

## コンパクト表現によるシミュレーション型多期間確率計画モデルの定式化

枇々木規雄  
慶應義塾大学

(受理 2001年8月22日; 再受理 2002年6月24日)

**和文概要** 多期間ポートフォリオ最適化問題を実際に解くためのモデルとして、シミュレーション型多期間確率計画モデルが提案されている。シミュレーション型モデルは、不確実性の記述の柔軟さと詳細さを重視するために、投資の意思決定を簡便にした(せざるを得ない)モデルであるが、従来の定式化では計算時間を短縮させることに、このことをうまく反映させることができていない。「危険資産に対する決定変数がシミュレーション経路に依存しない」という取引戦略の特徴をうまく反映させた定式化を行うことにより、問題の規模を縮小し、計算時間の向上を目指す定式化の方法を提案する。この定式化の表現方法をコンパクト表現と呼び、2種類の定式化の方法を示す。従来の定式化に対する計算時間と比較するために様々な数値実験を行った。

### 1. はじめに

複数の投資対象の中から投資家にとって最も好ましいように、どの投資対象にどれだけ投資をしたらよいかという問題をポートフォリオ最適化問題という。ポートフォリオ最適化問題を解くためのモデルとしては、モデル構築や解法上の容易さから、運用期間にかかわらず、平均・分散モデルを代表とする1期間モデルが中心的に用いられている。しかし、年金基金などの長期的な資金運用を行う投資家にとって、多期間にわたる不確実性を考慮した動的投資政策の決定を「明示的に」モデル化するためには、1期間モデルではなく、多期間モデルを構築する必要がある。

多期間ポートフォリオ最適化問題を実際に解くためのモデルとしては、シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルが中心となって発展している。シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルは近年、コンピュータの高速化と解法アルゴリズムの発展に伴い、大規模な問題を解くことが可能になり、様々な研究が行われている。詳細は、Mulvey and Ziemba[13, 14]の参考文献を参照されたい。しかし、シナリオ・ツリー型モデルは不確実性の記述を詳細にしようとする、問題の規模が指数的に増加するという欠点がある。また、問題を大規模にしないためには数少ないシナリオでうまく不確実性を記述しなければいけない難しさもある。

一方、枇々木[3]は、モンテカルロ・シミュレーションによるパスを用いて不確実性を記述し、以下に示す取引戦略による投資決定ルールを用いて線形計画問題<sup>1</sup>として記述できるモデル化(定式化)を提案している。

「どの状態が生じた場合でも、取引後(リバランス後)の危険資産  $j$  への投資量(もしくは投資額)を同一にする。各経路での富は異なるが、その富と危険資産への投資量(も

<sup>1</sup> 目的関数が非線形凸関数の場合には、非線形凸計画問題となるが、大域的最適解の導出は保証される。

しくは投資額)の違いはすべて現金で保有する。したがって、シミュレーション経路の各時点(状態)における現金の保有額は同一ではない。」

このタイプのモデルは「シミュレーション型多期間確率計画モデル」と呼ばれる。危険資産に対する決定変数はシミュレーション経路に依存しないが、現金に対する決定変数はシミュレーション経路数に依存するために、制約式の本数と決定変数の数は、ほぼ同じになる。不確実性の記述を詳細にするためには、シミュレーション経路の本数を多くしなければならない。そのため、問題の規模は膨大になるが、問題の係数行列は疎大行列である。一般に、疎大行列を持つ大規模線形計画問題は内点法を用いることによって高速解法が可能であり、汎用数理計画ソフトウェアを用いることによって、計算機上の実装もある程度容易である。内点法の実装においては、解法内部で取り扱う係数行列が疎である(ほとんどの要素が零である)ことを最大限利用することが高速化の鍵である。しかし、シミュレーション型モデルの場合、危険資産への投資量を表す部分が密な(非零要素の多い)列(dense column)となるため、制約式の係数行列の構造(非零パターン)が数本の密な列を含むことになり、内点法のナイーブな実装ではこの問題を高速に解くことができない。汎用数理計画ソフトウェアである NUOPT(バージョン 3.1) を用いた数値計算では大規模で係数行列が疎であるにもかかわらず、単体法の方が内点法に比べて高速に解くことができている<sup>2</sup>。内点法に対しては、一般的な回避策として知られている工夫を行わなければ係数行列の疎行列性が破壊され、計算量が急増してしまう。この問題に対しては、他にも様々な内点法の実装上の技法、特に一次方程式の解法に対する技法を工夫することによって計算時間を向上させることができる。詳しくは、枇々木、田辺 [6] を見よ。

このようにシミュレーション型モデルは定式化の特別な構造を利用した計算アルゴリズムや実装上の工夫を行うことによって高速に問題を解くことが可能である。それに対し、本論文では「危険資産に対する決定変数がシミュレーション経路に依存しない」という取引戦略の特徴をうまく反映させた定式化を行うことにより、問題の規模を縮小し、計算時間の向上を目指す定式化の方法を提案する。また、この定式化を行うことによって、多期間にわたる投資決定が富に対してどのような影響を与えるのかも分かりやすく示すことができる。この定式化の表現方法を『コンパクト表現(Compact Representation)』と呼ぶ。コンパクト表現として、

- 主コンパクト表現(primal compact representation): 主問題形式による記述
- 双対コンパクト表現(dual compact representation): 双対問題形式による記述

の2種類を示す。主コンパクト表現は、シミュレーション経路数に依存する現金を表す決定変数を除去して、決定変数の数を削減した記述方法である。すなわち、コンパクト表現は現金を投資対象に含むが、危険資産のみで定式化を記述する方法(現金を定式化の中で明示的に取り扱わないで記述する方法)である。制約式の本数はほとんど変化しないが、決定変数の数は減少する。また、目的関数が線形関数であれば(線形計画問題であれば)、双対問題に書き直すことができる。その双対問題による記述方法を双対コンパクト表現と呼ぶ。双対コンパクト表現は主コンパクト表現で減少した決定変数の数が制約式の本数になるため、決定変数の数はシミュレーション経路数に依存して多くなるが、制約式の本数は少なくなる。線形計画法の解法アルゴリズムである単体法の計算時間は決定変数の数よりも制約式の本数に大きく依存するため、双対問題に書き直すメリットは十分にある。また、1次の下方部分

<sup>2</sup>NUOPT は(株)数理システム社の製品である。NUOPT バージョン 4.0 以降では、内点法の実装方法がバージョン 3.1 とは変わったと思われる、内点法でも高速に問題を解くことができる。

積率や条件付バリュー・アット・リスクなどの2本の区分直線を組み合わせた区分線形リスク尺度の場合には、それを記述するために必要な部分が決定変数の有界制約式になる。したがって、実質的に計算時間に影響を与える制約式は「危険資産 × 期間数」となり、問題を双対問題に書き換えることによって、実質的な制約式の本数を激減させることができる<sup>3</sup>。

ところで、本モデルにおいて計算時間を短縮することは極めて重要である。なぜならば、サンプリング・エラーを減少させるために、シミュレーション経路数(シナリオ数)を増加させると、計算時間が増加するからである。このことを具体的に示すために、3節の数値実験と同じ問題で乱数シードを100種類変えて最適解を求め、経路数とサンプリング・エラーの関係について調べた例を示す。

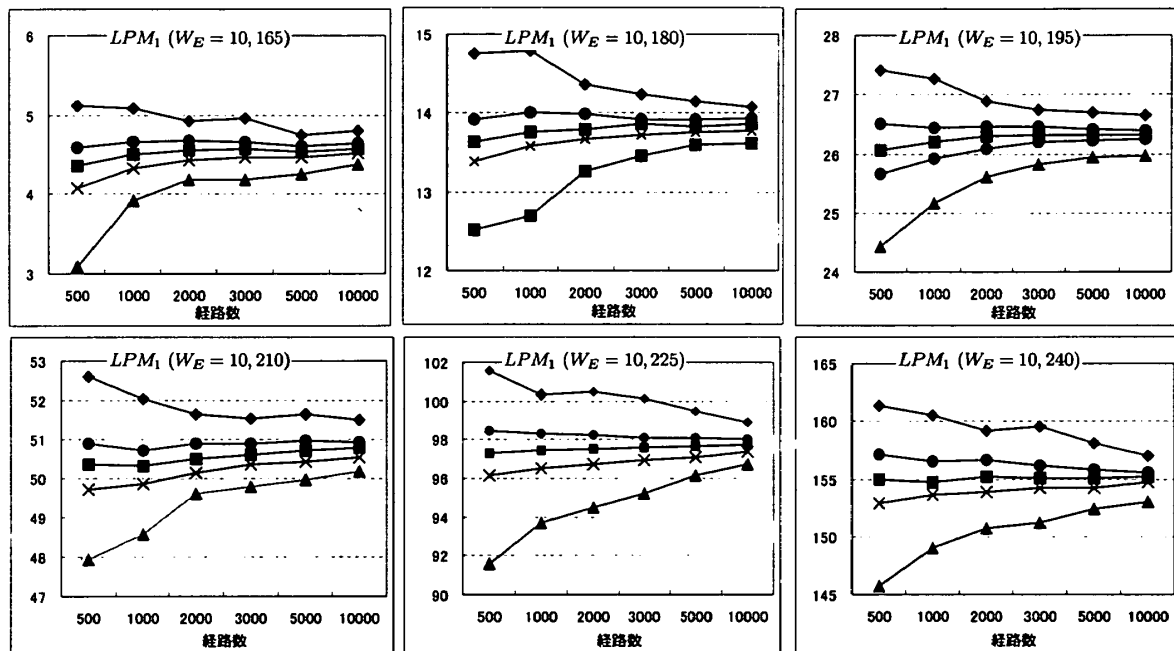


図 1: 経路数とリスク値 ( $LPM_1$ ) の関係

図1は6種類の期待富の水準に対して、6種類の経路数とリスク値の関係を示したものである。5本の線はそれぞれ上から100種類の最適解の最大値、75%点、50%点、25%点、最小値を表す。経路数が増加するにつれて最大値と最小値の幅が狭くなっていく様子がわかる。サンプリング・エラーの減少の様子をはっきりと見るために、100種類の最適解におけるリスク値の標準偏差を計算して、図2に示す。

図2の左側はリスク値の「標準偏差/平均」の値、右側は経路数が10,000本ときの標準偏差を1としたときの値を示す。また、右図の太線の " $1/\sqrt{I}$ " は、経路数を  $I$  とすると、 $1/\sqrt{I/10000} (= 100/\sqrt{I})$  の値を表す。ほぼ  $1/\sqrt{I}$  に比例して標準偏差(サンプリング・エラー)が小さくなることがわかる。紙面の都合上省略するが、各資産ごとの最適解においても同様の結果が得られている。

本論文の構成は以下の通りである。2節では、シミュレーション型モデルの概要を示し、投資量決定モデルに対する主コンパクト表現および双対コンパクト表現の定式化を示す。また、いくつかのモデルに対するコンパクト表現の適用を検討する。3節では、数値実験を用

<sup>3</sup>多期間モデルだけでなく、1期間モデルの場合でも計算時間を削減することができる。詳しくは、枇々木[8]を参照されたい。

いて、各定式化に対する計算時間を比較する。最後に、4節で結論と今後の課題を述べる。

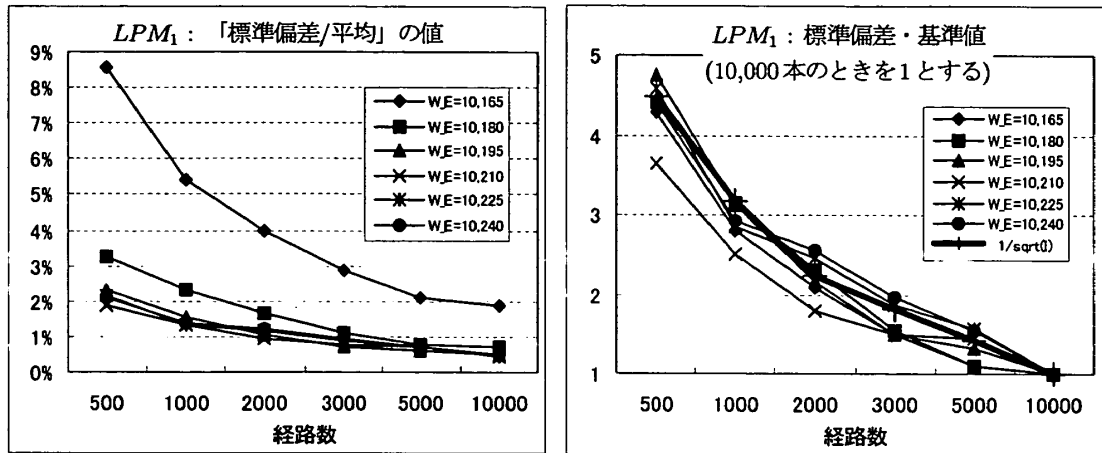


図 2: サンプルング・エラー

## 2. コンパクト表現による定式化

### 2.1. シミュレーション型モデルの概要

#### 2.1.1. 投資の意思決定とモデル化

シミュレーション型モデルでは、シミュレーション経路によって、将来の資産価格の不確実な変動を記述する。資産価格変動(収益率)の振る舞いが確率微分方程式(確率差分方程式)や時系列モデル式などで記述されるとき、モンテカルロ・シミュレーションによって複数のサンプル・パスを生成するのは比較的容易である。このサンプル・パスはシミュレーション経路と呼ばれる。

このようなタイプのモデルはシナリオ・ツリーに比べて不確実性をより詳細に記述することが可能である。シミュレーションで生成された複数のサンプル・パス(シミュレーション経路)を直接的に利用することができるので、シミュレーションでパスを生成することができる確率分布に従っているならば(確率分布を複雑に合成した場合でも)、問題を解くことができるという極めて柔軟で強力なモデル化の方法である。

シミュレーション経路は1本の経路にだけ注目すると、 $t$ 時点の状態の次に発生する $t+1$ 時点の状態は1つしか想定しない。したがって、各状態ごとに投資の意思決定を別々に行うと、それは確定条件下での意思決定を行うことになる。そこで、シミュレーション型モデルの場合には、すべての時点で状態に依存しない(どの状態に到達するかわからない)取引戦略による意思決定を行わなければならない。ただし、現金は運用する各時点で収益が確定するので状態に依存してもよい。ここで、「状態に依存しない取引戦略」とは、一つの投資決定をすべてのシミュレーション経路に適用することを意味する。このような投資の意思決定ルールを用いるのは、非予想条件(non-anticipativity condition)を保つためである。非予想条件とは、モデルの定式化において、将来の不確実な状態の中からどの状態が生じるかを確定的に知っていることを利用して意思決定ができる機会を許さない条件のことである。不確実性下の投資決定を行う確率計画モデルには必要な条件である。

### 2.1.2. 投資量決定モデルの定式化

枇々木 [3] が示したシミュレーション型モデルの定式化を示す。以降、投資量を決定変数とする2パラメータ・アプローチによる下方リスクモデルの定式化を示す。これは投資量決定モデルと呼ばれる。ここでは、リターン尺度には計画最終時点における富(最終富  $\tilde{W}_T$ )の期待値(期待富)、リスク尺度には計画最終時点における富がその目標水準(目標富  $W_G$ )を下回る大きさ(不足分)を示す1次の下方部分積率を設定する。1次の下方部分積率は

$$LPM_1 = E \left[ \left| \tilde{W}_T - W_G \right|_- \right] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left| W_T^{(i)} - W_G \right|_-$$

と表すことができる。ここで、 $|a|_- = \max(-a, 0)$  である。また、 $W_T^{(i)}$  は計画最終時点の経路  $i$  の富を示す。はじめに用いる記号を示す。

#### (A) 添字

$i$  : 経路(パス)を表す添字。

#### (B) パラメータ

$I$  : 経路の本数

$\rho_{j0}$  : 0時点の危険資産  $j$  の価格. ( $j = 1, \dots, n$ )

$\rho_{jt}^{(i)}$  :  $t$  時点の経路  $i$  の危険資産  $j$  の価格. ( $j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$ )

$r_0$  : 期間 1 の金利(0 時点のコール・レート).

$r_{t-1}^{(i)}$  : 期間  $t$  の経路  $i$  の金利( $t-1$  時点のコール・レート). ( $t = 2, \dots, T; i = 1, \dots, I$ )

$W_0$  : 0時点での富(初期富).

$W_E$  : 計画最終時点で投資家が要求する期待富.

$W_G$  : 計画最終時点での目標富.

#### (C) 決定変数

$z_{jt}$  :  $t$  時点の危険資産  $j$  への投資量. ( $j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1$ )

$v_0$  : 0 時点の現金(コール運用額).

$v_t^{(i)}$  :  $t$  時点の経路  $i$  の現金(コール運用額). ( $t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I$ )

$q^{(i)}$  : 計画最終時点の経路  $i$  の富の目標富に対する不足分. ( $i = 1, \dots, I$ )

#### (D) 定式化

モデルは以下のように定式化できる。

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1 + r_0)v_0 = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j1} + v_1^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1} + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt} + v_t^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{\rho}_{jT} z_{j,T-1} + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \geq W_E \quad (5)$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1} + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \right\} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (6)$$

$$z_{jt} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1) \quad (7)$$

$$v_0 \geq 0 \quad (8)$$

$$v_t^{(i)} \geq 0, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (9)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I)$$

ここで、 $\bar{\rho}_{jT}$  は計画最終時点の危険資産の平均価格を表す。

## 2.2. 主コンパクト表現への書き換え

シミュレーション型モデルでは、危険資産の決定変数を経路に依存せずに同一にすることによって非予想条件を満足させた。しかし、そのために現金の決定変数を経路ごとに設定することになり、決定変数の数は経路数と期間数に依存している。具体的には、従来の定式化(2.1.2項(D)の定式化)の決定変数の数は $(n+I)T+1$ 個である。しかし、現金は全資産への投資額の合計(富の大きさ)から危険資産への投資額の合計を引いたものと考え、特に決定変数として明示的に取り扱わなくても問題を定式化できるはずである。現金を決定変数から取り除くことができれば、決定変数の数は「危険資産 × 期間数」となり、「危険資産に対する決定変数がシミュレーション経路に依存しない」という取引戦略の特徴をうまく反映させた定式化を行うことができる。具体的な主コンパクト表現を記述するために、(2)～(4)式の等式を現金を表す決定変数について解き、その非負条件((8),(9)式)に代入することによって現金を表す決定変数を除外する。以降、書き換えの方法を順次説明する。

### (1) 0 時点の現金 $v_0$ の除去

(2)式を  $v_0$  について解くと、

$$v_0 = W_0 - \sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} \quad (10)$$

となり、(8)式に代入すると、(11)式を得る。

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} \leq W_0 \quad (11)$$

### (2) $t$ 時点の現金 $v_t^{(i)}$ の除去

(3)式に(10)式を代入し、 $v_1^{(i)}$  について解くと、(12)式を得る。

$$v_1^{(i)} = - \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j1} - \sum_{j=1}^n \left\{ (1 + r_0) \rho_{j0} - \rho_{j1}^{(i)} \right\} z_{j0} + (1 + r_0) W_0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (12)$$

$v_2^{(i)}$  についても同様の計算を行うと、(13)式を得る。

$$v_2^{(i)} = - \sum_{j=1}^n \rho_{j2}^{(i)} z_{j2} - \sum_{j=1}^n \left\{ (1 + r_1^{(i)}) \rho_{j1}^{(i)} - \rho_{j2}^{(i)} \right\} z_{j1} \\ - \sum_{j=1}^n (1 + r_1^{(i)}) \left\{ (1 + r_0) \rho_{j0} - \rho_{j1}^{(i)} \right\} z_{j0} + (1 + r_1^{(i)}) (1 + r_0) W_0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (13)$$

ここで,

$$\eta_{j,k,k+1}^{(i)} = \rho_{j,k+1}^{(i)} - (1 + r_k^{(i)}) \rho_{jk}^{(i)}, \quad (k = 0, \dots, T-1) \\ \eta_{jkt}^{(i)} = (1 + r_{t-1}^{(i)}) \eta_{j,k,t-1}^{(i)}, \quad (k = 0, \dots, T-2; t = k+2, \dots, T) \\ F_1^{(i)} = (1 + r_0) W_0 \\ F_t^{(i)} = (1 + r_{t-1}^{(i)}) F_{t-1}^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T)$$

とする. ( $j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, I$ ) は記述を省略している. また,  $\eta_{jkt}^{(i)} = 0, (k \geq t)$  である. 一般的に  $v_t^{(i)}$  を記述すると, (14)式で表すことができる.

$$v_t^{(i)} = - \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{t-1} \eta_{jkt}^{(i)} z_{jk} + F_t^{(i)}, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (14)$$

したがって, (9)式は(15)式に書き直すことができる.

$$\sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt} - \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{t-1} \eta_{jkt}^{(i)} z_{jk} \leq F_t^{(i)}, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (15)$$

### (3) $t$ 時点の富 $W_t^{(i)}$ の計算

(4)式の値は  $t$  時点の富  $W_t^{(i)}$  を表す. (4)式の右辺を用いて,  $t$  時点の富  $W_t^{(i)}$  を計算する.

$$W_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{t-1} \eta_{jkt}^{(i)} z_{jk} + F_t^{(i)}, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (16)$$

特に,  $t = T$  のときは(17)式になる.

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{T-1} \eta_{jkT}^{(i)} z_{jk} + F_T^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (17)$$

ここで,  $W_t^{(i)}$  を表す数式の意味を説明する.  $\mu_{j,k+1}^{(i)}$  を  $k$  時点で投資した危険資産  $j$  の1期間の( $k+1$ 時点で実現する)収益率とすると,  $\rho_{j,k+1}^{(i)} = (1 + \mu_{j,k+1}^{(i)}) \rho_{jk}^{(i)}$  より,  $\eta_{j,k,k+1}^{(i)}$  は,

$$\eta_{j,k,k+1}^{(i)} = (1 + \mu_{j,k+1}^{(i)}) \rho_{jk}^{(i)} - (1 + r_k^{(i)}) \rho_{jk}^{(i)} = (\mu_{j,k+1}^{(i)} - r_k^{(i)}) \rho_{jk}^{(i)}$$

と書き直せる. このことを利用して, (16)式の意味を解釈する.

$z_{j0}$  を0時点から1期間運用すると,  $(\mu_{j1}^{(i)} - r_0) \rho_{j0} z_{j0}$  の超過収益を得る. 1時点以降, 危険資産  $j$  は  $z_{j1}, z_{j2}, \dots, z_{j,T-1}$  で運用することになるので,  $z_{j0}$  に関する部分はこの超過収益分だけとなる. その超過収益を  $t$  時点まで現金で運用すると,  $\eta_{j0t}^{(i)} z_{j0}$  となる. 同様に,  $z_{j1}$  を

1 時点から 1 期間運用すると、 $(\mu_{j2}^{(i)} - r_1^{(i)}) \rho_{j1}^{(i)} z_{j1}$  の超過収益を得る。2 時点以降、その超過収益を  $t$  時点まで現金で運用すると、 $\eta_{j1t}^{(i)} z_{j1}$  となる。以降も同様に考えると、 $\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{t-1} \eta_{jkt}^{(i)} z_{jk}$  はこれらの合計である。超過収益は収益から金利を引いた値なので、仮想的に運用資金を借りてきて運用したときの収益と考えることができる。一方、 $F_t^{(i)}$  は初期富  $W_0$  を  $t$  時点まで現金で運用する場合の  $t$  時点での富である。 $W_t^{(i)}$  はこれらの 2 つの項の合計であると解釈することができる。ここで、危険資産への投資の際に、説明のために仮想的に運用資金を借りると考えたが、実際には初期富の現金運用による各時点の富から資金を使うことになり、残った金額が現金での運用となる。(15) 式が、各時点の富以上に危険資産を運用しないことを表す制約となる。また、現金  $v_t^{(i)}$  はこの  $W_t^{(i)}$  から  $t$  時点での危険資産への投資額  $\sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt}$  を引いたものであり、(14) 式の意味も同様に解釈することができる。

$t$  時点の富は、(4) 式を以下のように書き換えることにより、別の説明方法も可能である。

$$W_t^{(i)} = (1 + r_{t-1}^{(i)}) W_{t-1}^{(i)} + \sum_{j=1}^n (\mu_{jt}^{(i)} - r_{t-1}^{(i)}) \rho_{j,t-1}^{(i)} z_{j,t-1} \quad (18)$$

(18) 式は、 $t$  時点の富が  $t-1$  時点の富と危険資産への投資量、そして期間  $t(t-1$  時点から  $t$  時点) の超過収益率によって記述可能であることを示す。同様に、 $t-1$  時点の富は  $t-2$  時点の富と危険資産への投資量、そして期間  $t-1$  の超過収益率によって記述可能である。このようにして、0 時点まで再帰的に繰り返すことによって、 $t$  時点の富は 0 時点の富(初期富)と 0 時点から  $t-1$  時点の危険資産への投資量によって記述可能になる。ただし、現金に対する非負制約を考慮すると、定式化をするためには前述の説明の方が分かりやすいかもしれない。

#### (4) 定式化のまとめ

(5) 式の左辺は  $\bar{W}_T (= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)})$ 、(6) 式の左辺第 1 項は  $W_T^{(i)}$  を表すので、これらを (17) 式に代入し、主コンパクト表現による定式化をまとめると、以下のように記述できる。

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (19)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} \leq W_0 \quad (20)$$

$$-\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{t-1} \eta_{jkt}^{(i)} z_{jk} + \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt} \leq F_t^{(i)}, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{T-1} \eta_{jkT}^{(i)} z_{jk} + q^{(i)} \geq W_G - F_T^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{T-1} \bar{\eta}_{jkT} z_{jk} \geq W_E - \bar{F}_T \quad (23)$$

$$z_{jt} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I)$$



ここで、 $\bar{\eta}_{jkT} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \eta_{jkT}^{(i)}$ ,  $\bar{F}_T = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I F_T^{(i)}$  である。この定式化は、決定変数の数が  $nT + I$  個、制約式の数が  $TI + 2$  本である。従来の定式化の決定変数の数は  $(n + I)T + 1$  個であるので、 $(T - 1)I + 1$  個減少している。一方、制約式の数は不変である。従来の定式化は決定変数の数が制約式の数を上回っているために、双対問題に書き換えるメリットはなかった。しかし、修正後の定式化は決定変数の数が制約式の本数を大きく下回るのので、双対問題へ書き換えることにする。

### 2.3. 双対コンパクト表現への書き換え

主コンパクト表現の双対問題を双対コンパクト表現と呼ぶ。双対問題に書き換えるために、前項 (4) の定式化の行列形式を表 1 に示す。

表 1: 行列形式による記述 ( $T = 4$  の場合)

式番号	$z_{j0}$	$z_{j1}$	$z_{j2}$	$z_{j3}$	$q^{(i)}$	符号	RHS	双対変数	本数
(19)[Min]	0	0	0	0	$\frac{1}{I}$				
(20)	$-\rho_{j0}$	0	0	0	0	$\geq$	$-W_0$	$\lambda_0$	1
(21), $t = 1$	$\eta_{j01}^{(i)}$	$-\rho_{j1}^{(i)}$	0	0	0	$\geq$	$-F_1^{(i)}$	$\lambda_1^{(i)}$	$I$
(21), $t = 2$	$\eta_{j02}^{(i)}$	$\eta_{j12}^{(i)}$	$-\rho_{j2}^{(i)}$	0	0	$\geq$	$-F_2^{(i)}$	$\lambda_2^{(i)}$	$I$
(21), $t = 3$	$\eta_{j03}^{(i)}$	$\eta_{j13}^{(i)}$	$\eta_{j23}^{(i)}$	$-\rho_{j3}^{(i)}$	0	$\geq$	$-F_3^{(i)}$	$\lambda_3^{(i)}$	$I$
(22)	$\eta_{j0T}^{(i)}$	$\eta_{j1T}^{(i)}$	$\eta_{j2T}^{(i)}$	$\eta_{j3T}^{(i)}$	$E$	$\geq$	$W_G - F_T^{(i)}$	$\lambda_T^{(i)}$	$I$
(23)	$\bar{\eta}_{j0T}$	$\bar{\eta}_{j1T}$	$\bar{\eta}_{j2T}$	$\bar{\eta}_{j3T}$	0	$\geq$	$W_E - \bar{F}_T$	$\omega$	1

※  $E$  は単位行列を表す。

双対コンパクト表現は以下のように記述できる。

$$\text{Maximize} \quad -W_0\lambda_0 - \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^{T-1} F_t^{(i)}\lambda_t^{(i)} + \sum_{i=1}^I (W_G - F_T^{(i)})\lambda_T^{(i)} + (W_E - \bar{F}_T)\omega \quad (24)$$

subject to

$$-\rho_{j0}\lambda_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T \eta_{j0t}^{(i)}\lambda_t^{(i)} + \bar{\eta}_{j0T}\omega \leq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (25)$$

$$-\sum_{i=1}^I \rho_{jk}^{(i)}\lambda_k^{(i)} + \sum_{i=1}^I \sum_{t=k+1}^T \eta_{jkt}^{(i)}\lambda_t^{(i)} + \bar{\eta}_{jkT}\omega \leq 0, \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, T-1) \quad (26)$$

$$\lambda_T^{(i)} \leq \frac{1}{I}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (27)$$

$$\lambda_0 \geq 0$$

$$\lambda_t^{(i)} \geq 0, \quad (t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I)$$

$$\omega \geq 0$$

それぞれの双対変数は以下ようになる。

$$(25) \text{ 式} : z_{j0} , (j = 1, \dots, n)$$

$$(26) \text{ 式} : z_{jk} , (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, T - 1)$$

$$(27) \text{ 式} : q^{(i)} , (i = 1, \dots, I)$$

ところで、1次の下方部分積率のような2本の区分直線(図3右図参照)を組み合わせた区分線形リスク尺度の場合には、問題を双対問題に書き換えることによって、決定変数の有界制約式が増加し、実質的に計算時間に影響を与える制約式の本数が激減させることができる。

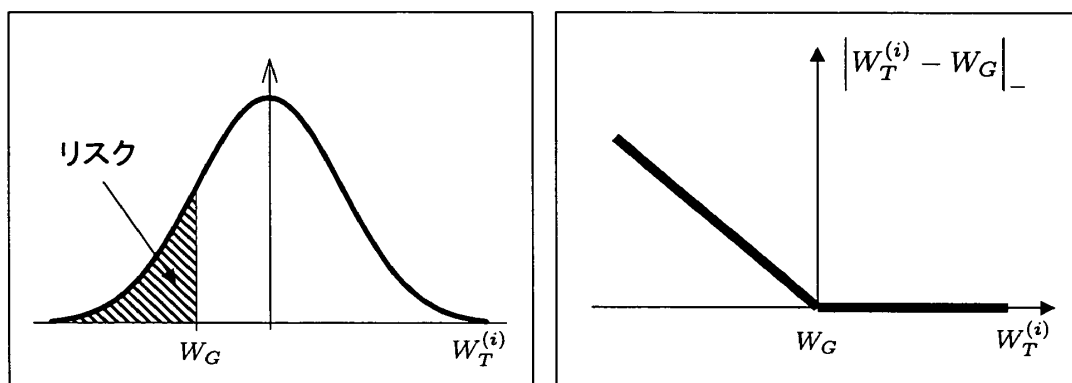


図 3: 1次の下方部分積率

(1次下方部分積率以外の) 代表的なこのタイプのリスク尺度およびそのリスク関数を示す。

- CVaR (Conditional Value at Risk : 条件付バリュー・アット・リスク)

CVaR は富がある確率水準(パーセント点)  $V_\beta$  を下回るときの期待富のことである。富が確率  $\beta$  (ex.  $\beta = 0.95$ ) で  $V_\beta$  を下回らないときの(最大の)  $V_\beta$  の値を  $\beta$ -VaR (確率水準  $\beta$  のもとでのバリュー・アット・リスク) とすると、 $\beta$ -CVaR ( $W_\beta$ : 確率水準  $\beta$  のもとでの条件付バリュー・アット・リスク) は富がその  $V_\beta$  を下回る場合の富の期待値を表す。

$$W_\beta \equiv V_\beta - \frac{1}{1-\beta} E \left[ \left| \tilde{W}_T - V_\beta \right|_- \right] = V_\beta - \frac{1}{(1-\beta)I} \sum_{i=1}^I \left| W_T^{(i)} - V_\beta \right|_- \quad (28)$$

- 絶対偏差

$$AD \equiv E \left[ \left| \tilde{W}_T - \bar{W}_T \right| \right] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left| W_T^{(i)} - \bar{W}_T \right| \quad (29)$$

計算時間は用いる計算(実装)アルゴリズムによって異なるため、すべてのソフトウェアについて言えるわけではないが、下記のような決定変数に対する有界制約条件を明示的に記述する線形計画問題の表記法に基づいて実装を行っているのであれば、計算時間の短縮を期待で

きる<sup>4</sup>.

$$\text{Minimize } c^T x \quad (30)$$

$$\text{subject to } \underline{b} \leq Ax \leq \bar{b} \quad (31)$$

$$l \leq x \leq u \quad (32)$$

ここで、 $x$  は決定変数、 $c$  は目的関数の係数ベクトル、 $A$  は制約式の係数行列、 $\underline{b}$ ,  $\bar{b}$  は制約式の下限ベクトルおよび上限ベクトルである。下限と上限が同じ場合には等式となる。また、 $l$ ,  $u$  は決定変数の下限ベクトルおよび上限ベクトルを表す。

双対コンパクト表現の決定変数の数は  $TI + 2$  個、制約式の数は  $nT + I$  本となるが、実質的に計算時間に大きく影響を与える制約式の本数は、 $nT$  本(危険資産数 × 期間数)になる。

#### 2.4. 問題のサイズ

各定式化に対する決定変数の数と非負制約を除く制約式の本数を表2に示す。また、非零要素数および非零要素比率の近似式を表3に示す。コンパクト表現における非零要素数は、主コンパクト表現、双対コンパクト表現ともに同じであるが、双対コンパクト表現については上限制約式を除く場合についても記す。また、各定式化の非零要素比率は、非零要素数を全要素数(決定変数の数 × 非負制約を除く制約式の本数)で割ることによって求められる。ここでは、シミュレーション経路数に依存するが、 $n, T \ll I$  であることを利用して、シミュレーション経路に依存しない近似式を示す。

表 2: 問題のサイズ(決定変数の数と非負制約を除く制約式の本数)

定式化の方法	決定変数	制約式
従来の定式化	$(n + I)T + 1$	$TI + 2$
主コンパクト表現	$nT + I$	$TI + 2$
双対コンパクト表現	$TI + 2$	$nT + I$
(上限制約式を除く)		$(nT)$

主コンパクト表現は従来の定式化に比べて、決定変数は  $(T - 1)I + 1$  個減少するが、非零要素数は、(33)式に示す分だけ増加する。

$$Z_p - Z_o = \left\{ \frac{1}{2}n(T - 1) - 2 \right\} TI + n(T - 1) - 1 \quad (33)$$

非零要素数の増加倍率  $\frac{Z_p}{Z_o}$ ,  $\frac{Z_d}{Z_o}$  の近似式および非零要素比率の増加倍率(近似式)  $\frac{D_p}{D_o}$  をそれぞれ、(34), (35)式に示す。

$$\frac{Z_p}{Z_o} \approx \frac{nT^2 + 3nT - 2n + 2}{4nT + 4T - 2n + 2}, \quad \frac{Z_d}{Z_o} \approx \frac{Z_p}{Z_o} - \frac{1}{2nT + 2T - n + 1} \quad (34)$$

$$\frac{D_p}{D_o} = \frac{nT(T^2 + 3T - 2)}{4nT + 4T - 2n + 2} \quad (35)$$

<sup>4</sup>計算処理速度上有利であるため、一般的な汎用数理計画ソフトウェアはこれらの表記法に基づき実装を行っている。

表 3: 非零要素数および非零要素比率の近似式

定式化の方法	非零要素数	非零要素比率の近似式
従来の定式化	$Z_o = \{2nT + 2T - n + 1\} I + 2n + 1$	$D_o = \frac{2nT+2T-n+1}{IT^2}$
主コンパクト表現	$Z_p = \left\{ \left( \frac{T^2}{2} + \frac{3T}{2} - 1 \right) n + 1 \right\} I + n(T + 1)$	$D_p = \frac{n}{I} \left( \frac{T}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{T} \right)$
双対コンパクト表現 (上限制約式を除く)	$Z_d = \left\{ \left( \frac{T^2}{2} + \frac{3T}{2} - 1 \right) I + (T + 1) \right\} n$ $= Z_p - I$	$D_d = \frac{1}{2} + \frac{3}{2T} - \frac{1}{T^2}$ $= \frac{I}{nT} D_p$

コンパクト表現の非零要素数と非零要素比率は、主に  $n$  と  $T$  に依存して増加することが分かる。

### 2.5. いくつかのモデルに対するコンパクト表現の適用

シミュレーション型モデルにも、通常のポートフォリオ最適化モデルや多期間モデルと同様に、資産の組み入れ比率に対する上下限制約式や売買回転率に対する上限制約式などの追加的な制約条件を設定することができる。また、リスク尺度に CVaR を用いたモデルや売買コストを考慮したモデルなど、様々なバリエーションが考えられる。このようなモデルに対してもコンパクト表現は簡単に適用可能である。その他の応用を以下に簡単に述べる。

#### (1) ALM に対するモデル

ALM に対する一般的なモデルでは、コール・マネーによる資金調達が可能で、コール・ローンとコール・マネーの金利が異なる。この一般的なタイプのモデルに対してはコンパクト表現ができない。しかし、コール・ローンとコール・マネーの金利を同じに設定すれば(現金の運用金利と調達金利を同じに設定すれば)、主コンパクト表現、双対コンパクト表現がともに適用可能である。

#### (2) シミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル

枇々木 [4] は、シナリオ・ツリー型モデルの「投資の意思決定」の適切さとシミュレーション型モデルの「不確実性の記述」の精細さを組み合わせたシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデルを開発している。混合型モデルもシミュレーション型モデルと同様に、現金の決定変数はシミュレーション経路に依存する。したがって、同様の考え方をを用いて、定式化をコンパクト表現することができる。

## 3. 数値実験

数値実験を用いて、2節で示した従来の定式化と主コンパクト表現および双対コンパクト表現の3種類の定式化に対する計算時間を比較する。

### 3.1. 設定条件

計算時間は、期間数 ( $T$ )、危険資産数 ( $n$ )、経路数 ( $I$ ) の違いによる問題の規模だけでなく、ソフトウェア(実装方法)の違い、解法アルゴリズム(内点法、単体法)の違い、最適化パラメータ(スケールリングの有無、最適性条件の残差の設定値など)や問題の中で設定する制

約値 ( $W_E$  など) の違いによっても異なる。本数値実験では、以下の組み合わせについて計算時間を調べる。計算時間の単位はすべて秒単位である。

- 期間数：3種類 (3期間, 4期間, 5期間)
- 経路数：10種類 (1,000 ~ 10,000 ; 1,000本刻み)
- 対象資産数：1種類 (株式, 債券, CB, 現金)
- 解法アルゴリズム：2種類 (内点法, 単体法)
- 要求期待富の水準：6種類

数値実験に関する他の設定は以下の通りである。

- ソフトウェア：NUOPT バージョン 4.5.6<sup>5</sup>
- 計算機環境：Windows 2000, Pentium 1,500 MHz, メモリ 512MB
- 内点法 (higher), 単体法 (simplex) に関する NUOPT のパラメータ：デフォルト値

### 3.2. 結果と考察

図の中で簡略して用いられている凡例の意味をはじめに記す。混乱を避けるため、計算結果の比較をするときに、凡例の表記を用いて説明する場合もある。

凡例	説明
従来表現, 従来	従来の定式化を用いた結果.
主表現, 主	主コンパクト表現を用いた結果.
双対表現, 双対	双対コンパクト表現を用いた結果.

本文に示した結果の図4, 図7, 図8はすべて同じ形式である。各図ともに4枚のグラフから構成されているが、上の2枚は要求期待富に対して設定した6種類の制約値に対する計算時間の算術平均値を示す。下の2枚は従来表現の主表現と双対表現に対する6種類の計算時間の幾何平均倍率<sup>6</sup>を示す。また、左側の2枚は内点法、右側の2枚は単体法に対する計算結果である。

#### (1) 結果: その1 (3期間の場合)

3期間問題に対する結果を図4に示す。内点法においては、経路数が少ない場合には、計算時間が少ないため、それほど効果は表れないが、経路数が増加するにつれて、徐々に計算時間の差は広がる。計算倍率も同様に増加し、主コンパクト表現は最大約2倍、双対コンパクト表現は最大で約2.7倍高速化される。一方、単体法では主コンパクト表現、双対コンパクト表現ともに従来の定式化よりも劇的に高速化されている。「従来/主」は最大で約37倍、特に、「従来/双対」は最大約130倍高速化される。

<sup>5</sup>NUOPT Ver.3.1 と Ver.4.0 でも同様の数値実験を行っているが、紙面の都合上結果は省略する。詳しくは、枇々木 [5] を参照されたい。Ver.4.5.6 を含めて3種類のバージョンの実装方法は異なるため、計算時間も異なるが、いずれにおいてもコンパクト表現の有効性を確かめている。

<sup>6</sup>算術平均値の倍率をとると、計算時間は要求期待富の水準によって異なるため、多くの計算時間を要する要求期待富の場合に影響を受けやすい。それぞれの水準における計算倍率を平均的に示すために、倍率に関しては幾何平均を用いている。

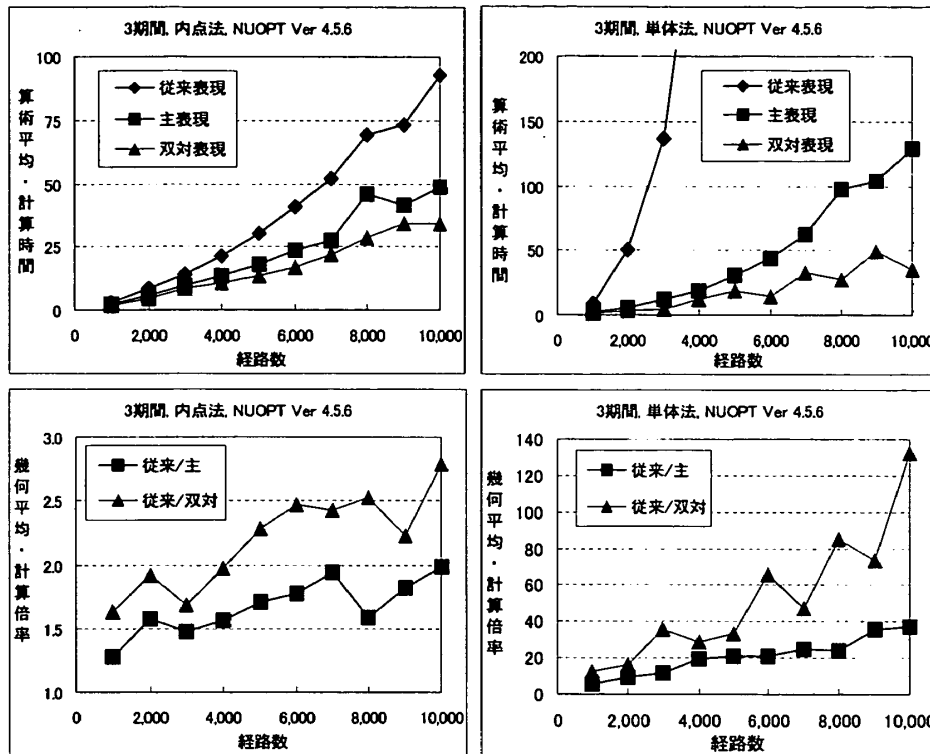


図 4: 計算時間の比較 (3 期間)

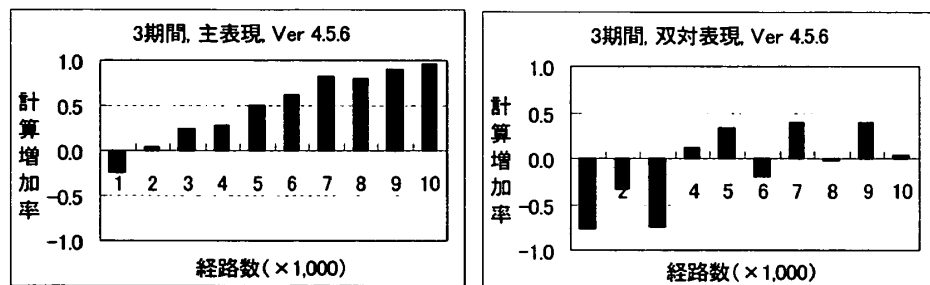


図 5: 内点法と単体法の比較 (3 期間)

内点法による計算時間と単体法による計算時間を比べるために、図5を見てみよう。図5は、単体法での計算時間を内点法での計算時間で割って自然対数を取ったもの(計算増加率と呼ぶ)である<sup>7</sup>。値が0よりも大きければ(小さければ)、内点法が有利(不利)で、単体法が不利(有利)である。図5の結果を見ると、主コンパクト表現は内点法の方が計算時間は速い。一方、双対コンパクト表現は経路数が少ないと単体法が有利、多くなると内点法が有利となる。

<sup>7</sup>対数をとることによって、その絶対値の値はどちらを基準で取っても同じ値になるので、0を境にして優劣を比較しやすくなる。ただし、計算増加率は対数の値なので、他のものと比べて何倍速いか(遅いか)の実際の値は指数を取る必要がある。

単体法の反復回数は最適解に到達するまでに生成される実行可能多面体の頂点の個数に一致し、計算効率もそれに比例するが、経験的に、実行可能多面体を記述する制約式の数倍程度と言われている。単体法は多項式オーダーの解法ではないため、経路数が増加すると、従来の定式化は決定変数、制約式ともに増加し、問題のサイズが大きくなり、経路数の増加とともに計算時間が急速に増加している様子が分かる。主コンパクト表現は制約式の本数は減っていないが、決定変数の数が激減し、問題のサイズの縮小により計算時間が減少すると考えられる。さらに、双対コンパクト表現は、計算時間に影響を与える制約式の本数が「危険資産数 × 期間数」となり、単体法の計算効率上、極めて有利な定式化になっていることが分かる。

内点法は実行可能多面体の内部を通して最適解に近づくことで、単体法が抱える実行可能多面体の境界の組み合わせの複雑さを回避し、問題を高速に解く方法である。それに対し、単体法には内点法にはない特徴があり、それは、一度基底解が得られれば、問題に対して小さな変更を行った際の解を比較的高速に求めることができることである。例えば、効率的フロンティアを描くという作業は、まさに似たような問題を複数回解く必要があり、単体法にとって有利である。

## (2) 結果: その2 (4期間と5期間の場合)

次に、4期間と5期間の結果を図7と図8に示す。3期間とほぼ同様の結果が出ているが、計算倍率は3期間のときに比べて下がっている。非零要素比率の増加倍率を計算すると、 $T=3$ では1.14であるのに対し、 $T=5$ では1.53となるので、それがコンパクト表現における計算時間へ影響を与えている可能性がある。定式化の違いによる計算時間の関係は、ほぼ似ているが、解法(内点法と単体法)の違いによる関係が多少変化している。計画期間を5期間に設定した場合の比較を図6に表す。図の見方は図5と同じである。

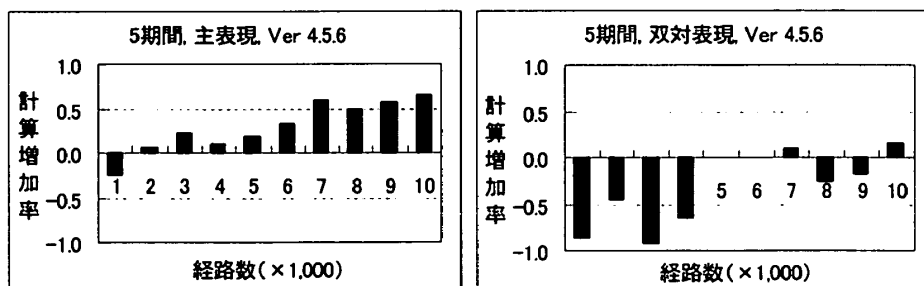


図 6: 内点法と単体法の比較 (5 期間)

主コンパクト表現では、内点法が有利な定式化となっているが、双対コンパクト表現では、単体法の方が有利な傾向にある。問題の係数行列が従来の定式化に比べて密になることによって、単体法にとって有利な定式化になり、大規模な問題でも内点法とほぼ匹敵するほど高速に問題を解くことができる。多少の差であるため、一概には優劣をつけられないが、コンパクト表現が単体法にとって有利な定式化になっていることがこれらのことから分かる。

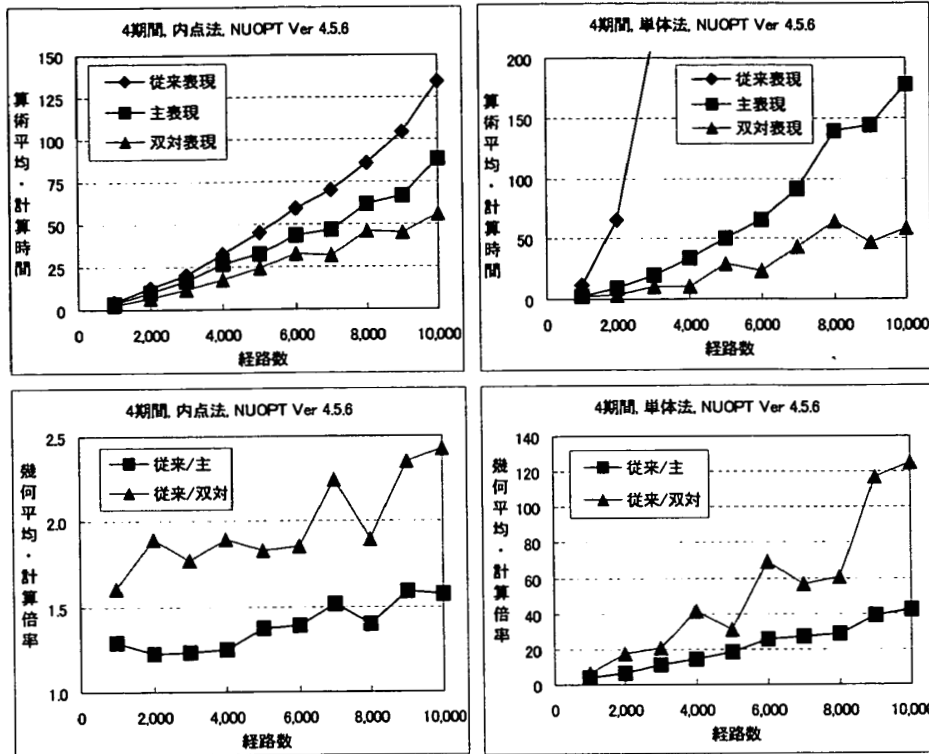


図 7: 計算時間の比較 (4 期間)

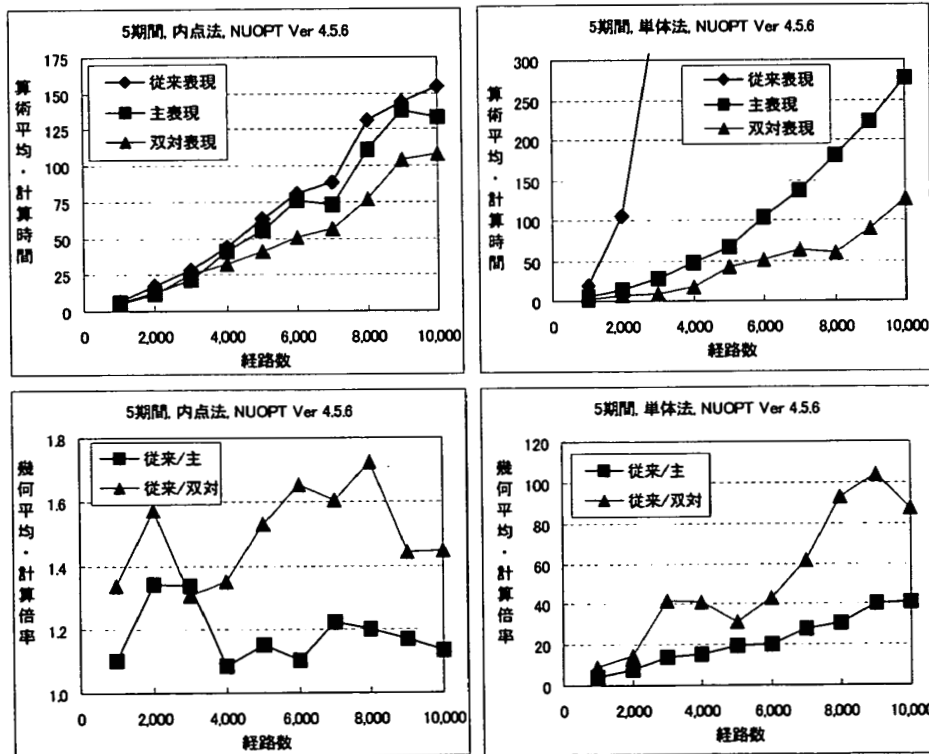


図 8: 計算時間の比較 (5 期間)



### (3) 結果: その3 (バージョンの違いによる比較)

内点法の実装方法は計算時間に大きな影響を与える。そこで、NUOPTのVer.4.0とVer.4.5.6による違いを見てみよう。図9は、NUOPT Ver.4.5.6がNUOPT Ver.4.0に比べて何倍高速になったのかを表す<sup>8</sup>。

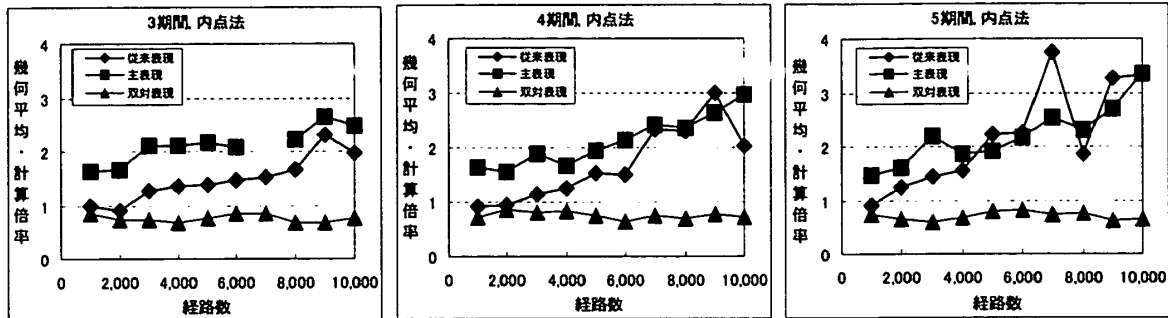


図9: バージョンによる計算時間の比較(内点法)

明らかに、Ver.4.5.6はVer.4.0に比べて、従来表現と主表現において有利な変更がなされ、双対表現において不利な変更がされている。例えば、5期間で経路数10,000本の問題では従来表現が3.3倍高速化されたのに対し、双対表現では0.66倍と遅くなっている。相対的に見ると、約5倍計算時間の差が縮まったことになる。

## 4. 結論と今後の課題

シミュレーション型モデルは、不確実性の記述の柔軟さと詳細さを重視するために、投資の意思決定を簡便にした(せざるを得ない)モデルである。しかし、従来の定式化では計算時間を短縮させることに、このことをうまく反映させることができていなかった。本研究では、「危険資産に対する決定変数がシミュレーション経路に依存しない」という取引戦略の特徴をうまく反映させたコンパクト表現による定式化の方法を提案した。

従来の定式化と主コンパクト表現および双対コンパクト表現の3種類の定式化に対する計算時間を比較するために様々な数値実験を行った。特に単体法では、コンパクト表現は有利な定式化の方法であり、特に双対コンパクト表現は最大で従来の定式化の130倍近く高速化されることが分かった。主コンパクト表現も最大で37倍近く高速化される。また、解法(内点法と単体法)の違いにかかわらずに、シミュレーション経路数が多くなっても(大規模な問題になっても)、問題の構造上、ほぼ同じような計算時間で解くことができることも、コンパクト表現の特徴の一つであろう。

双対コンパクト表現では、リスク尺度が線形関数である必要がある。特に、1次の下方部分積率や条件付バリュー・アット・リスクのような2本の区分直線を組み合わせた区分線形リスク尺度の場合に、極めて計算上有利になる。これらは計画最終時点での富の分布に仮定を持たない多期間確率計画モデルにおいて、一般的に使われる下方リスク尺度であり、双対コンパクト表現が有用であることを示している。また、リスク尺度に、2次の下方部分積率

<sup>8</sup>3期間で経路数7,000本の問題では、Ver.4.0において、最適解が得られなかったケースが存在したため、結果を載せていない。また、図9は実験の都合上、3種類の要求期待富の水準のみを用いた計算結果である。

や非線形関数を使う場合には、主コンパクト表現を用いることによって、計算上有利になると期待できる。

2節および3節で示したモデルは1次の下方部分積率をリスク尺度として用いた基本的なモデルであるが、この考え方はその応用モデルにもすぐに適用可能である。様々なモデルへの適用についても検討し、具体的な定式化を行ったが、本論文では紙面の都合上、具体的な定式化については省略した。そのうちの一つのモデルであるシミュレーション/ツリー混合型モデル[4]の数値実験結果を図10に示す。拡張決定ツリーの分岐数が異なる4種類のケースについて、双対コンパクト表現を用いて比較した。計算倍率は従来表現の計算時間をを双対表現の計算時間で割った値を表す。

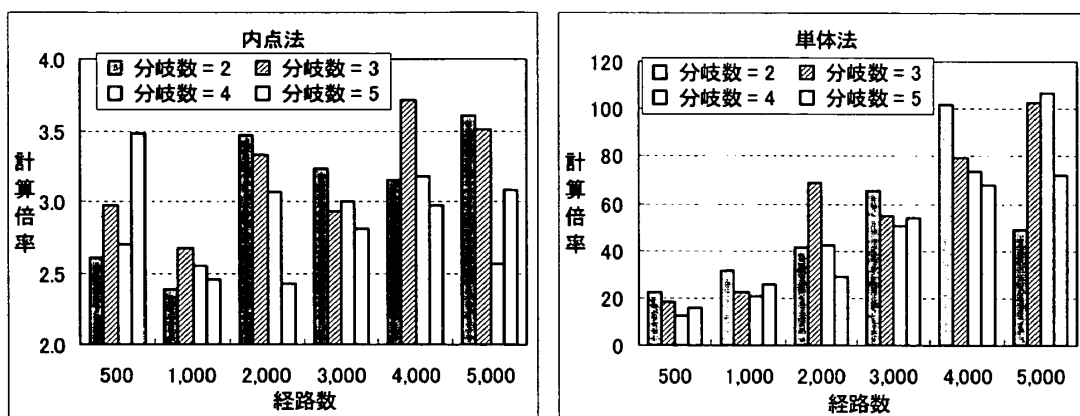


図 10: 混合型モデルにおける双対コンパクト表現の効果

シミュレーション型モデルと同様に高速化され、内点法では最大約3.7倍、単体法では最大約100倍速く問題を解くことができる。このように、各モデルに対しても同様の結果が期待できるが、今後確かめなければならない課題である。

最後に、本論文で取り扱っているシミュレーション型モデルにおいて今後解決すべき問題点について言及する<sup>9</sup>。第一に、1節における図1や図2で簡単に説明したが、サンプリング・エラーについてさらなる検討が必要である。本数値実験で示した3期間、4資産の問題でも12次元の乱数系列が必要であり、要求される最適解の精度によっては、10,000本の経路数では不十分となる。この問題点をより詳細に調べるためには膨大な経路数で実験する必要があるが、メモリや計算時間の問題など、パソコンでは難しいため、現在の著者の計算機環境では難しい面もある。しかし、シナリオの生成法(資産収益率の分布の想定)も含めて、できる限り、サンプリング・エラーの検証を行い、他のモデル(シナリオ・ツリー型モデルや1期間モデルなど)に対する優位性についての検討を行う必要がある。第二に、シミュレーション型モデルでは非予想条件を保つために、危険資産の投資量(もしくは投資額)を一定にするという投資決定ルールを用いている。このことは資産収益率の自己相関によって影響を受ける可能性がある。この問題点を解決するために、この影響の大きさに関する検討と非予想条件を保ちながら投資量を可変にする投資決定ルールを現在研究しているところ

<sup>9</sup>これらの研究成果の一部は、枇々木[9]にまとめられているので、参照されたい。

ろである。第三に、1期間モデルとの比較実験をすることにより、シミュレーション型モデルの多期間モデルとしての優位性を明示する必要がある。多期間モデルは1期間モデルに比べて、モデルの自由度が高いので、(前提条件が同じであれば、)モデル上では1期間モデルより優位である。ただし、多期間モデルは、多期間にわたる不確実性の記述の精度や、それに伴う最適解の安定性、大規模問題になることによる計算時間の増加など、1期間モデルと比べる際には、これらのトレードオフを考慮する必要がある。このように、現実的には一概に判断できないため、様々なケースについて数値実験を通して検討する必要がある。本研究で提案したコンパクト表現は、計算時間(コスト)を削減することができ、その意味において、シミュレーション型多期間モデルをより実用に近づけることができるとともに、そのために必要な検証作業も可能にし、より多くの実験を行うことができると期待できる。

### 参考文献

- [1] V.S. Bawa and E.B. Lindenberg: Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework. *Journal of Financial Economics*, 5 (1977) 189–200.
- [2] W.V. Harlow: Asset allocation in a downside-risk framework. *Financial Analysis Journal*, (September-October 1991) 28–40.
- [3] 枇々木規雄: 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル. *Journal of Operations Research Society of Japan*, 44-2(2001) 169–193.
- [4] 枇々木規雄: 最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル. 高橋一編, ジャフイー・ジャーナル[2001] 金融工学の新展開 (東洋経済新報社, 2001) 89–119.
- [5] 枇々木規雄: コンパクト表現によるシミュレーション型多期間確率計画モデルの定式化. 日本金融・証券計量・工学学会 2001年夏季大会予稿集, 367–386.
- [6] 枇々木規雄, 田辺 隆人: 多期間ポートフォリオ最適化問題におけるモデリング技術と実装(計算)技術の重要性. 慶應義塾大学理工学部管理工学科テクニカルレポート, No.01-002(2001).
- [7] 枇々木規雄: 金融工学と最適化 (朝倉書店, 2001).
- [8] 枇々木規雄: 双対問題表現によるポートフォリオ最適化モデル. *オペレーションズ・リサーチ*, 47-4(2002) 53–59.
- [9] 枇々木規雄: シミュレーション型多期間確率計画モデルに対する数値実験による考察. 日本金融・証券計量・工学学会 2002年夏季大会予稿集, 81–100.
- [10] 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博: 内点法 (朝倉書店, 2001).
- [11] 今野浩: 線形計画法 (日科技連, 1987).
- [12] I. Maros and C. Mészáros: The role of the augmented system in interior point methods. *European Journal of Operational Research*, 107(1998) 720–736.
- [13] J.M. Mulvey and W.T. Ziemba: Asset and liability allocation in a global environment. R.A. Jarrow, V. Maksimovic, W.T. Ziemba (eds.): *Handbooks in Operations Research*

- and Management Science, 9: Finance*, Chapter 15 (North-Holland, 1995).  
(枇々木規雄 訳: グローバル環境における資産負債配分. 今野浩, 古川浩一編著: ファイナンスハンドブック, 第15章 (朝倉書店, 1997).
- [14] J.M. Mulvey and W.T. Ziemba: Asset and liability management systems for long-term investors: discussion of the issues. W.T. Ziemba and J.M. Mulvey (eds.): *Worldwide asset and liability modeling*, chapter 1, (Cambridge University Press, 1998).
- [15] R.T. Rockafellar and S. Uryasev: Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2-3(2000) 1–21.
- [16] 反町洋一 編: 線形計画法の実際 (産業図書, 1992).
- [17] (株)数理システム: NUOPT マニュアル (2000).
- [18] (株)数理システム: SIMPLE マニュアル (2000).

枇々木 規雄

〒223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

E-mail : hibiki@ae.keio.ac.jp

## ABSTRACT

COMPACT REPRESENTATIONS OF MULTI-PERIOD STOCHASTIC  
PROGRAM USING SIMULATED PATH MODEL

Norio Hibiki  
*Keio University*

Simulated path model was proposed by Hibiki(2001) in order to solve a multi-period optimization problem. We can use sample paths associated with asset returns using Monte Carlo simulation, and get a better accuracy of uncertainties. To meet non-anticipativity conditions, we cannot make conditional decision as in the scenario tree model, and therefore we must decide an optimal portfolio with a fixed-unit strategy. The original formulation of simulated path model does not use the decision rule with the fixed-unit strategy effectively. Though decision variables of risky asset depend on only the number of periods, respectively, the number of the decision variables of cash must depend on the set of paths and periods, and then leads to large-scale problems.

In this paper, we propose a more compact formulation than the previous formulation by eliminating the decision variables of cash. This does not mean that cash is excluded from the asset allocation decision. We expect that computation time decreases by reducing the problem size. We call this formulation compact representation, and show two kinds of formulations. We examine several numerical examples in order to compare computation time of the compact form with that of original form.