Journal of the Operations Research
Society of Japan
2003, Vol. 46, No. 2, 203-218

マーケティング活動労力の配分

一森 哲男
大阪工業大学

(Received 受理 2001 年 5 月 7 日；再受理 2002 年 9 月 20 日)

Abstract 最近は商品がよく知られているから，よく売れるとは限らない．しかし，商品を覚えてもらうことは重要である．本論文は新製品の発売直後の状況を念頭に置き，広告労力をどのように配分すれば商品を知らない人の数が最小になるかを議論している．このときの広告媒体を 2 種類に分けて考えた．すなわち，テレビのように広い地域に影響を及ぼすものと看板のように狭い地域にしか影響を及ぼさないものである．提案したモデルの定式化では，非線形計画法の問題となっているが，解法を工夫することにより，大変効率の良い解法が得られた．この解法を得るための数学的な議論を展開し，そのアルゴリズムを記述した．最後に，例題を 1 つ示し，そのアルゴリズムで解いた結果を示した．また，投入労力と非認知度の関係を表に示した．

キーワード: マーケティング, アルゴリズム, 最適化, 非線形計画法

1. はじめに

マーケティング活動には，広告活動や販売促進活動などがあるが，これらの活動は広い地域に影響を及ぼすものと狭い地域にしか影響を及ぼさないものを含んでいる．例えば，広告活動において，テレビ，ラジオ，新聞，雑誌などを媒体としたものは広い地域に影響を与えるが，ネオンサインや看板などを利用したものは狭い地域にしか影響を与えない．販売促進活動においても，例えば，景品の当たるキャンペーンなどは広い地域に影響するが，試供品の配布などは狭い地域にしか影響しない．

ここでは，広い地域は多くの狭い地域から構成されていると考え，各広い地域間同士あるいは狭い地域間同士の重なりはないものと仮定する．また，各 (広いまたは狭い) 地域での活動において，投入費用あるいはより一般的に投入労力はその地域全体に均一に作用するものと考える．

各地域での投入労力に対する効用は指数関数で表されると仮定する．このような仮定は非常に一般的で，さまざまな分野でしばしば見受けられる．例えば，探索問題では投入探索労力と目標物の発見確率の関係が指数関数で表現されており，その現実面での有効性が示されている [3]．他にも，ソフトウェアの信頼性の問題があげられる．ここでは，投入テスト労力と残存フォールト数の関係がしばしば指数関数で表現されている [4] [5]．また，文献 [1] では，新製品を対象にして，投入広告費と販売予測値の関係が指数関数で表わされており，実販売値との結果を比較検討しその有用性を立証している．さらに，最近の研究でも [2]，広告商品の山積みの山の大きさと販売量の関係が指数関数で表わされている．実際のスーパーマーケットでの販売実績もこのことの妥当性を示している．

広い地域は全体で n 個あるとし，i 番目の広い地域は全部で m_i 個の狭い地域を持つものとする．2 重添字 ij は i 番目の広い地域の中の j 番目の狭い地域を示す．地域 ij の人

口を定数 p_{ij} で，投入労力を変数 x_{ij} で表す．この時の，まだ投入労力の影響を受けていない（広告活動では, 対象商品をまだ認知していない）人の数は平均的に $p_{ij}e^{-a_{ij}x_{ij}}$ で表せるとする．ここで，定数 a_{ij} は地域 ij で定まる正の定数で，投入労力が作用する影響力を示す．添字 i は i 番目の広い地域を示すが，ここに労力 y_i を投入すると (この広い地域に含まれる全ての狭い地域への投入労力 $x_{ij} = 0$ に固定したとすると)，まだ投入労力の影響を受けていない人の数は上記と同じように $\left(\sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}\right) e^{-b_i y_i}$ と書けるとする．同様に，定数 b_i は地域 i で定まる正の定数で，投入労力が作用する影響力を示す．これらの定数 a_{ij} や b_i の値はアンケートにより推定されたものとする．

狭い地域と広い地域全体で使用できる労力の総和を定数 B で表すと，我々の問題はつぎのように定式化できる．

$$\mathbf{P} \qquad \min \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} e^{-a_{ij}x_{ij}} \right) e^{-b_i y_i}$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} + y_i \right) \leq B,$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m_i),$$

$$y_i \geq 0, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

ここで定数 $p_{ij} > 0, \quad a_{ij} > 0 \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m_i), \quad b_i > 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$ とする．また，$0 < B < \infty$ とする．

物理的に考えれば明らかであるが，問題 $\mathbf{P}$ は閉凸集合上の凸関数の最小化問題であるので，この問題は必ず最適解を持つ．さらに，この問題 $\mathbf{P}$ は凸計画法の非線形計画問題であるので，非線形計画法の適当なアルゴリズムを用いれば最適解を得ることができるが，ここではより効率的に解く方法を考える．

2. 解法

2.1. 双対問題の形式的定義

問題 $\mathbf{P}$ に新しい変数 $z_i \geq 0$ を導入して $\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \leq z_i$ と置くことにより，つぎの n 個の問題 $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_n$ をつくりだす．

$$\mathbf{Q}_i \qquad f_i(z_i) = \min_{x_{i1}, \ldots, x_{im_i}} \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} e^{-a_{ij}x_{ij}}$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \leq z_i,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (j = 1, \ldots, m_i).$$

問題 $\mathbf{Q}_i$ では z_i は固定されていると考える．ところで，この問題は容易に解くことが可能で，関数 $f_i(z_i)$ も次のように陽に (explicitly) 表現できる（導出は付録 A を参照）．以下の表記を簡単にするため，添字 j は各 i に対して

$$p_{i1}a_{i1} > p_{i2}a_{i2} > \cdots > p_{im_i}a_{im_i}$$

と仮定すると，区間 $E_{ik} < z_i \leq E_{i\,k+1}$, $(k = 1, \ldots, m_i)$ 上では

$$f_i(z_i) = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_{ij}}\right) \exp\left\{\frac{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_{ij}} \log p_{ij}a_{ij} - z_i}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_{ij}}}\right\} + \left(\sum_{j=k+1}^{m_i} p_{ij}\right) \tag{2.1}$$

と書ける．ここで，各 z_i に関する区間の端点 $E_{i1}, \ldots, E_{im_i}$ は次のように定義されている．

$$E_{ik} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_{ij}} \log \frac{p_{ij}a_{ij}}{p_{ik}a_{ik}}, \qquad (k = 1, \ldots, m_i). \tag{2.2}$$

ここで，$E_{i1} = 0$ であり，$E_{i\,m_i+1} = +\infty$ と定義する．また，$f_i(0) = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}$ と定義する．容易に示せるが，関数 $f_i(z_i)$ は z_i の非負の全領域上で狭義単調減少で狭義凸の滑らかな区分指数関数であり，$f_i(+\infty) = +0$ となる（この区分指数関数の性質については付録 B を参照）．

すると，問題 $\mathbf{P}$ はつぎのように書きかえることができる．

$\mathbf{P}'$

$$\min \sum_{i=1}^{n} f_i(z_i) e^{-b_i y_i}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{n} (z_i + y_i) \leq B,$$

$$z_i \geq 0,\ y_i \geq 0, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

ここで，目的関数 $f_i(z_i)e^{-b_i y_i}$ は凸関数であるので，問題 $\mathbf{P}'$ も有界な凸計画問題となる．故に，この問題の双対問題も有界となり，その双対問題は主問題 $\mathbf{P}'$ の最小値に等しい最大値を持つ．主問題 $\mathbf{P}'$ の資源の量の上限制約式に対して，ラグランジュ乗数 $\lambda \geq 0$ を対応させて，次のラグランジュ関数を作る．

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, \lambda) &= \sum_{i=1}^{n} f_i(z_i) e^{-b_i y_i} + \lambda \left\{\sum_{i=1}^{n} (z_i + y_i) - B\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{f_i(z_i) e^{-b_i y_i} + \lambda (z_i + y_i)\right\} - B\lambda \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$,　$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ である．このラグランジュ関数は変数 $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{y}$, λ を持つが，いま，変数 $\boldsymbol{z} \geq \mathbf{0}$,　$\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ で最小化すると，1 変数 λ の双対関数 $g(\lambda)$ が得られる．これは，よく知られているように，λ に関して連続な凹関数である．さて，上で述べた

ように，双対問題は有界なので，双対関数 $g(\lambda)$ も有限の確定値を持つ λ に対してのみ定義されているとする．

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \min_{\substack{\boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}}} L(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y},\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\min_{\substack{z_i\geq 0\\ y_i\geq 0}}\left\{f_i(z_i)e^{-b_iy_i}+\lambda(z_i+y_i)\right\}\right]-B\lambda. \end{aligned}$$

いま，

$$h_i(\lambda)=\min_{\substack{z_i\geq 0\\ y_i\geq 0}}\left\{f_i(z_i)e^{-b_iy_i}+\lambda(z_i+y_i)\right\}$$

と置くと，$\lambda=0$ の時，右辺の関数は明らかに，下界は存在するが，確定した最小値を持たないので，以下 $\lambda>0$ と仮定する．双対問題 **D** は形式的に次のような凹関数の最大化問題と書ける．

D $$\max_{\lambda>0} g(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} h_i(\lambda)-B\lambda.$$

上記で述べたように，この双対問題 **D** は最大値を持つので，凹関数 $g(\lambda)$ の最大化は方程式 $g'(\lambda)=0$ を解くことにより実現される．($g(\lambda)$ が滑らかであることは各 $h_i(\lambda)$ が滑らかであること示せばよいが，そのことは後で議論する．）よって，以下では各 $h_i'(\lambda)$ の形を求めることにより，方程式 $g'(\lambda)=0$ を導く．

2.2. 導関数 $h_i'(\lambda)$ の形の決定

$\lambda>0$ と仮定して，次の部分問題 $\mathbf{SP}_i(\lambda)$ を考えることにより，双対問題 **D** に含まれる関数 $h_i(\lambda)$ の導関数 $h_i'(\lambda)$ の形を求める．

$\mathbf{SP}_i(\lambda)$ $$\min_{\substack{z_i\geq 0\\ y_i\geq 0}} f_i(z_i)e^{-b_iy_i}+\lambda(z_i+y_i)$$

各部分問題 $\mathbf{SP}_i(\lambda)$ は凸計画法の問題なので，部分問題 $\mathbf{SP}_i(\lambda)$ の実行可能解 (z_i,y_i)，つまり解 $z_i\geq 0$, $y_i\geq 0$ が最適解となるための必要十分条件は，次の通りである．

定理 1 (部分問題の最適性の条件). 部分問題 $\mathbf{SP}_i(\lambda)$ の実行可能解 (z_i,y_i) が最適解となるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} f_i'(z_i)e^{-b_iy_i}+\lambda\geq 0, &\qquad -b_if_i(z_i)e^{-b_iy_i}+\lambda\geq 0, \\ z_i(f_i'(z_i)e^{-b_iy_i}+\lambda)=0, &\qquad y_i(-b_if_i(z_i)e^{-b_iy_i}+\lambda)=0. \end{aligned}$$

言い換えれば

a) $z_i>0$ ならば $\lambda=-f_i'(z_i)e^{-b_iy_i}$,
b) $z_i=0$ ならば $\lambda\geq -f_i'(0)e^{-b_iy_i}$,
c) $y_i>0$ ならば $\lambda=b_if_i(z_i)e^{-b_iy_i}$,

d) $y_i = 0$ ならば $\lambda \geq b_i f_i(z_i)$
という関係が成り立つ．

この最適性の条件を満足する $z_i \geq 0$ と $y_i \geq 0$ に対し，次の 4 つの場合分けを行ない，上記の最適性の条件を再考してみる．

i) $z_i > 0$ かつ $y_i > 0$ の時：
$\lambda = -f_i'(z_i)e^{-b_i y_i}$ かつ $\lambda = b_i f_i(z_i)e^{-b_i y_i}$ なので，λ の値に関係なく

$$b_i f_i(z_i) + f_i'(z_i) = 0 \tag{2.3}$$

が成り立つ．いま，この式 (2.3) の左辺を $r_i(z_i)$ と置く．つまり

$$r_i(z_i) = b_i f_i(z_i) + f_i'(z_i) \tag{2.4}$$

と置く．さらに

$$s_{im_i} = b_i \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{a_{ij}} \right) - 1$$

と置く．すると，$r_i(0) < 0$ かつ $s_{im_i} > 0$ ならば，方程式 $r_i(z_i) = 0$ が正の解をただ 1 つ持つ（$s_{im_i} = 0$ ならば，方程式 $r_i(z_i) = 0$ を満足する z_i は任意の $z_i \geq E_{im_i}$ であるが，便宜上，この方程式の解として $z_i = E_{im_i}$ を採用する）．そうでなく $r_i(0) < 0$ かつ $s_{im_i} < 0$ および $r_i(0) \geq 0$ ならば $r_i(z_i) = 0$ は正の解を持たないことが示せる (付録 C 参照)．このケースでは，式 (2.3) を満たす正の z_i が存在しているので，その正の解を d_i と記せば，この場合 $z_i = d_i$ となり，かつ $y_i = \frac{1}{b_i} \log \frac{b_i f_i(d_i)}{\lambda}$, $r_i(0) < 0$, $s_{im_i} \geq 0$ となる．
さらに，λ に関して $y_i > 0$ および $\lambda = b_i f_i(z_i)e^{-b_i y_i}$ より，次式が成り立つ．

$$\lambda < b_i f_i(d_i). \tag{2.5}$$

ii) $z_i > 0$ かつ $y_i = 0$ の時：
$\lambda = -f_i'(z_i)$ かつ $\lambda \geq b_i f_i(z_i)$ なので，λ の値に関係なく

$$r_i(z_i) = b_i f_i(z_i) + f_i'(z_i) \leq 0$$

が成り立つ．
方程式 $r_i(z_i) = 0$ が正の解をただ 1 つ持つ場合，上式を満足する z_i は $0 < z_i \leq d_i$ という関係を満たす．もちろん，d_i は方程式 $r_i(z_i) = 0$ の唯一の正の解である．この時も $r_i(0) < 0$, $s_{im_i} \geq 0$ となっている．さらに，λ に関して $f_i(z_i)$ の狭義凸性と単調減少性より $\lambda = -f_i'(z_i) < -f_i'(0)$ かつ $\lambda \geq b_i f_i(z_i) \geq b_i f_i(d_i)$ が成り立つ．つまり，次式が成り立つ．

$$b_i f_i(d_i) \leq \lambda < -f_i'(0). \tag{2.6}$$

方程式 $r_i(z_i) = 0$ が解を持たない場合 $r_i(0) < 0$, $s_{im_i} < 0$ となっている．さらに，次式が成り立つ．

$$\lambda < -f_i'(0). \tag{2.7}$$

ここで，このケースの z_i の値（つまり，$\lambda=-f_i'(z_i)$ を満たす z_i の値）を λ を用いて表わしておく（付録D参照）．添字 k_i が $p_{i\,k_i+1}a_{i\,k_i+1}\le\lambda<p_{ik_i}a_{ik_i}$ を満たす時

$$z_i=\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{a_{ij}}\log\frac{p_{ij}a_{ij}}{\lambda}.$$

iii) $z_i=0$ かつ $y_i>0$ の時：
$\lambda\ge -f_i'(0)e^{-b_iy_i}$ かつ $\lambda=b_if_i(0)e^{-b_iy_i}$ なので，λ の値に関係なく

$$r_i(0)=b_if_i(0)+f_i'(0)\ge 0 \tag{2.8}$$

が成り立つ．つまり，$r_i(z_i)=0$ は正の解を持たない．
さらに，λ に関して $y_i>0$ および $\lambda=b_if_i(0)e^{-b_iy_i}$ より，次式が成り立つ．

$$\lambda<b_if_i(0). \tag{2.9}$$

iv) $z_i=0$ かつ $y_i=0$ の時：
λ に関して $\lambda\ge -f_i'(0)$ かつ $\lambda\ge b_if_i(0)$ が成り立つ．つまり，次式が成り立つ．

$$\lambda\ge\max\{-f_i'(0),b_if_i(0)\}. \tag{2.10}$$

上記4つのケース i)–iv) に対し，i) では $r_i(0)<0$, $s_{im_i}\ge 0$ となっている．ii) では $r_i(0)<0$ であり，iii) ではその逆の $r_i(0)\ge 0$ となっている．よって，$r_i(0)<0$, $s_{im_i}<0$ であれば，ケース i) は生じず，$r_i(0)<0$ であれば，ケース iii) は生じず，$r_i(0)\ge 0$ であれば，ケース i) と ii) は生じないことが分かる．以下，３つの場合：$r_i(0)<0$, $s_{im_i}\ge 0$ と $r_i(0)<0$, $s_{im_i}<0$ と $r_i(0)\ge 0$ を考えていく．

まず，$r_i(0)<0$, $s_{im_i}\ge 0$ の場合を考える．この場合，ケース i) では，(2.5) より $0<\lambda<b_if_i(d_i)$, またケース ii) では (2.6) より $b_if_i(d_i)\le\lambda<-f_i'(0)$. さらにケース iv) では，いま $r_i(0)=b_if_i(0)+f_i'(0)<0$ なので，(2.10) より $\lambda\ge -f_i'(0)$ となっている．つまり，$\lambda>0$ の領域がきれいに３分割されている．よって，以下のことが成立する．

定理 2 ($r_i(0)<0$ **かつ** $s_{im_i}\ge 0$ **の時**)**.**
- $0<\lambda<b_if_i(d_i)$ ならば，ケース i) が生じ $z_i=d_i$，$y_i=\frac{1}{b_i}\log\frac{b_if_i(d_i)}{\lambda}$.
- $b_if_i(d_i)\le\lambda<-f_i'(0)$ ならば，ケース ii) が生じ $z_i=\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{a_{ij}}\log\frac{p_{ij}a_{ij}}{\lambda}$，$y_i=0$. ただし，添字 k_i は $p_{i\,k_i+1}a_{i\,k_i+1}\le\lambda<p_{ik_i}a_{ik_i}$ を満たす．
- $\lambda\ge -f_i'(0)$ ならば，ケース iv) が生じ $z_i=0$, $y_i=0$.

二番目は，$r_i(0)<0$, $s_{im_i}<0$ の場合を考える．この場合，
ケース ii) では (2.5) より $0<\lambda<-f_i'(0)$. さらにケース iv) では，いま $r_i(0)=b_if_i(0)+f_i'(0)<0$ なので，(2.8) より $\lambda\ge -f_i'(0)$ となっている．つまり，$\lambda>0$ の領域がきれいに２分割されている．よって，以下のことが成立する．

定理 3 ($r_i(0)<0$ **かつ** $s_{im_i}<0$ **の時**)**.**
- $0<\lambda<-f_i'(0)$ ならば，ケース ii) が生じ $z_i=\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{a_{ij}}\log\frac{p_{ij}a_{ij}}{\lambda}$，$y_i=0$. ただし，添字 k_i は $p_{i\,k_i+1}a_{i\,k_i+1}\le\lambda<p_{ik_i}a_{ik_i}$ を満たす．

- $\lambda \geq -f_i'(0)$ ならば，ケース iv) が生じ $z_i = 0,\ y_i = 0$.

最後は，$r_i(0) \geq 0$ の場合を考える．この場合，ケース iii) では，(2.9) より $0 < \lambda < b_i f_i(0)$，ケース iv) では，いま $r_i(0) = b_i f_i(0) + f_i'(0) \geq 0$ なので，(2.10) より $\lambda \geq b_i f_i(0)$ となっている．つまり，$\lambda > 0$ の領域が２分割されている．よって，以下のことが成立する．

定理 4 ($r_i(0) \geq 0$ **の時**).

- $0 < \lambda < b_i f_i(0)$ ならば，ケース iii) が生じ $z_i = 0,\ y_i = \frac{1}{b_i}\log\frac{b_i f_i(0)}{\lambda}$.
- $\lambda \geq b_i f_i(0)$ ならば，ケース iv) が生じ $z_i = 0,\ y_i = 0$.

定理 2, 3, 4 より，固定された λ の値に対しすべての部分問題 $\mathbf{SP}_i(\lambda)$ の最適解 (z_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ が得られたことになる．つまり，関数 $h_i'(\lambda) = z_i + y_i,\ i = 1, \ldots, n$ が得られたことになる．ただし，その関数形は λ の値に応じて変化する．

いま，広い地域の添字集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を３つに分割する．

$$U = \{i | r_i(0) < 0, s_{im_i} \geq 0\}, \quad V = \{i | r_i(0) < 0, s_{im_i} < 0\}, \quad W = \{i | r_i(0) \geq 0\}. \qquad (2.11)$$

これらの記号を用いると，関数 $h_i'(\lambda) = z_i + y_i$ はつぎのように表現できる．ここで，記号 h_i は付録 C で定義された定数である．

定理 5 ($h_i'(\lambda) = z_i + y_i$ **の形**).

- $i \in U$ ならば，$$h_i'(\lambda) = \begin{cases} d_i + \frac{1}{b_i}\log\frac{b_i f_i(d_i)}{\lambda}, & 0 < \lambda < b_i f_i(d_i) \\ \sum_{j=1}^{h_i}\frac{1}{a_{ij}}\log\frac{p_{ij}a_{ij}}{\lambda}, & b_i f_i(d_i) \leq \lambda < p_{ih_i}a_{ih_i} \\ \sum_{j=1}^{h_i-1}\frac{1}{a_{ij}}\log\frac{p_{ij}a_{ij}}{\lambda}, & p_{ih_i}a_{ih_i} \leq \lambda < p_{ih_i-1}a_{ih_i-1} \\ \sum_{j=1}^{h_i-2}\frac{1}{a_{ij}}\log\frac{p_{ij}a_{ij}}{\lambda}, & p_{ih_i-1}a_{ih_i-1} \leq \lambda < p_{ih_i-2}a_{ih_i-2} \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \frac{1}{a_{i1}}\log\frac{p_{i1}a_{i1}}{\lambda}, & p_{i2}a_{i2} \leq \lambda < p_{i1}a_{i1} \equiv -f_i'(0) \\ 0, & \lambda \geq -f_i'(0) \end{cases},$$
- $i \in V$ ならば，$$h_i'(\lambda) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m_i}\frac{1}{a_{ij}}\log\frac{p_{ij}a_{ij}}{\lambda}, & 0 < \lambda < p_{im_i}a_{im_i} \\ \sum_{j=1}^{m_i-1}\frac{1}{a_{ij}}\log\frac{p_{ij}a_{ij}}{\lambda}, & p_{im_i}a_{im_i} \leq \lambda < p_{im_i-1}a_{im_i-1} \\ \sum_{j=1}^{m_i-2}\frac{1}{a_{ij}}\log\frac{p_{ij}a_{ij}}{\lambda}, & p_{im_i-1}a_{im_i-1} \leq \lambda < p_{im_i-2}a_{im_i-2} \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \frac{1}{a_{i1}}\log\frac{p_{i1}a_{i1}}{\lambda}, & p_{i2}a_{i2} \leq \lambda < p_{i1}a_{i1} \equiv -f_i'(0) \\ 0, & \lambda \geq -f_i'(0) \end{cases},$$
- $i \in W$ ならば，$$h_i'(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{b_i}\log\frac{b_i f_i(0)}{\lambda}, & 0 < \lambda < b_i f_i(0) \\ 0, & \lambda \geq b_i f_i(0) \end{cases}.$$

関数 $h_i(\lambda)$ が滑らかであることは，その導関数 $h_i'(\lambda)$ の連続性に依存しているが，この定理 5 より導関数 $h_i'(\lambda)$ の連続性は明らかである（$\lambda = b_i f_i(d_i), i \in U$ での $h_i'(\lambda)$ の連続性については付録 E 参照）.

さらに，固定された λ の値に対し集合 U を３分割し，集合 V と W を２分割する．

$$U_S = \{\, i \mid \lambda < b_i f_i(d_i) \,\} \cap U, \quad U_M = \{\, i \mid b_i f_i(d_i) \leq \lambda < -f_i'(0) \,\} \cap U,$$
$$U_L = \{\, i \mid \lambda \geq -f_i'(0) \,\} \cap U;$$
$$V_S = \{\, i \mid \lambda < -f_i'(0) \,\} \cap V, \qquad V_L = \{\, i \mid \lambda \geq -f_i'(0) \,\} \cap V;$$
$$W_S = \{\, i \mid \lambda < b_i f_i(0) \,\} \cap W, \qquad W_L = \{\, i \mid \lambda \geq b_i f_i(0) \,\} \cap W.$$

これらの記号を用いると関数 $h_i'(\lambda)$ の形はつぎのように表現し直すことができる．

定理 6 ($h_i'(\lambda)$ の形).

- $i \in U_S$ ならば，$h_i'(\lambda) = d_i + \frac{1}{b_i} \log \frac{b_i f_i(d_i)}{\lambda}$.
- $i \in U_M \cup V_S$ ならば，$h_i'(\lambda) = \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{a_{ij}} \log \frac{p_{ij} a_{ij}}{\lambda}$.
- $i \in W_S$ ならば，$h_i'(\lambda) = \frac{1}{b_i} \log \frac{b_i f_i(0)}{\lambda}$.
- 上記以外ならば，$h_i'(\lambda) = 0$.

この定理 6 を用いれば，双対関数の導関数 $g'(\lambda)$ を以下のように表現できる．

$$g'(\lambda) = \sum_{i \in U_S} \left\{ d_i + \frac{1}{b_i} \log \frac{b_i f_i(d_i)}{\lambda} \right\} + \sum_{i \in U_M \cup V_S} \left\{ \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{a_{ij}} \log \frac{p_{ij} a_{ij}}{\lambda} \right\} + \sum_{i \in W_S} \left\{ \frac{1}{b_i} \log \frac{b_i f_i(0)}{\lambda} \right\} - B. \quad (2.12)$$

添字集合の分割が最適であれば，つまり，最適ラグランジュ乗数値 λ^* を用いて添字を分割しているのであれば，その値は上式で $g'(\lambda) = 0$ とおくことにより得られる．

$$\lambda^* = \exp \frac{\displaystyle\sum_{i \in U_S} \left\{ d_i + \frac{1}{b_i} \log b_i f_i(d_i) \right\} + \sum_{i \in U_M \cup V_S} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{a_{ij}} \log p_{ij} a_{ij} + \sum_{i \in W_S} \frac{1}{b_i} \log b_i f_i(0) - B}{\displaystyle\sum_{i \in U_S} \frac{1}{b_i} + \sum_{i \in U_M \cup V_S} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{a_{ij}} + \sum_{i \in W_S} \frac{1}{b_i}}. \quad (2.13)$$

集合 U_S, U_M, U_L と V_S, V_L と W_S, W_L および添字 k_i $(i \in U_M \cup V_S)$ は λ の値により定まっている．そこで，これらの集合と添字が不変な区間を調べてみる．そのために，数直線 λ 上に以下の点集合 T を定義する．

$$T = \{\, b_i f_i(d_i) \mid i \in U \,\} \cup \{\, -f_i'(0) \mid i \in U \,\} \cup \{\, -f_i'(0) \mid i \in V \,\} \cup \{\, b_i f_i(0) \mid i \in W \,\}$$
$$\cup \{ p_{ij} a_{ij} \mid i \in U_M \cup V_S, 1 \leq j \leq m_i \}. \quad (2.14)$$

ここで，$-f_i'(0) = p_{i1} a_{i1}$, $f_i(0) = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}$ である．この時，この点集合 T の要素数に関して $m = \max_{1 \leq i \leq n} \{m_i\}$ とすると

$$|T| \leq 2|U| + |V| + |W| + m|U_M| + m|V_S| \leq 2n + mn$$

となっているが，これらの要素を小さいもの順に並べ，順に添字番号が付けられたとする．つまり， $T = \{ e_k \mid k = 1, \ldots, |T| \}$ として $e_1 < e_2 < \cdots < e_{|T|}$ となっている．さらに，$e_0 = +0$, $e_{|T|+1} = \infty$ とする．このように定義すると，各区間 $I_k = \{ \lambda \mid e_k \leq \lambda < e_{k+1} \}$ では集合 U_S, U_M, U_L と V_S, V_L と W_S, W_L は λ の値に不変となり，添字 k_i $(i \in U_M \cup V_S)$ は確定する．ここで，$k = 0, 1, \ldots, |T|$. すると，滑らかな凹関数である双対関数 $g(\lambda)$ の最大化は最適ラグランジュ乗数 λ^* を含む区間 I_{k^*} を見つけることに帰着される．区間は高々 $2n+mn+1$ 個しかないのでこれらの区間上で二分探索を行えば $O(\log mn)$ 回，導関数 $g'(\lambda)$ の符号を評価すれば最適ラグランジュ乗数を含む区間を見つけることができる．

アルゴリズム

1. 式 (C.2) より $r_i(0)$, $i = 1, \ldots, n$ を求めよ．
2. 式 (C.3) より s_{im_i}, $i = 1, \ldots, n$ を求めよ．
3. 式 (2.11) より集合 U, V, W を求めよ．
4. 式 (2.2) より端点 E_{ij}, $i \in U \cup V$, $j = 1, \ldots, m_i$ を求めよ．
5. 式 (C.5) より $r(E_{ih_i}) < 0$, $r(E_{i\,h_i+1}) \geq 0$ となる添字 h_i, $i \in U$ を求めよ．
6. 式 (C.6) より d_i, $i \in U$ を求めよ．
7. 式 (2.1) より $f_i(d_i)$, $i \in U$ を求めよ．
8. 式 (2.14) より，数直線 λ 上の点集合 T を求めよ．
9. 点集合 T の要素を小さいもの順に並べ, $e_1 < e_2 < \cdots < e_{|T|}$ を求めよ．$e_0 = +0$, $e_{|T|+1} = \infty$ とせよ．
10. $e_{me} \leq \lambda < e_{me+1}$, $me = \lfloor |T|/2 \rfloor$ とおけ．
11. 最適ラグランジュ乗数 λ^* が得られるまで，以下のステップを繰り返せ．
    (a) 集合 U_S, U_M, V_S, W_S を求めよ．
    (b) 各 $i \in U_M \cup V_S$ に対し，$p_{i\,k_i+1} a_{i\,k_i+1} \leq e_{me} < p_{i\,k_i} a_{i\,k_i}$ となる k_i を求めよ．
    (c) 式 (2.12) より
        i. $g'(e_{me}) g'(e_{me+1}) \leq 0$ ならば，式 (2.13) より λ^* を求めよ．
        ii. $g'(e_{me}) < 0$ ならば，me を適当に小さくしてステップ 11 を繰り返せ．
        iii. $g'(e_{me+1}) > 0$ ならば，me を適当に大きくしてステップ 11 を繰り返せ．
12. 定理 2, 3, 4 より z_i, y_i, $i = 1, \ldots, n$ を求めよ．
13. $z_i > 0$ なる各 i に対し，式 (A.8) より $\mu_{ik} = \mu_{i\,k_i}$ ($i \in U_M \cup V_S$ ならば), $\mu_{ik} = \mu_{i\,h_i}$ ($i \in U_S$ ならば) を求めよ．
14. 式 (A.4) より x_{ij} を求めよ．もちろん，$z_i = 0$ ならば $x_{ij} = 0$, $j = 1, \ldots, m_i$.

3. 数値例

広い領域数 $n = 9$, その中に含まれる狭い領域数 $m_1 = \cdots = m_9 = 4$, 労力の総和 $B = 1{,}500$ とする．狭い地域 ij の人口 (p_{ij}), 影響力 (a_{ij}) は次の通りである．

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} 33.0 & 30.0 & 25.0 & 20.0 \\ 57.0 & 50.0 & 40.0 & 31.0 \\ 45.0 & 41.0 & 35.0 & 32.0 \\ 33.0 & 30.0 & 25.0 & 20.0 \\ 57.0 & 50.0 & 40.0 & 31.0 \\ 45.0 & 41.0 & 35.0 & 32.0 \\ 33.0 & 30.0 & 25.0 & 20.0 \\ 57.0 & 50.0 & 40.0 & 31.0 \\ 45.0 & 41.0 & 35.0 & 32.0 \end{pmatrix}, \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.052 & 0.048 & 0.047 & 0.045 \\ 0.027 & 0.030 & 0.037 & 0.038 \\ 0.030 & 0.031 & 0.033 & 0.034 \\ 0.052 & 0.048 & 0.047 & 0.045 \\ 0.027 & 0.030 & 0.037 & 0.038 \\ 0.030 & 0.031 & 0.033 & 0.034 \\ 0.052 & 0.048 & 0.047 & 0.045 \\ 0.027 & 0.030 & 0.037 & 0.038 \\ 0.030 & 0.031 & 0.033 & 0.034 \end{pmatrix}.$$

ここで，$i = 1, 2, 3$ のブロックは $i = 4, 5, 6$, $i = 7, 8, 9$ と同一データとした．広い地域 i の影響力 (b_i) は次の通りである．

$$(b_i) = \begin{pmatrix} 0.0125 & 0.00845 & 0.00805 & 0.01 & 0.006 & 0.005 & 0.02 & 0.01 & 0.009 \end{pmatrix}.$$

つぎに

$$(r_i(0)) = (-0.3660 \quad -0.0349 \quad -0.1183 \quad 0.6360 \quad -0.4710 \quad -0.5850 \quad 3.6840 \quad 0.2410 \quad 0.0270)$$

$$(s_{i\,m_i}) = \begin{pmatrix} 0.0445 & 0.0454 & 0.0087 & -0.1644 & -0.2577 & -0.3735 & 3.1781 & 0.2371 & 0.1278 \end{pmatrix}$$

を計算すると

$$U = \{1, 2, 3\}, V = \{4, 5, 6\}, W = \{7, 8, 9\}$$

となる．h_i, d_i, $(i \in U)$ は

$$(h_i) = (3, 2, 3), \quad (d_i) = (17.1562, 1.8950, 10.4216)$$

となる．以下計算を進めると，$\lambda = 0.5997108$ が最適となる．このとき

$$(y_i) = (46.45563 \quad 106.90566 \quad 78.65238 \quad 0.00000 \quad 0.00000 \quad 0.00000 \quad 175.81654 \quad 435.16845 \quad 369.42888)$$

が得られる．また，

$$(z_i) = (17.15622 \quad 1.89503 \quad 10.42162 \quad 61.79753 \quad 107.64563 \quad 88.65643 \quad 0.00000 \quad 0.00000 \quad 0.00000)$$

となる．さらに

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} 9.0502 & 6.1512 & 1.9549 & 0.0000 \\ 1.4477 & 0.4473 & 0.0000 & 0.0000 \\ 5.9420 & 3.8052 & 0.6744 & 0.0000 \\ 20.2174 & 18.2490 & 14.3101 & 9.0211 \\ 34.9052 & 30.5591 & 24.4149 & 17.7665 \\ 27.0471 & 24.2294 & 19.8609 & 17.5191 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

が得られる．最適目的関数値は 400.7145 で，人口の総和が 1317 なので，その割合，つまり，非認知度は 30.4263 パーセントである．次の表はさまざまな投入労力に対する最適目的関数値と非認知度を示す (表 1)．

表 1: 投入労力と非認知度の関係

投入労力	最適目的関数値	非認知度
500	835.8577	63.4668
1000	566.9225	43.0465
1500	400.7145	30.4263
2000	288.4967	21.9056
2500	209.2341	15.8872
3000	152.1847	11.5554

参考文献

[1] R.Blattberg and J.Golanty: An early test market forecasting and diagnostic model for new product planning. *Journal of Marketing Research*, **XV** (1978) 192–202.

[2] 川勝英史, 三道弘明: 小売業における特別展示商品に対する最適発注量－単位時間当り総利益の最大化. 日本応用数理学会論文誌, **10** (2000) 89-100.

[3] B.O.Koopman: The theory of search: part III, the optimum distribution of searching effort. *Operations Research*, **5** (1957) 613–626.

[4] J.D. Musa: A theory of software reliability and its application. *IEEE Transaction on Software Engineering*, **SE-1** (1975) 312–327.

[5] 山田茂: ソフトウェア信頼性モデル－基礎と応用 (日科技連出版社, 1994).

付録 A

ここでは広い地域を表わす添字 i は省略する．明らかに，問題 **Q** は最適解を持つので，この問題の実行可能解 $(x_1, \ldots, x_m)$ が最適解となるための必要十分条件はラグランジュ乗数

$\mu \geq 0$ が

$$-p_j a_j e^{-a_j x_j} + \mu \geq 0, \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{A.1}$$

$$x_j \left\{-p_j a_j e^{-a_j x_j} + \mu\right\} = 0, \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{A.2}$$

$$\mu \left(\sum_{j=1}^{m} x_j - z \right) = 0 \tag{A.3}$$

を満足することである．

まず，式 (A.1) より，$\mu \geq p_j a_j e^{-a_j x_j}$ つまり $\mu \neq 0$ であることに注意する．変数 $x_j \geq 0$ に対して，$x_j > 0$ ならば式 (A.2) より $\mu = p_j a_j e^{-a_j x_j} < p_j a_j$ となり，$x_j = 0$ ならば式 (A.1) より $\mu \geq p_j a_j$ となる．よって，$0 < \mu < p_j a_j$ ならば $x_j > 0$ となり，$\mu \geq p_j a_j$ ならば $x_j = 0$ となる．このことより，上記の条件はラグランジュ乗数 $\mu > 0$ が

$$x_j = \max\left\{0, \frac{1}{a_j} \log \frac{p_j a_j}{\mu}\right\} \tag{A.4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = z \tag{A.5}$$

を満足することとなる．ここで

$$p_1 a_1 > p_2 a_2 > \cdots > p_m a_m \tag{A.6}$$

と仮定する．つまり，狭い地域を表わす添字は $p_j a_j$ の大きい順，物理的には，人口が多く投入労力の影響が受けやすい順に並べられていると仮定する．ここで，ラグランジュ乗数 $\mu > 0$ が $p_k a_k > \mu \geq p_{k+1} a_{k+1}$ を満足すると仮定すると，上記の条件はラグランジュ乗数 $\mu > 0$ が

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \log \frac{p_j a_j}{\mu} = z \tag{A.7}$$

を満足することとなる．これを満たすラグランジュ乗数を μ_k と置くと

$$\mu_k = \exp\left\{\frac{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \log p_j a_j - z}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j}}\right\} \tag{A.8}$$

となる．これを式 (A.4) の右辺に代入した結果を用いると $f(z)$ は

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=1}^{m} p_j e^{-a_j x_j} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j}\right) \exp\left\{\frac{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \log p_j a_j - z}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j}}\right\} + \left(\sum_{j=k+1}^{m} p_j\right) \end{aligned} \tag{A.9}$$

となる．さらに，式 (A.8) の μ_k を不等式 $p_k a_k > \mu_k \geq p_{k+1} a_{k+1}$ に代入し，z に関して解くと

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \log \frac{p_j a_j}{p_k a_k} < z \leq \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{a_j} \log \frac{p_j a_j}{p_{k+1} a_{k+1}} \tag{A.10}$$

すなわち

$$E_k < z \le E_{k+1} \tag{A.11}$$

が得られる．$p_{m+1}a_{m+1} = +0$ と定義すれば，$k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ なので，ここまでの議論は $0 < \mu < p_1 a_1$ の場合を扱ったことになる．残りの $\mu \ge p_1 a_1$ の場合は $x_1 = \cdots = x_m = 0$ かつ $z = 0$ の時のみなので $f(0) = \sum_{j=1}^{m} p_j$ と定義する．

付録 B

ここでも広い地域を表わす添字 i は省略する．

$$E_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{a_j} \log \frac{p_j a_j}{p_{k+1} a_{k+1}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \log \frac{p_j a_j}{p_{k+1} a_{k+1}} \tag{B.1}$$

を区間 (A.11) 上で定義された関数 $f(z)$ の式 (A.9) に代入すると

$$\begin{aligned} f(E_{k+1}) &= \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \right) \exp \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \log p_j a_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \log \frac{p_j a_j}{p_{k+1} a_{k+1}}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j}} \right\} + \left(\sum_{j=k+1}^{m} p_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \right) p_{k+1} a_{k+1} + \left(\sum_{j=k+1}^{m} p_j \right) \end{aligned} \tag{B.2}$$

となる．一方，区間 $E_{k+1} < z \le E_{k+2}$ 上で定義される

$$f(z) = \left(\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{a_j} \right) \exp \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{a_j} \log p_j a_j - z}{\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{a_j}} \right\} + \left(\sum_{j=k+2}^{m} p_j \right) \tag{B.3}$$

に対し

$$\begin{aligned} \lim_{z \to E_{k+1}+0} f(z) &= \left(\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{a_j} \right) \exp \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{a_j} \log p_j a_j - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{a_j} \log \frac{p_j a_j}{p_{k+1} a_{k+1}} - 0}{\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{a_j}} \right\} + \left(\sum_{j=k+2}^{m} p_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{a_j} \right) p_{k+1} a_{k+1} + \left(\sum_{j=k+2}^{m} p_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \right) p_{k+1} a_{k+1} + \left(\sum_{j=k+1}^{m} p_j \right) \end{aligned} \tag{B.4}$$

となる．式 (B.2) と式 (B.4) より，関数 $f(z)$ は $z = E_{k+1}$ で連続であることが分かる．よって，関数 $f(z)$ は $z \ge 0$ で連続である．

次に，導関数 $f'(z)$ を明示する．これは区間 $E_k < z \le E_{k+1} \quad (k = 1, \ldots, m)$ 上で

$$f'(z) = -\exp \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \log p_j a_j - z}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j}} \right\} \tag{B.5}$$

となる．上記と同様の計算より

$$\lim_{z \to E_{k+1}+0} f'(z) = f'(E_{k+1}) = -p_{k+1} a_{k+1} \tag{B.6}$$

となる．よって，関数 $f'(z)$ は $z=E_{k+1}$ で連続であり，関数 $f'(z)$ は $z\geq 0$ で連続となる．つまり，関数 $f(z)$ は $z\geq 0$ で連続で滑らかであることがわかる．

また，明らかに $f'(z)<0$ なので，区分指数関数 $f(z)$ は狭義単調減少関数である．これらを基に，$f(z)$ の図を以下に示す (図 1)．この図 1 より区分指数関数 $f(z)$ が狭義凸ということも分かる．

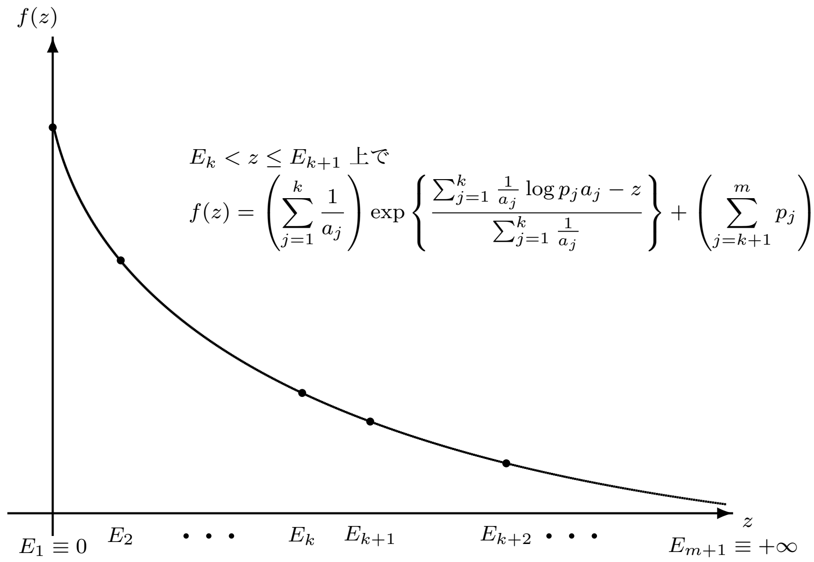

図 1: 区分指数関数 $f(z)$

付録 C

関数 $f(z)$ は定義域上で滑らかであったが，この導関数 $f'(z)$ は連続ではあるが滑らかではない．つまり，$f'(z)$ は原点を除き（$E_1\equiv 0$ では $f'(0)=-p_1a_1$），区間の端点 $E_k \quad (k=2,\ldots,m)$ で微分可能でないことに注意したい．さて，関数 $r(z)=bf(z)+f'(z)$ は区間 $E_k<z\leq E_{k+1} \quad (k=1,\ldots,m)$ 上で

$$r(z)=b\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}\right)\exp\left\{\frac{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}\log p_j a_j - z}{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}}\right\}+b\left(\sum_{j=k+1}^{m}p_j\right) - \exp\left\{\frac{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}\log p_j a_j - z}{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}}\right\} \tag{C.1}$$

と書ける．もちろん

$$\begin{aligned} r(0) &= bf(0)+f'(0) \\ &= b\left(\sum_{j=1}^{m}p_j\right)-p_1a_1 \end{aligned} \tag{C.2}$$

である．ここで

$$s_k = b\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}\right)-1, \quad (k=1,\ldots,m) \tag{C.3}$$

と置けば，区間 $E_k < z \le E_{k+1}, \quad (k = 1, \ldots, m)$ 上で

$$r(z) = s_k \exp\left\{\frac{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}\log p_j a_j - z}{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}}\right\} + b\left(\sum_{j=k+1}^{m} p_j\right) \tag{C.4}$$

と書ける．明らかに，この数列 $\{s_k\}$ は狭義単調増加数列である．

この関数 $r(z)\,(z \ge 0)$ は関数 $f(z), f'(z)\,(z \ge 0)$ の性質より，連続ではあるが滑らかではない．係数 $s_k > 0$ ならば $r(z)$ はその区間で狭義凸狭義単調減少で，係数 $s_k < 0$ ならば $r(z)$ はその区間で狭義凹狭義単調増加である．また，係数 $s_k = 0$ ならば $r(z)$ はその区間で定数である．最後の m 番目の区間では (C.4) の定数項が無いので $s_m > 0$ ならば $\lim_{z\to+\infty} r(z) = +0$, $s_m < 0$ ならば $\lim_{z\to+\infty} r(z) = -0$, このようなことは実際上めったに生じないと思われるが $s_m = 0$ ならば $r(z) = 0\,(z \ge E_m)$. とにかく $\lim_{z\to+\infty} r(z) = 0$. である．また，係数列 $\{s_k\}$ は狭義単調増加なので関数 $r(z)\,(z \ge 0)$ の増減変化は高々一回である．また，$r(0) \le 0$ ならば $s_1 < 0$ が示せ，$s_m < 0$ ならば $r(0) < 0$ であることが示せる．以上のことから以下のことが言える．

- $s_m > 0$ かつ $r(0) < 0$ の時のみ $r(z) = 0$ が唯一の正の解を持つ．
- $s_m > 0$ かつ $r(0) \ge 0$ ならば $r(z) > 0\,(z > 0)$ で正の解なし．
- $s_m < 0$ ならば $r(z) < 0\,(z \ge 0)$ で正の解なし．
- $s_m = 0$ ならば $r(z) = 0\,(z \ge E_m)$ となり，正の解は無数に存在する．

$r(0) < 0$ かつ $s_m > 0$ の時の $r(z) = 0$ の唯一の正の解 d を示す．簡単な計算より

$$r(E_k) = b\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{p_k a_k}{a_j} + \sum_{j=k+1}^{m} p_j\right) - p_k a_k \tag{C.5}$$

となることを利用して，$r(E_h) < 0, r(E_{h+1}) \ge 0$ となる $1 \le h \le m-1$ を見つけると，式 (C.4) より次式が得られる．

$$d = \sum_{j=1}^{h}\frac{1}{a_j}\log p_j a_j - \left(\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{a_j}\right)\log\frac{b\sum_{j=h+1}^{m} p_j}{1 - b\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{a_j}}. \tag{C.6}$$

この d の値は各 $i \in U$ に固有のもので，B や λ には独立である．

付録 D

関数 $-f'(z)$ は連続で狭義単調減少であり，$\lim_{z\to+\infty} -f'(z) = 0$ あることに注意する．すると，$0 < \lambda < -f'(0) = p_1 a_1$ に対する方程式 $\lambda = -f'(z)$ の解は一義的に定まる．$p_{k+1}a_{k+1} \le \lambda < p_k a_k$ ならば $E_k < z \le E_{k+1}$ なので，方程式 $\lambda = -f'(z)$ は式 (B.5) より

$$\lambda = \exp\left\{\frac{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}\log p_j a_j - z}{\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}}\right\} \tag{D.1}$$

と書き換えられる．これを z に関して解くと

$$z = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}\log\frac{p_j a_j}{\lambda}. \tag{D.2}$$

が得られる．

付録 E

広い地域を表わす添字 $i \in U$ は省略する．$\lambda = bf(d)$ で $h'(\lambda)$ が連続であることを示すには，次の等式が成り立つことを示せばよい．

$$\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{a_j} \log \frac{p_j a_j}{bf(d)} = d. \tag{E.1}$$

これを書き直すと

$$\frac{\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{a_j} \log p_j a_j - d}{\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{a_j}} = \log bf(d), \tag{E.2}$$

あるいは

$$\exp\left\{ \frac{\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{a_j} \log p_j a_j - d}{\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{a_j}} \right\} = bf(d). \tag{E.3}$$

定数 h は $r(E_h) < 0, r(E_{h+1}) \geq 0$ で定められていたので，また，定数 d は $r(z) = 0$ の唯一の解であったので，$E_h < d \leq E_{h+1}$ となる．よって，式 (B.5) より式 (E.3) の左辺は $-f'(d)$ に等しい．よって，式 (E.3) は

$$-f'(d) = bf(d) \tag{E.4}$$

となる．ところで，$r(d) \equiv bf(d) + f'(d) = 0$ であったので，確かに，式 (E.1) は成立する．

一 森　哲 男
大阪工業大学 情報科学部
〒573-0196 枚方市北山 1-79-1
E–mail: `ichimori@is.oit.ac.jp`