評価の状況の下での Arrow 及び Hansson の公理系を再定義し, いくつかの公理の組合せでは社会的厚生関数の存在に関して肯定的な結果を導くことができないことを示す.

**キーワード:** 意思決定, 相互評価, Arrow の定理, 社会的厚生関数

### 1. はじめに

本論文では, 社会の構成員が自分自身を除いた他の全ての構成員に対して選好順序を表明するという形の相互評価の場면을想定して, それら全ての選好順序を集計する社会的厚生関数の存在とその性質について, 社会的選択理論の古典的文脈の中で議論する. 相互評価の場面というのは例えば, 大学の演習等で発表者が相互に評価し合った結果を基に発表の優劣を付けるといった状況である.

Arrow [1] の一般不可能性定理では, 社会の各構成員が全ての選択肢についての選好を表明する設定となっている. 表明された構成員の選好順序を, 何らかの意味で民主的に集計し社会的選好順序を決定する関数が存在するかどうか Arrow の論点である. Arrow は, 定義域の非限定性, 無関係対象からの独立性, Pareto 原理の公理の下では独裁者の存在が導かれることを示し, その意味で民主的な決定の不可能性を示した. その後, Hansson [2] は, Arrow の公理系において Pareto 原理を非定値性と非抑圧性で置き換えた, より弱い公理系からも独裁者の存在が導かれることを示している.

本論文ではまず, 上記の Arrow の公理系に即して定義域の非限定性, 無関係対象からの独立性, Pareto 原理の公理を相互評価の設定の下で定義し直し, 定義域の非限定性と Pareto 原理を満たす社会的厚生関数が存在しないことを示す. さらに, 定義域の非限定性と無関係対象からの独立性に加え, Pareto 原理を弱めた弱 Pareto 原理からなる公理系の下では, 社会的厚生関数として許されるものは, すべての選択肢を無差別とするものしかないことを示す. 最後に, 定義域の非限定性, 無関係対象からの独立性, 非定値性を満足する社会的厚生関数が存在しないことを示す. なお, 表記法は Sen [3] にならった.

\*日本学術振興会科学研究費補助金若手研究 (B) (課題番号: 13780353) の補助を受けている.

†現在は日本アイ・ビー・エム (株) に勤務.

‡日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (C)(2) (課題番号: 13650061) と (B)(2) (課題番号: 14380188) の補助を受けている.

## 2. 相互評価のルールと記号

集合  $X$  上の二項関係とは  $X \times X$  の部分集合のことを指す.  $X$  上の二項関係  $R$  に対して,  $(x, y) \in R$  であることを  $xRy$  と書く.

集合  $X$  上の二項関係  $\preceq$  は, 以下の2つの条件を満足するときに**弱順序**と呼ばれる.

(i)  $\forall x, y \in X: x \preceq y$  or  $y \preceq x$ . (完備性)

(ii)  $\forall x, y, z \in X: x \preceq y \preceq z \implies x \preceq z$ . (推移性)

$x, y \in X$  に対して  $x \preceq y$  かつ  $y \preceq x$  であるときに  $x \simeq y$  と定義し,  $x \preceq y$  かつ  $y \not\preceq x$  のときに  $x \prec y$  と定義する.

本論文における**選好順序**とは弱順序のことである.  $x \preceq y$  のとき  $y$  は  $x$  よりも**選好される** といい,  $x \prec y$  のとき  $y$  は  $x$  よりも**狭義に選好される** という. さらに,  $x \simeq y$  のとき  $x$  と  $y$  は**無差別である** という.

$n$  人からなる社会  $N$  を考える.  $N$  は  $|N| \geq 3$  なる有限集合であること, 及び,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  を仮定する. 相互評価という設定の下では, 各個人  $i = 1, \dots, n$  が, 自分自身を除く他の全ての個人  $N \setminus \{i\}$  上の選好順序  $\preceq_i$  を表明する. このような状況の下で, 社会全体としての  $N$  上の選好順序を一意的に決定する民主的で合理的なルールの存在を議論するのが本論文の目的である. この「ルール」は社会的厚生関数と呼ばれるもので, 以下のよう形式的に定義される.

各  $i = 1, \dots, n$  に対して,  $\mathcal{W}_i$  は  $N \setminus \{i\}$  上の選好順序全体を表すものとし,  $\mathcal{W}$  は  $N$  上の選好順序全体を表すものとする.  $\mathcal{W}_1 \times \dots \times \mathcal{W}_n$  の部分集合  $\mathcal{P}$  上で定義され,  $\mathcal{W}$  に値をとる関数  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{W}$  のことを**社会的厚生関数**と呼ぶ. 社会的厚生関数  $f$  は,  $N \setminus \{1\}$  上の選好順序  $\preceq_1, N \setminus \{2\}$  上の選好順序  $\preceq_2, \dots, N \setminus \{n\}$  上の選好順序  $\preceq_n$  の組  $(\preceq_1, \dots, \preceq_n)$  が与えられたときに,  $N$  上の選好順序  $f(\preceq_1, \dots, \preceq_n)$  を返す関数である.

$\mathcal{W}_1 \times \dots \times \mathcal{W}_n$  の元のことを**選好プロファイル**と呼び,  $P, Q, C, S, T$  の記号を用いて表す. 選好プロファイル  $P$  に対して, 特にことわらない限り,  $P$  の第  $i$  成分は  $\preceq_i^P$  であると約束する. さらに, この選好プロファイル  $P$  の下での社会的選好  $f(P)$  を  $\preceq^P$  と表す.

## 3. Pareto 原理と弱 Pareto 原理

Arrow の設定した公理に基づいて, 相互評価の場合にも次に述べる公理を設定する. いずれも Arrow の公理との関連から容易にその意味合いを知ることができるので, 個々の意味については手短かに述べるに止める.

最初に述べる公理は, どのような選好プロファイルに対しても社会的厚生関数が定義されていることを要請するものである.

**公理 3.1 (定義域の非限定性)** 社会的厚生関数  $f$  は, すべての選好プロファイルに対して定義されている. 即ち,  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{W}$  の定義域  $\mathcal{P}$  は,

$$\mathcal{P} = \mathcal{W}_1 \times \dots \times \mathcal{W}_n$$

で与えられる.

$X$  上の二項関係  $R$  と  $X$  の部分集合  $Y$  に対して,  $Y$  上の二項関係  $R \cap (Y \times Y)$  を,  $R$  の  $Y$  への**制限**と呼び,  $R|_Y$  と表す. 対  $\{i, j\} \subseteq N$  に関しての社会選好順序は, 各個人の  $\{i, j\}$  に対する選好だけに依存して決定されるという無関係対象からの独立性の公理は以下のように表現できる.

**公理 3.2 (無関係対象からの独立性)**

$$\forall i, j \in N, \forall P = (\preceq_i^P), Q = (\preceq_i^Q) \in \mathcal{P}: \\ (\forall k \in N \setminus \{i, j\}: \preceq_k^P|_{\{i, j\}} = \preceq_k^Q|_{\{i, j\}}) \implies f(P)|_{\{i, j\}} = f(Q)|_{\{i, j\}}.$$

また, 対  $\{i, j\}$  について,  $i$  と  $j$  以外のすべての個人が  $i$  よりも  $j$  を狭義に選好しているプロファイルでは社会選好順序も同様の選好を示すことを要請する Pareto 原理は以下のように述べることができる.

**公理 3.3 (Pareto 原理)**

$$\forall P = (\preceq_i^P) \in \mathcal{P}, \forall i, j \in N: (\forall k \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_k^P j) \implies i \prec^P j.$$

Arrow の設定では, 定義域の非限定性, 無関係対象からの独立性, Pareto 原理は独裁者の存在を導くが, 本論文の相互評価の設定では, この3公理の内の定義域の非限定性 (公理 3.1) と Pareto 原理 (公理 3.3) の2公理を満たす社会的厚生関数は存在しないという次の強い結果が導かれる. この結果は各個人  $i$  の選好順序が  $N \setminus \{i\}$  上に限定されているため, 証明中で用いることになる循環プロファイルが許されることに起因する.

**定理 3.4** 定義域の非限定性 (公理 3.1), Pareto 原理 (公理 3.3) を満足する社会的厚生関数は存在しない.

(証明) 各  $i = 2, \dots, n-1$  に対して,  $\preceq_i^C$  を

$$i+1 \prec_i^C i+2 \prec_i^C \dots \prec_i^C n-1 \prec_i^C n \prec_i^C 1 \prec_i^C \dots \prec_i^C i-1 \quad (3.1)$$

を満たす  $N \setminus \{i\}$  上の弱順序とし,  $\preceq_1^C$  と  $\preceq_n^C$  を

$$2 \prec_1^C 3 \prec_1^C \dots \prec_1^C n, \quad (3.2)$$

$$1 \prec_n^C 2 \prec_n^C \dots \prec_n^C n-1 \quad (3.3)$$

を満たす, それぞれ  $N \setminus \{1\}$  と  $N \setminus \{n\}$  上の弱順序とする. そのような弱順序  $\preceq_i^C$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は一意に定まる. これらの選好順序からなる選好プロファイル  $C = (\preceq_i^C)_{i=1, \dots, n}$  を**循環プロファイル**と呼ぶことにする. 社会的厚生関数  $f$  が Pareto 原理を満足していると仮定しよう.  $C$  では, 各個人が循環順序の一部になっているので,  $\preceq^C = f(C)$  は, Pareto 原理より

$$1 \prec^C 2 \prec^C \dots \prec^C n-1 \prec^C n \prec^C 1$$

という選好順序となる. 明らかにこれは, 社会的選好の弱順序性に反する.  $\square$

議論の多い無関係対象からの独立性 (公理 3.2) を仮定することなく, 社会的厚生関数の非存在を導くことができることから, 本論文の相互評価の設定では Pareto 原理 (公理 3.3) が社会的厚生関数の非存在に大きな役割を担っていることが理解できる.

Pareto 原理はいささか強い仮定に過ぎるので, それを以下の公理

**公理 3.5 (弱 Pareto 原理)**

$$\forall P = (\preceq_1^P, \dots, \preceq_n^P) \in \mathcal{P}, \forall i, j \in N: (\forall k \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_k^P j) \implies i \preceq^P j.$$

で緩め、無関係対象からの独立性 (公理 3.1) を付け加えた公理系を考える。

この公理系の下では、社会的厚生関数は存在するが、いかなる選好プロファイルの下でもすべての選択肢を無差別にするようなものに限られる。

これを示すためにまず次の補題を示す。

**補題 3.6** 社会的厚生関数  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{W}$  が、定義域の非限定性 (公理 3.1)、無関係対象からの独立性 (公理 3.2)、弱 Pareto 原理 (公理 3.5) を満足するならば、

$$\forall P = (\preceq_1^P, \dots, \preceq_n^P) \in \mathcal{P}, \forall i, j \in N: (\forall k \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_k^P j) \implies i \simeq^P j.$$

(証明) 選好プロファイル  $P = (\preceq_i^P)$  と  $i, j \in N$  に対して、

$$\forall k \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_k^P j$$

が成り立っていると仮定しよう。ここで一般性を失うことなく  $i = 1, j = 2$  と仮定してよい。定理 3.4 の証明中で導入した循環プロファイル  $C = (\preceq_1^C, \dots, \preceq_n^C)$  (条件 (3.1)~条件 (3.3) を見よ) を考えると弱 Pareto 原理から、

$$1 \preceq^C 2 \preceq^C \dots \preceq^C n-1 \preceq^C n \preceq^C 1$$

が得られる。社会的選好の弱順序性によって、社会的選好  $\preceq^C$  においては任意の  $i, j \in N$  に対して、 $i \simeq^C j$  である。

すると、 $i \simeq^C j$ 、及び、無関係対象からの独立性によって  $i \simeq^P j$  が成り立つ。  $\square$

**定理 3.7** 社会的厚生関数  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{W}$  が、定義域の非限定性 (公理 3.1)、無関係対象からの独立性 (公理 3.2)、弱 Pareto 原理 (公理 3.5) を満足するならば、

$$\forall P \in \mathcal{P}, \forall i, j \in N: i \simeq^P j$$

が成り立つ。

(証明)  $P = (\preceq_1^P, \dots, \preceq_n^P)$  を任意の選好プロファイルとして、相異なる  $i, j \in N$  を任意に選ぶ。さらに、 $k \in N \setminus \{i, j\}$  も任意に選ぶと、以下のような条件を満足する選好プロファイル  $Q$  が存在する。

$$(i) \forall l \in N \setminus \{i, k\}: k \prec_l^Q i,$$

$$(ii) \forall l \in N \setminus \{j, k\}: k \prec_l^Q j,$$

$$(iii) \forall l \in N \setminus \{i, j\}: \preceq_l^Q |_{\{i, j\}} = \preceq_l^P |_{\{i, j\}}.$$

補題 3.6 によって、 $k \simeq^Q i$  かつ  $k \simeq^Q j$  である。従って弱順序性によって  $i \simeq^Q j$  が得られる。さらに (iii) と無関係対象からの独立性によって、 $i \simeq^P j$  を得る。  $\square$

#### 4. 非定値性

定理 3.7 が示すように、定義域の非限定性と無関係対象からの独立性を前提とすると、弱 Pareto 原理は社会的厚生関数を無意味なものに限ることが分かる。このように Pareto 原理よりも弱いといえ、弱 Pareto 原理を仮定することは好ましくない。そこでこの公理を他の公理に置き換えて社会的厚生関数の存在とその性質について考えていくことにする。

Hansson [2] は, Arrow の公理系 (定義域の非限定性, 無関係対象からの独立性, Pareto 原理) において, Pareto 原理を非定値性と非抑圧性と呼ばれる 2 つの公理で置き換えた公理系から独裁者の存在の導かれることを示している. Pareto 原理から, 非定値性と非抑圧性の 2 つの公理が含意されるため, Hansson の結果は Arrow の一般不可能性定理よりも強い主張になっている.

次の社会的厚生関数の非定値性は, あらゆる選好プロファイルの下でその社会的選好が一定となってしまいう選択肢対が存在しないことを要請している.

#### 公理 4.1 (非定値性)

$$\exists i, j \in N \text{ with } i \neq j: (\forall P \in \mathcal{P}: i \prec^P j) \text{ or } (\forall P \in \mathcal{P}: i \simeq^P j).$$

弱 Pareto 原理をこの公理に置き換えた下では以下の補題 4.2~補題 4.5 が導かれる. 補題 4.2 は, ある選好プロファイルの下で, ある選択肢対が存在し, その選択肢対に対しての全員 (ただし選択肢として考えられている 2 人の個人を除く) の選好順序と反対の選好順序を社会的厚生関数が与えることを主張している. また, 補題 4.3 はそれと対をなしている.

**補題 4.2** 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 非定値性 (公理 4.1) を満足する社会的厚生関数  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{W}$  は,

$$\exists P = (\preceq_i^P) \in \mathcal{P}, \exists i, j \in N: (\forall k \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_k^P j) \text{ and } i \succ^P j$$

を満足する.

(証明) 社会的厚生関数  $f$  が, 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 非定値性 (公理 4.1) を満足すると仮定する.

ここでもし, 弱 Pareto 原理 (公理 3.5) が成り立つと仮定するならば, 定理 3.7 によって,

$$\forall P \in \mathcal{P}, \forall i, j \in N: i \simeq^P j$$

であり, これは非定値性に反する. したがって, 弱 Pareto 性は成立しない. ゆえに,

$$\exists P = (\preceq_i^P) \in \mathcal{P}, \exists i, j \in N: (\forall k \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_k^P j) \text{ and } i \succ^P j.$$

を得る. □

**補題 4.3** 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 非定値性 (公理 4.1) を満足する社会的厚生関数  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{W}$  は,

$$\exists Q = (\preceq_i^Q) \in \mathcal{P}, \exists i, j \in N: (\forall k \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_k^Q j) \text{ and } i \prec^Q j$$

を満足する.

(証明)

$$\forall P = (\preceq_i^P) \in \mathcal{P}, \forall i, j \in N: (\forall k \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_k^P j) \implies i \succeq^P j \quad (4.1)$$

と仮定して矛盾を導こう.

補題 4.2 により, ある選好プロファイル  $P = (\preceq_i^P)$  と  $i, j \in N$  が存在して,

$$(\forall k \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_k^P j) \text{ and } i \succ^P j.$$

一般性を失うことなく,  $i = 1, j = 2$  とできる.

このとき, 循環プロファイル  $C = (\preceq_1^C, \dots, \preceq_n^C)$  を考えると,

$$\forall k \in N \setminus \{1, 2\}: 1 \prec_k^C 2$$

であるから, 無関係対象からの独立性によって  $1 \succ^C 2$  である. 一方, 仮定 (4.1) によれば,

$$1 \succeq^C 2 \succeq^C 3 \succeq^C \dots \succeq^C n \succeq^C 1$$

であり, 弱順序性より  $2 \succeq^C 1$  を得る. これは矛盾である.  $\square$

**補題 4.4**  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{W}$  を定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2) を満足する社会的厚生関数とする. このときもし, 相異なる  $i, j, l \in N$  と選好プロファイル  $S = (\preceq_m^S)$  が存在して,

$$\forall m \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_m^S j, \quad (4.2)$$

$$\forall m \in N \setminus \{i, l\}: i \prec_m^S l, \quad (4.3)$$

$$j \preceq^S i \prec^S l \quad (4.4)$$

を満足するならば, 任意の選好プロファイル  $R = (\preceq_m^R)$  に対して  $j \prec^R l$  となる.

(証明) 任意に選好プロファイル  $R = (\preceq_m^R)$  が与えられたとする. このとき, 以下の条件を満足する選好プロファイル  $T = (\preceq_m^T)$  が存在する:

$$\forall m \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_m^T j,$$

$$\forall m \in N \setminus \{i, l\}: i \prec_m^T l,$$

$$\forall m \in N \setminus \{j, l\}: \preceq_m^T |_{\{j, l\}} = \preceq_m^R |_{\{j, l\}}.$$

条件 (4.2) と条件 (4.3), 及び, 無関係対象からの独立性によって,  $j \preceq^T i$  かつ  $i \prec^T l$  である. さらに推移性によって,  $j \prec^T l$  が得られる. 再び無関係対象からの独立性を適用すれば,  $j \prec^R l$  を得る.  $\square$

**補題 4.5**  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{W}$  を定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2) を満足する社会的厚生関数とする. このときもし, 相異なる  $i, j, k \in N$  と選好プロファイル  $S = (\preceq_m^S)$  が存在して,

$$\forall m \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_m^S j, \quad (4.5)$$

$$\forall m \in N \setminus \{k, j\}: k \prec_m^S j, \quad (4.6)$$

$$k \prec^S j \preceq^S i \quad (4.7)$$

を満足するならば, 任意の選好プロファイル  $R = (\preceq_m^R)$  に対して  $k \prec^R i$  となる.

(証明) 補題 4.4 の証明と同様であるので省略する.  $\square$

以上の補題から非定値性の下でも社会的厚生関数が存在しないことが導かれる.

**定理 4.6** 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 非定値性 (公理 4.1) を満足する社会的厚生関数は存在しない.

(証明) 社会的厚生関数  $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{W}$  が存在して、定義域の非限定性、無関係対象からの独立性、非定値性を満足すると仮定して矛盾を導くことにしよう。

補題 4.2 によって、ある選好プロファイル  $P$  と相異なる  $i, j \in N$  が存在して、

$$(\forall m \in N \setminus \{i, j\}: i \prec_m^P j) \text{ and } i \succ^P j \quad (4.8)$$

となる。また補題 4.3 によって、ある選好プロファイル  $Q$  と相異なる  $k, l \in N$  が存在して、

$$(\forall m \in N \setminus \{k, l\}: k \prec_m^Q l) \text{ and } k \prec^Q l \quad (4.9)$$

となる。

**[場合 1]:**  $i = k$  かつ  $j \neq l$ . 無関係対象からの独立性によって、条件 (4.2)~条件 (4.4) を満足する選好プロファイル  $S$  が存在する。補題 4.4 によって非定値性に矛盾する。

**[場合 2]:**  $j = l$  かつ  $i \neq k$ . 無関係対象からの独立性によって、条件 (4.5)~条件 (4.7) を満足する選好プロファイル  $S$  が存在する。補題 4.5 によって非定値性に矛盾する。

**[場合 3]:**  $i = l$  かつ  $j \neq k$ . このとき、以下の条件を満足する選好プロファイル  $S = (\preceq_m^S)$  が存在する:

$$\begin{aligned} \forall m \in N \setminus \{i, j\}: & \quad i \prec_m^S j, \\ \forall m \in N \setminus \{k, i\}: & \quad k \prec_m^S i, \\ & \quad k \prec_i^S j. \end{aligned}$$

条件 (4.8) と条件 (4.9), 及び、無関係対象からの独立性によって、 $i \succ^S j$  かつ  $k \prec^S i$  である。ここで、弱順序性より

$$\forall m \in N \setminus \{k, j\}: k \prec_m^S j$$

が成り立つことに注意せよ。

もし  $k \prec^S j$  ならば、 $S$  は条件 (4.5)~条件 (4.7) を満足している。 $k \succeq^S j$  ならば、 $S$  は条件 (4.2)~条件 (4.4) において、 $i$  を  $k$  で、 $l$  を  $i$  で置き換えたものを満足している。補題 4.4 と 4.5 によって、非定値性に矛盾する。

**[場合 4]:**  $j = k$  かつ  $i \neq l$ . このとき、以下の条件を満足する選好プロファイル  $S = (\preceq_m^S)$  が存在する:

$$\begin{aligned} \forall m \in N \setminus \{i, j\}: & \quad i \prec_m^S j, \\ \forall m \in N \setminus \{j, l\}: & \quad j \prec_m^S l, \\ & \quad i \prec_j^S l. \end{aligned}$$

ここでも

$$\forall m \in N \setminus \{i, l\}: i \prec_m^S l$$

に注意せよ。条件 (4.8) と条件 (4.9), 及び、無関係対象からの独立性によって、 $i \succ^S j$  かつ  $j \prec^S l$  である。

このときもし  $i \prec^S l$  ならば、 $S$  は条件 (4.2)~条件 (4.4) を満足している。そうでない場合は、 $S$  は条件 (4.5)~条件 (4.7) において  $k$  を  $j$  に、 $j$  を  $l$  で置き換えたものを満足している。補題 4.4 と 4.5 によって、非定値性に矛盾する。

[場合 5]:  $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$ . このとき, 以下の条件を満足する選好プロファイル  $S = (\preceq_m^S)$  が存在する:

$$i \prec_k^S j \prec_k^S l,$$

$$k \prec_i^S j \prec_i^S l,$$

$$k \prec_j^S i \prec_j^S l,$$

$$k \prec_l^S i \prec_l^S j,$$

$$\forall m \in N \setminus \{i, j, k, l\}: k \prec_m^S i \prec_m^S j \prec_m^S l.$$

条件 (4.8) と条件 (4.9), 及び, 無関係対象からの独立性によって,  $i \succ^S j$  かつ  $k \prec^S l$  である.

もし  $k \prec^S j$  ならば,  $i, j, k$  だけに着目すれば,  $S$  は条件 (4.5)~条件 (4.7) を満足している. もし  $j \preceq^S k \prec^S i$  ならば,  $i, j, k$  だけに着目して,  $S$  は条件 (4.2)~条件 (4.4) において  $i$  を  $k$  で  $l$  を  $i$  で置き換えたものを満足している. もし  $i \preceq^S k$  ならば,  $i, j, l$  だけに着目すれば,  $S$  は条件 (4.2)~条件 (4.4) を満足している. したがっていずれの場合も, 補題 4.4 と 4.5 によって, 非定値性に矛盾する.

[場合 6]:  $i = l$  かつ  $j = k$ . このとき,  $n \in N \setminus \{i, j\}$  を任意に選ぶと, 以下の条件を満足する選好プロファイル  $S = (\preceq_m^S)$  が存在する:

$$i \prec_n^S j, \quad (4.10)$$

$$i \prec_j^S n, \quad (4.11)$$

$$n \prec_i^S j, \quad (4.12)$$

$$\forall m \in N \setminus \{i, j, n\}: i \prec_m^S n \prec_m^S j. \quad (4.13)$$

条件 (4.8) と無関係対象からの独立性によって,  $i \succ^S j$  である. このとき,  $j \prec^S n$  または  $n \prec^S i$  のどちらかが成り立つ.

[場合 6-1]:  $j \prec^S n$ . 以下の条件を満足する選好プロファイル  $T = (\preceq_m^T)$  が存在する:

$$\forall m \in N \setminus \{n, j\}: n \prec_m^T j,$$

$$\forall m \in N \setminus \{i, j\}: j \prec_m^T i,$$

条件 (4.12) と条件 (4.13), 及び, 無関係対象からの独立性により,  $j \prec^T n$ . さらに, 条件 (4.9) と無関係対象からの独立性によって,  $j \prec^T i$ . これは場合 4 の  $l$  を  $i$  で,  $i$  を  $n$  で置きかえた状況である.

[場合 6-2]:  $n \prec^S i$ . 以下の条件を満足する選好プロファイル  $T = (\preceq_m^T)$  が存在する:

$$\forall m \in N \setminus \{i, n\}: i \prec_m^T n,$$

$$\forall m \in N \setminus \{i, j\}: j \prec_m^T i,$$

条件 (4.11) と条件 (4.13), 及び, 無関係対象からの独立性により,  $n \prec^T i$ . さらに, 条件 (4.9) と無関係対象からの独立性によって,  $j \prec^T i$ . これは場合 3 の  $j$  を  $n$  で,  $k$  を  $j$  で置き換えた状況である.

最後に, 無関係対象からの独立性によって,  $i = k, j = l$  となる場合は存在しないことに注意すれば証明が終了する.  $\square$



## 5. おわりに

Arrow [1] は, 市民主権性と呼ばれる公理と非負の反応性と呼ばれる公理を定義し, これら 2 つに定義域の非限定性と無関係対象からの独立性を加えた公理系を満足する社会的厚生関数もまた, 独裁者の存在を導くことを示している.

市民主権性は以下のように定義される.

### 公理 5.1 (市民主権性)

$$\forall i, j \in N \text{ with } i \neq j, \exists P \in \mathcal{P}: i \prec^P j.$$

すなわち市民主権性は, どのような選択枝対  $i, j$  に対しても何らかの選好プロファイルで  $i \prec^P j$  となることを要請している.

**系 5.2** 定義域の非限定性 (公理 3.1), 無関係対象からの独立性 (公理 3.2), 市民主権性 (公理 5.1) を満足する社会的厚生関数は存在しない.

(証明) 明らかに市民主権性は, 非定値性を含意する. ゆえに, 定理 4.6 よりこの系が成り立つ.  $\square$

本論文において得られた結果をを表 1 にまとめた. ここで, (a)~(f) の記号は以下のように各公理に対応している.

- (a) 定義域の非限定性 (公理 3.1)
- (b) 無関係対象からの独立性 (公理 3.2)
- (c) Pareto 原理 (公理 3.3)
- (d) 弱 Pareto 原理 (公理 3.5)
- (e) 非定値性 (公理 4.1)
- (f) 市民主権性 (公理 5.1)

表 1: 公理の組合せから起こる結果

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	社会的厚生関数
✓		✓				存在しない (定理 3.4)
✓	✓		✓			全て無差別 (定理 3.7)
✓	✓			✓		存在しない (定理 4.6)
✓	✓				✓	存在しない (系 5.2)

本論文では定理 3.4 を除いては無関係対象からの独立性 (公理 3.2) を前提とした. 議論のあるこの公理を前提としたのは, 相互評価の設定では循環プロファイルが許容されることによって, Pareto 原理 (公理 3.3) が大きな制約となり, この原理をより妥当なものに置き換えることが本論文の興味の対象であったからである. 相互評価の設定での無関係対象からの独立性を緩和することは今後の研究課題である.

## 謝辞

関連の研究をお教えていただいた東京都立大学の豊谷整克助教授と, 丁寧なコメントをいただいた査読者の方に感謝いたします. なお, この論文を故小原康治に捧げたいと思います.

## 参考文献

- [1] K. J. Arrow: *Social Choice and Individual Values* (Wiley, 1951). (長名寛明: 社会的選択と個人的評価 (日本経済新聞社, 1977).)
- [2] B. Hansson: The independence condition in the theory of social choice. *Theory and Decision*, 4 (1973) 25–49.
- [3] A. K. Sen: *Collective Choice and Social Welfare* (Holden-Day, 1970). (志田基与師 監訳: 集合的選択と社会的厚生 (勁草書房, 2000).)

山本 芳嗣  
筑波大学社会工学系  
305-8573 つくば市天王台 1-1-1  
E-mail: yamamoto@sk.tsukuba.ac.jp