Journal of the Operations Research
Society of Japan
Vol. 45, No. 4, December 2002

バリュー・アット・リスクと期待ショートフォールの比較分析

山井康浩　吉羽要直
日本銀行

(受理 2001 年 9 月 20 日; 再受理 2002 年 2 月 25 日)

和文概要　本論文では，実務的なインプリケーションを引き出すことを念頭において，VaR と期待ショートフォールの持つ性質を比較した筆者の 3 つのペーパーの内容を整理して紹介する．ここでは，リスク指標が満たしていることが望ましいとされている性質として，(1) テイル・リスクの排除，(2) 期待効用最大化原理との整合性，(3) 劣加法性（凸性），(4) 推計値の安定性，の 4 つを挙げ，VaR と期待ショートフォールがこれらの性質を満たしているかどうかによって比較分析を行うこととする．その結果，(1)～(3) では期待ショートフォールの方がよい性質を持つ一方，(4) では VaR の方がよい性質を持つ場合があることを示す．

1. はじめに

ファイナンスおよび経済学の理論では，不確実性下の意思決定を分析する際，投資家はリスク回避的な効用関数を持ち，この効用の期待値を最大化するように行動すると仮定するのが一般的である（「期待効用最大化原理」）．しかし，個々の投資家の効用関数を特定することは困難であるため，期待効用最大化原理を実務に応用するのは難しい．

これに対し，Markowitz [15] は，不確実性下の意思決定をリターン（収益の期待値）とリスク（収益の分散あるいは標準偏差）のトレード・オフによって捉えるという「平均・分散アプローチ」の考え方を提唱した．このアプローチは，(1) 個々の投資家の効用関数を特定する必要がないこと，(2) 収益が正規分布に従う場合，期待効用最大化原理と整合的な意思決定が行えること，(3) 分散という比較的計算の容易な指標に基づいていること，などから実務・理論面とも飛躍的な発展を遂げた．また，これを機にポートフォリオの収益の不確実性に関する情報を収益の分布からリスク指標として抽出し，このリスク（リスク指標）とリターン（期待収益）とのトレード・オフによってポートフォリオ選択を行うという考え方も広がった．

その後，分散あるいは標準偏差が，理論上あるいは実務上で持つ問題点が指摘され，分散に代わるリスク指標として様々なものが提唱されてきた．こうしたリスク指標としては，バリュー・アット・リスク（以下，VaR），期待ショートフォールなどが挙げられる[1]．

これらのリスク指標の中で，特に 1990 年代以降，金融機関のリスク管理で最も標準的に利用されているのが VaR である．VaR が金融機関に普及した最大の理由としては，ポートフォリオのリスクをカバーするための「所要自己資本」の算出根拠を与えるという他のリスク指標にはない特徴を持っている点が挙げられる．つまり，「信頼水準 $100(1-\alpha)\%$の VaR を予め与えられた自己資本の範囲内に収める」ことをメルクマールとすることは，「損失額

[1]このほか，期待効用最大化原理との整合性の見地から研究が進められたリスク指標として，safety first rule ([17])，絶対偏差（[13]），下半標準偏差，下方部分モーメント（[11]）などが挙げられる．

が自己資本を上回り自社が倒産する確率を $100\alpha\%$以内に抑える」ことに等しいため，VaR は金融機関が抱えるリスク量の限度を与えると考えていることになる[2].

しかし，このように実務で最も標準的なリスク指標となっている VaR に対し，学界からは Artzner, Delbaen, Eber, and Heath （以下，ADEH）[4, 5] を始めとしてその妥当性を問う声が挙がってきている．彼らは，VaR にはリスク指標としての理論上の問題点（信頼区間外のリスクを捉えられず，損益額分布の形状によっては劣加法性を満たさないなど）があり，VaR をリスク管理に用いるのは不適切な場合があるとの指摘を行っている．

ADEH [4, 5] は，VaR が抱えるこれらの問題点を内包しないリスク指標として，期待ショートフォールを提唱した[3]．期待ショートフォールとは，損失額が VaR 以上となることを条件とした損失額の条件付期待値である．期待ショートフォールは信頼区間外の損失も織り込んでおり，理論的に必ず劣加法性を満たす．そのため，期待ショートフォールは，VaR を代替ないし補完する可能性があるリスク指標として学界・実務界の関心を呼び，積極的な議論が行なわれている．

山井・吉羽 [19, 20, 21] では，こうした VaR と期待ショートフォールに関する議論の整理を通じて，これらのリスク指標の比較分析を行った．本論文では，[19, 20, 21] の内容をさらに整理し，実務的なインプリケーションを引き出すことを念頭において，VaR と期待ショートフォールとの比較分析に関するサーベイを行う．

本論文では，[19, 20, 21] に従って，リスク指標が満たしていることが望ましいとされている性質のうち，(1) テイル・リスクの排除，(2) 期待効用最大化原理との整合性，(3) 劣加法性（凸性），(4) 推計値の安定性，の 4 つを挙げ，VaR と期待ショートフォールがこれらの性質を満たしているかどうかによって比較分析を行うこととする．

2. VaR と期待ショートフォールの定義

まず，分析の対象となるリスク指標である VaR と期待ショートフォールの定義と簡単な解説を行う．

ここでは，投資家は期初（$t = 0$）にポートフォリオ構成を決定し，期末（$t = T$）までポートフォリオ構成を変えないものとする．つまり，静的な 1 期間モデルを前提として説明を行う．期末までポートフォリオを保有した結果，期末のポートフォリオ価値が決まり，その結果この投資に伴う損益額（= 期末の価値 − 期初の価値）が決定する．この損益額は，期初では未定であるが，期末に判明する事象によって値が確定することから，ポートフォリオの損益額は（期初では）確率変数と考えることができる．ここでは，損益額を表す確率変数を X とする．

信頼水準 $100(1-\alpha)\%$の VaR は以下のように定義される[4].

定義 1 (VaR) *VaR* は損益額分布の下側分位点として，以下のように定義される．

$$VaR_{\alpha}(X) = -\inf\{x | P[X \leq x] > \alpha\}. \tag{1}$$

ここで，損失額は通常は負値（利益額は正値）であることから，損失が発生する際の VaR を正値にするために分位点に -1 を乗じている．

[2]ただし，このように VaR を自己資本算出の根拠とすることが経済学的にみて本当に妥当かどうかは議論の余地がある．詳細は Froot and Stein [12] を参照.

[3]ADEH [4, 5] では Tail Conditional Expectation と呼ばれている．

[4]この VaR の定義は ADEH [5] に従った．

信頼水準 $100(1-\alpha)$%の VaR は,「ポートフォリオから $100(1-\alpha)$% の確率で投資期間中($t=0$ から $t=T$ までの間)に発生し得る最大損失額」として解釈することができる. これはまた,「最悪時の 100α%の事象を除いた場合の最大損失額」として捉えることもできる.

一方, 信頼水準 $100(1-\alpha)$%の期待ショートフォールは以下のように定義される.

定義 2 (期待ショートフォール) 期待ショートフォールは損失額が VaR 以上になる条件下での損失額の期待値であり, 以下のように定義される.

$$ES_\alpha(X) = E[-X \mid -X \geq VaR_\alpha(X)]. \tag{2}$$

信頼水準 $100(1-\alpha)$%の期待ショートフォールは,「ポートフォリオから発生する損失額が VaR 以上となる場合, 平均してどの程度の損失を被るか」を表していると解釈できる.

リスク管理で多用される正規分布の仮定の下では, 期待ショートフォールは損益額の標準偏差の定数倍となる. これは, 正規分布の下での期待ショートフォールを計算することで以下のように示すことができる. ここで, 正規分布の下では VaR が標準偏差の定数倍($VaR_\alpha(X) = q_\alpha \sigma_X$, ただし q_α は標準正規分布の上側 100α%分位点)となることを利用している.

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= E[-X \mid -X \geq VaR_\alpha(X)] \\ &= \frac{1}{\alpha\sigma_X\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-VaR_\alpha(X)} t e^{-\frac{t^2}{2\sigma_X^2}} dt = \frac{\sigma_X}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{VaR_\alpha(X)^2}{2\sigma_X^2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{q_\alpha^2}{2}}}{\alpha\sqrt{2\pi}} \sigma_X. \end{aligned} \tag{3}$$

したがって, 損益額分布が正規分布である場合は VaR も標準偏差の定数倍であるため, 期待ショートフォールと VaR は同等なリスク指標となり, これらは同じ性質を持つ. そこで, 期待ショートフォールと VaR の比較を行う前提として, 損益額分布が正規分布に従わず, いわゆるシミュレーション法によってリスク量を算出する必要がある場合を念頭において議論を進めることとする.

3. VaR と期待ショートフォールの比較分析

本節では, 前節で定義した VaR と期待ショートフォールが, (1) テイル・リスクを排除できるか, (2) 期待効用最大化原理と整合的か, (3) 劣加法性(凸性)を満たすか, (4) 推計値は安定的か, について比較分析する.

ここでは, それぞれの性質の定義と説明を行い, VaR と期待ショートフォールがこれらの性質を満たすかどうかを例を交えながら解説する.

3.1. テイル・リスクの排除

3.1.1. テイル・リスクとは

定義から明らかなように, VaR は分布の分位点のみを測るため, VaR を超える大幅な損失を考慮に入れていない. したがって, VaR は分布の裾に関する重要な情報を見落とす可能性がある. BIS グローバル金融システム委員会 [7] は, このようにリスク指標が分布の裾を考慮できないリスクを「テイル・リスク」と呼び, リスク指標が持つ一般的な問題点として取り上げた. さらに, 山井・吉羽 [21] は,「リスク指標が, 損益額分布の裾(テイル)部

表 1: VaR でのテイル・リスク事例

ポートフォリオ A	
損益額	確率
80	98.0%
−20	0.9%
−30	0.2%
−100	0.9%

分の損失に関する情報を完全には把握できていないことに伴い，リスクの大小関係を見誤る惧れがある」ことをテイル・リスクとして定義し，分布の裾に関する情報，テイル・リスク，およびリスク指標の関係を検討した．[21] では，確率優越の概念を用いてテイル・リスクを数学的に定義し，VaR と期待ショートフォールがテイル・リスクを排除できるための十分条件を調べた．この結果，以下の結論を得ている．

- VaR にテイル・リスクが存在しないための条件は，損益額が楕円分布に従うこと，または投資対象となるポートフォリオが 1 次確率優越で比較可能であること，である．
- 期待ショートフォールにテイル・リスクが存在しないための条件は，投資対象となるポートフォリオが 2 次確率優越で比較可能であること，である．

これらの条件を比較すると，期待ショートフォールに関する十分条件は，VaR に関する十分条件より緩く，期待ショートフォールは VaR よりも幅広い条件下でテイル・リスクを排除するリスク指標であることがわかる．ただし，投資対象となるポートフォリオが 2 次確率優越で比較不可能な場合は，期待ショートフォールにもテイル・リスクが存在する．

以下では，VaR および期待ショートフォールがテイル・リスクを排除できない簡単な例を示す．

3.1.2. VaR でテイル・リスクが発生する例

VaR がテイル・リスクを排除できない典型的な例として，損益額分布が表 1 で表されるポートフォリオ A を考える．

ポートフォリオ A は，ほとんどのケース (98%) で収益（80）が挙がるが，非常に低い確率で大幅な損失（100）が発生する損益額分布を持っている．前節で述べたとおり，ポートフォリオ A の 99%信頼水準の VaR を算出する際，大幅な損失額（100）は無視され，2 番目に大きい損失に相当する値 30 が VaR となる．ここで，最大の損失 100 が 1,000 に増加したとしても，VaR は不変である．したがって，VaR はごく小さい確率で発生する損失を十分に織り込めないことがわかる．

こうした VaR の問題点は，VaR の定義上当たり前のことに思えるかもしれないが，投資家による合理的な意思決定がテイル・リスクにより歪む可能性を持つという点で重要な意味を持っている．この点は，次節で詳しく述べる．

3.1.3. 期待ショートフォールでテイル・リスクが発生する例

期待ショートフォールは，定義上 VaR 以上の損失額を期待値として織り込んでいるため，VaR に比べてテイル・リスクが発生する可能性は小さい．例えば，Acerbi and Tasche [2] の定義に従って表 1 のポートフォリオ A の 99%信頼水準の期待ショートフォールを算出すると 100 となる．仮に状態 1 の損失額が 1,000 に増加した場合は，期待ショートフォールは 1,000

表 2: 期待ショートフォールでもテイル・リスクを排除できない例

ポートフォリオ A		ポートフォリオ B	
損益額	確率	損益額	確率
2.95	50.000%	0.95	50.000%
−2.05	49.000%	−0.05	49.000%
−47.05	1.000%	−7.05	0.457%
		−77.05	0.543%

表 3: ポートフォリオ A・B の VaR と期待ショートフォール

	ポートフォリオ A	ポートフォリオ B
VaR	47.05	7.05
期待ショートフォール	47.05	45.05

に増加し，損失額分布の裾の変化を織り込んでいることがわかる．

しかし，期待ショートフォールでも完全にテイル・リスクを排除できる訳ではない．投資対象となるポートフォリオが 2 次確率優越で比較不可能な場合は，期待ショートフォールにもテイル・リスクが存在する．

これを簡単な例でみてみよう．表 2 は，ある 2 つのポートフォリオ A と B の損益額分布を示したものである．それぞれの 2 つのポートフォリオの損益の発生は独立であるとする．ポートフォリオ A，B ともほとんどの場合は損失が発生しないが，小さな確率で損失が発生する．特に，ポートフォリオ B はごく僅かな確率で大幅な損失が発生するポートフォリオとなっており，こうした「破滅的」な損失を回避するのが望ましいと考えるならば，ポートフォリオ B の方がリスクが大きいといえる．

ポートフォリオ A，B の 99%信頼水準の VaR と期待ショートフォールを計算すると，表 3 のように VaR，期待ショートフォールの双方でポートフォリオ A のリスクの方が高いと判断されてしまう．これは，VaR と期待ショートフォールが損失額分布の裾の情報を必ずしも十分に捉えていないことを示している．

3.1.4. 代替策：n 次下方部分モーメント

期待ショートフォールのテイル・リスクを問題とするのであれば，さらに裾の情報を十分に捉えるリスク指標が必要となる．こうしたリスク指標の 1 つとして n 次下方部分モーメント（$n \geq 2$）を用いることができる．これは定義 3 で与えられる．

定義 3 (n 次下方部分モーメント) n 次下方部分モーメントは一定の閾値 K を超える損失額の n 次モーメントであり，以下のように定式化できる．

$$LPM_{n,K}(X) = E[\{(K-X)^+\}^n] = \int_{-\infty}^{K} (K-u)^n dF(u). \tag{4}$$

n 次下方部分モーメント（$n \geq 2$）は，損失額の n 乗をとることで，低い確率で生じる大きな損失に対して期待ショートフォールよりも大きなウェイトを与えるリスク指標となっている．

表 4: ポートフォリオA・Bの期待ショートフォールと2次下方部分モーメント

	ポートフォリオA	ポートフォリオB
2次下方部分モーメント	21.75	31.56
期待ショートフォール	47.05	45.05

表4は，表2のポートフォリオAとBについて，期待ショートフォールと2次下方部分モーメント（閾値 $K = -1$）を計算したものである．期待ショートフォールでは，ポートフォリオAのリスクが高いと判断されているのに対し，2次下方部分モーメントでは破滅的な損失の発生する可能性が比較的高いポートフォリオBのリスクが大きいと判断されることがわかる．

一般的に，下方部分モーメントでモーメントの次数を高くすることにより，低い確率で発生する大幅な損失のウェイトが大きくなり，テイル・リスクの発生がより抑えられる．

3.2. 期待効用最大化原理との整合性

3.2.1. 期待効用最大化原理との整合性とは何か

1節でも述べたとおり，ファイナンスおよび経済学の理論では，不確実性下の意思決定を分析する際，合理的な意思決定方法として「期待効用最大化原理」を前提とするのが一般的である．期待効用最大化原理では，投資家はリスク回避的な効用関数を持ち，この効用の期待値を最大化するように行動すると仮定する．

本節では，リスク指標が期待効用最大化原理と整合的な意思決定を導き出すかどうかを検討した山井・吉羽 [21] の結果を簡単に紹介し，具体的にリスク指標が期待効用最大化原理と整合的でない場合にどういった問題が生じ得るかを例によって示すこととする．

[21] では，テイル・リスクについて検討したときと同様に，確率優越の概念を用いて，リスク指標と期待効用最大化原理との整合性を検討している．確率優越の概念を用いると，リスク回避性など効用関数の一般的な性質を利用し，効用関数を特定せずに異なる投資機会に対し選好の順序付けを行える．このことから，Fishburn [11] などの既存研究でも，リスク指標と期待効用最大化原理との整合性を検討する際に，確率優越の概念が用いられてきている．[21] では，VaR と期待ショートフォールが期待効用最大化原理と整合的となるための十分条件として，以下の条件を示している．

- VaR が期待効用最大化原理と整合的となる条件は，損益額が楕円分布に従うこと，または投資対象となるポートフォリオが1次確率優越で比較可能であること，である．
- 期待ショートフォールが期待効用最大化原理と整合的となる条件は，投資対象となるポートフォリオが2次確率優越で比較可能であること，である．

したがって，期待ショートフォールは VaR よりも幅広い条件で期待効用最大化原理と整合的であることがわかる．

3.2.2. VaR の期待効用最大化原理との不整合性

山井・吉羽 [19] は，VaR が一般的に期待効用最大化原理と整合的でなく，テイル・リスクを排除できないために，VaR に依存したリスク管理は合理的な意思決定を歪めてしまうことを示した．ここでは，VaR が期待効用最大化原理と整合的でないために発生する問題の具体例として [19] で取り上げた例を示す．

表 5: VaR がテイル・リスクを持つ例：与信先の集中

	組入れ債券数	クーポン	デフォルト率	回収率
集中化ポート A	1	4.75%	4.00%	10%
集中化ポート B	1	0.75%	0.50%	10%
分散化ポート	100	5.50%	5.00%	10%
安全資産	1	0.25%	0.00%	—

ある投資家が与信ポートフォリオへの投資配分を選択するとする．投資家は，集中化が進んだポートフォリオと分散化が進んだポートフォリオとの間で，リスク指標を一定に抑えつつ期待効用を最大化するようポートフォリオ選択を行う．具体的には，投資総額 100 を表 5 で示される 4 種類の証券に投資するものとする．投資家の効用関数は対数型 $u(W) = \ln W$ と仮定し，信頼水準 95% の VaR や期待ショートフォールを一定という制約を置いて，期待効用を最大化するように 4 種類の証券の配分（ポートフォリオ）を決定する．なお，各証券のデフォルトは互いに独立とする．

表 6 は，(1) リスク指標による制約がない場合，(2)VaR による制約がある場合，(3) 期待ショートフォールによる制約がある場合，の 3 つについて期待効用を最大化する最適ポートフォリオを求めた結果である．リスク指標による制約がない場合とある場合とでポートフォリオ構成がどう変化するかを比較する．VaR による制約をおいた場合をみると，制約がない場合に比べて集中化ポート A への投資が増加（7.4%→ 20.1%）していることがわかる．一方，期待ショートフォールによる制約をおいた場合では，集中化ポート A と B への投資が減少（7.4%→ 4.9%）している．

損益額の累積確率分布の裾を示した図 1 は，VaR による制約をおくと，VaR を超える大規模な損失が発生する可能性が増加するのに対して，期待ショートフォールによる制約をおくと，大規模な損失発生が抑えられることがわかる．

この例は，期待効用を最大化する合理的な投資家に VaR による制約を課すと，投資家に歪んだインセンティブが与えられ，大規模な損失が発生する可能性が増大するようなポートフォリオが組成されることを示している．

このような VaR による歪んだインセンティブは，VaR の期待効用最大化原理との不整合とテイル・リスクの問題から発生している．VaR の期待効用最大化原理との不整合は，VaR で捉えられたポートフォリオの「リスク」と，期待効用最大化原理で捉えられた「リスク」との間の不整合に繋がる．したがって，VaR で表現される「リスク」と期待効用最大化原理で捉えられる「リスク」とは，矛盾してしまう可能性がある．さらに，VaR は一般的に裾に関する情報を十分に織り込んでいないために，分布の裾に関するミスリーディングな情報を投資家に与えてしまう．このため，VaR が減少しても，裾において大幅な損失が発生する可能性が増加する場合が存在する．こうした VaR の 2 つの問題点が重なることにより，VaR は合理的な意思決定を歪めてしまうのである．

このように VaR の導入によって大幅な損失が生じる可能性が増大するのは，小さな確率で大幅な損失が生じるような資産が投資機会として存在する場合に起りやすい（[19] を参照）．こうした特徴を持つポートフォリオとしては，大口与信への集中が進んだ与信ポートフォリオのほか，ファー・アウト・オブ・ザ・マネーのオプション[5]を含むポートフォリオや，

[5]現時点でオプションの権利を行使しても買い手に利益が発生しないオプションをアウト・オブ・ザ・マネー・

表 6: 与信先の集中：最適ポートフォリオ

		制約なし	VaR による制約	期待ショートフォールによる制約
ポート構成	集中化ポート A	7.4%	20.1%	2.9%
	集中化ポート B	0.0%	0.0%	2.0%
	分散化ポート	92.6%	79.9%	95.1%
	安全資産	0.0%	0.0%	0.0%
リスク指標	VaR	3.35	3.00	2.75
	期待ショートフォール	5.26	14.35	3.50

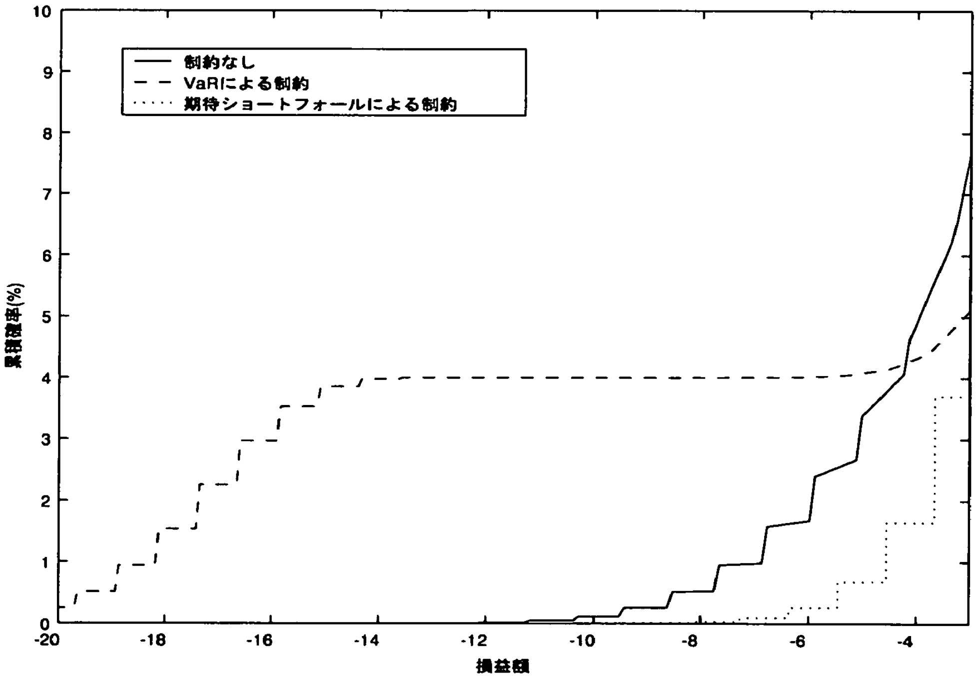

図 1: 与信先の集中：損益額分布

デフォルト事象の相関の高い与信ポートフォリオが挙げられる．また，Basak and Shapiro [6] は，投資家が株式と債券を連続時点で動的に取引を行う場合にも，こうした問題が一般的に発生することを示している[6]．

3.3. 劣加法性（凸性）

3.3.1. 定義

リスク指標の劣加法性は以下により定義される．

定義 4 (劣加法性) リスク指標 $\rho(X)$ が劣加法性を満たすとは，どのような損益額変数 X，Y に対しても，

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \tag{5}$$

が成立することである．

劣加法性は，全体のポジションのリスク量が個別ポジションのリスク量の和を下回ることを表している．直観的には，「リスク指標はポートフォリオ分散効果によるリスク削減効果を織り込むべきである」という要請を定式化したものと考えられる．

一方，リスク指標の凸性は以下のように定義される．

定義 5 (凸性) リスク指標 $\rho(X)$ が凸性を満たすとは，どのような損益額変数 X，Y に対しても，任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ の定数 λ に関して，

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \tag{6}$$

が成立することである．

リスク指標の凸性で重要な点は，凸性が満たされる場合，そのリスク指標を用いたポートフォリオの最適化が比較的容易になることである．具体的には，目的関数および制約式が凸性を持つ凸計画問題では，局所最適解が大域的最適解となるため，凸性を満たすリスク指標によるポートフォリオ最適化は局所最適解を求めることで足りる．

ここで，劣加法性と凸性には密接な関係があることがわかっている[7]．すなわち，(7) 式で表わされる正の1次同次性が成立していれば，劣加法性と凸性は同値となることがわかっている（証明は例えば [21] を参照）．

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \quad \text{for } \lambda > 0. \tag{7}$$

オプションという．特に，こうしたアウト・オブ・ザ・マネーのオプションの中で現在の原資産価格と権利行使価格が非常に離れているオプションは，将来時点で買い手に利益が発生する可能性は低く，ファー・アウト・オブ・ザー・マネー・オプションと呼ばれる．ファー・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションでは，買い手に利益が発生する確率が低いためオプション価格（プレミアム）も低い．トレーダーは，こうしたファー・アウト・オブ・ザ・マネー・オプションを大量に売ることにより，大抵の場合は受入プレミアム分の利益が挙がるが，小さい確率で大きな損失を被るポジションを組成できる．

[6]Basak and Shapiro [6] のモデルでは，資産価格が対数正規分布（幾何ブラウン運動）に従うことが仮定されているが，投資家が動的に取引を行うことで非線形のポートフォリオを構成し，正規分布に従わない損益額分布を生成できることから，テイル・リスクが発生する．簡単な解説は [19] を参照．

[7]劣加法性と期待効用最大化原理との整合性は，いずれも関数の凸性に関わっているという点で密接な関係があるように思われる．しかし，劣加法性と期待効用最大化原理との整合性は必ずしも同値の性質ではない．これらの同値性の反例としては，損益額がパレート分布に従い裾指数が1以上である場合が挙げられる（[10] の Example 7 を参照）．

表 7: VaR が劣加法性を満たさない例

状態	確率	ポートフォリオ		
		A	B	A+B
1	98.0%	80	80	160
2	0.9%	−20	−100	−120
3	0.2%	−30	−30	−60
4	0.9%	−100	−20	−120

したがって，劣加法性と正の1次同次性を満たすリスク指標は凸性も満たし，ポートフォリオの最適化が容易となるという利点があることがわかる．VaR や期待ショートフォールは定義から明らかなようにこの正の1次同次性を満たしているため，この2つのリスク指標に関しては，劣加法性と凸性を同じものとして扱ってよいことになる．

3.3.2. VaR が劣加法性を満たす十分条件（楕円型分布族）

VaR が劣加法性を満たす条件を説明する．まず，損益額が正規分布に従う場合は VaR は劣加法性を満たす．これは，正規分布の下で VaR が損益額の標準偏差の定数倍であることと，標準偏差が一般的に劣加法性を満たすことから自明である．Embrechts, McNeil, and Straumann [10] は，これを一般化して，損益額が楕円型分布族の分布（以下，楕円分布）に従っている場合，VaR が劣加法性を満たすことを示した[8]．楕円分布は，正規分布のほか，t 分布，パレート分布等を含む．したがって，損益額が楕円分布に従っている場合には VaR は劣加法性を満たす．

3.3.3. VaR が劣加法性を満たさない例

しかし，損益額が楕円分布に従わない場合は，VaR の劣加法性は一般的に保証されない．ここでは，VaR が劣加法性を満たさない比較的簡単な例を示す．前節の表1で示したポートフォリオ A に対応して表7のようにポートフォリオ B を加えて考える．

ポートフォリオ A の99%信頼水準の VaR は30である．一方，ポートフォリオ B では，損益の小さい方から考えると確率0.9%で −100（状態2），次に確率0.2%で −30（状態3）であるため，99%信頼水準の VaR は30である．ここで，ポートフォリオ A と B を統合したポートフォリオ A+B を考える．統合ポートフォリオ A+B では，確率1.8%で −120（状態2及び4）であるため，99%信頼水準の VaR は120である．結局，

$$120 = VaR(A + B) > VaR(A) + VaR(B) = 30 + 30 = 60, \tag{8}$$

となり，劣加法性は満たされない[9]．

この例は，人為的にみえるかもしれないが，大口与信やファー・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションを含むポートフォリオなど，実務上よくみられるようなポートフォリオで

[8]楕円型分布族の（1変量）分布とは確率密度関数 $f(x)$ が，ある関数 $\phi(\cdot)$ によって

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right),$$

と表わされる分布である．

[9]この例を見るとわかるように，2つの分布の裾（A の状態4，B の状態2）が重く，分布の依存関係が複雑（一方の裾が状態4，もう一方の裾が状態2）な場合には，劣加法性を満たさないという状況が生じる．

も，同様にVaRが劣加法性を満たさない例を構成することができる（山井・吉羽 [19] ないしADEH [4, 5] を参照）．

また，このようにVaRが一般的には劣加法性を満たさないことから，凸性も一般的に満たさないことがわかる．したがって，このような場合には，VaRに基づくポートフォリオの最適化も容易ではない．Mausser and Rosen [14] では，シミュレーションによりリスク量を計測する場合のVaRの最適化を試みている．そこでは，一般的にVaRがポジション量に対して凸関数ではないため，VaRに基づくポートフォリオ最適化が困難であることが示されている．

3.3.4. 期待ショートフォールの劣加法性

期待ショートフォールは，損益額分布が連続であれば劣加法性を満たすことがわかっている．さらに，損益額分布が離散である場合は，VaRの信頼水準に相当する事象に重なりがなければ劣加法性を満たし，重なりがある場合には，期待ショートフォールの定義を

$$ES_\alpha(X) = E[-X|-X \geq VaR_\alpha(X)] + \left(1 - \frac{F(-VaR_\alpha(X))}{\alpha}\right) VaR_\alpha(X), \tag{9}$$

と修正すれば劣加法性を満たす（[1, 2] を参照）．ただし，$F(\cdot)$ は損益額 X の分布関数である．

期待ショートフォールが劣加法性を満たすことの証明は Acerbi, Nordio, and Sirtori [1] が簡明である．ここでは，連続分布の場合を示しておく．

$$\overline{x_\alpha} \equiv \frac{1}{\alpha} E[X 1_{X \leq -VaR_\alpha(X)}], \tag{10}$$

とする．この時，期待ショートフォールは $-\overline{x_\alpha}$ となる．2つのポートフォリオの損益額をそれぞれ X，Y とし，新たに確率変数 $Z = X + Y$ を考える．期待ショートフォールの劣加法性を示すには，$\overline{y_\alpha}$，$\overline{z_\alpha}$ を $\overline{x_\alpha}$ と同様に定義し，

$$\overline{z_\alpha} \geq \overline{x_\alpha} + \overline{y_\alpha}, \tag{11}$$

を証明すればよい．ここで，次の関係に注目する．

$$\begin{cases} 1_{Z \leq z_\alpha} - 1_{X \leq x_\alpha} \geq 0 & \text{if } X > x_\alpha, \\ 1_{Z \leq z_\alpha} - 1_{X \leq x_\alpha} \leq 0 & \text{if } X < x_\alpha, \end{cases} \tag{12}$$

すなわち，$(1_{Z \leq z_\alpha} - 1_{X \leq x_\alpha})(X - x_\alpha) \geq 0$ である．よって，

$$\begin{aligned} \alpha(\overline{z_\alpha} - \overline{x_\alpha} - \overline{y_\alpha}) &= E[Z 1_{Z \leq z_\alpha} - X 1_{X \leq x_\alpha} - Y 1_{Y \leq y_\alpha}] \\ &= E[X(1_{Z \leq z_\alpha} - 1_{X \leq x_\alpha}) + Y(1_{Z \leq z_\alpha} - 1_{Y \leq y_\alpha})] \\ &\geq x_\alpha E[(1_{Z \leq z_\alpha} - 1_{X \leq x_\alpha})] + y_\alpha E[(1_{Z \leq z_\alpha} - 1_{Y \leq y_\alpha})] \\ &= x_\alpha(\alpha - \alpha) + y_\alpha(\alpha - \alpha) = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

が成立し，期待ショートフォールの劣加法性は示される．

3.3.5. 期待ショートフォールの凸性を利用したポートフォリオ最適化

期待ショートフォールは劣加法性を満たすうえ，定義より明らかに正の1次同次性を満たすことから，期待ショートフォールは凸性をも満たす．したがって，期待ショートフォールに基づくポートフォリオ最適化は比較的容易である．

Rockafeller and Uryasev [16] は，期待ショートフォールの凸性を利用し，シミュレーションにより推定される期待ショートフォールを最小化するポートフォリオを探索する問題を考えた．その結果，その最適ポートフォリオを求める問題は線形計画問題に帰着することを示した．線形計画問題に対しては，伝統的なシンプレックス法や内点法など効率的なアルゴリズムが知られており，そうしたアルゴリズムを実装したソフトも多数あるため，比較的容易に最適ポートフォリオを求められる．このアルゴリズムのポイントは期待ショートフォールが，n 資産 $X_1, \ldots, X_n$ への配分ベクトル（ポートフォリオ構成）を $\boldsymbol{\omega}$ として，

$$F(\boldsymbol{\omega}, \beta) = (1-\alpha)\beta + \int \cdots \int \Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\omega_i - \beta\Big)^+ p(X_1, X_2, \ldots, X_n)dX_1 dX_2 \ldots dX_n, \quad (14)$$

を最小化する問題に帰着するという点である[10]（簡単な解説は [20] を参照）．最小化されたときの β が VaR を，$\boldsymbol{\omega}$ が最適ポートフォリオ構成を示していることになる．ここで，α は信頼水準であり，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ は各資産が $X_1, \ldots, X_n$ という値をとる確率を示す確率密度関数である．(14) 式の積分は，モンテカルロ法でその確率密度に従った乱数を発生させたうえで，平均をとることに他ならない．したがって，(14) 式は発生させた乱数の線形和となり，線形計画問題に帰着する[11]．ただし，期待ショートフォールを厳密に求めようとすると多くの乱数を発生させる必要があるため，その分だけ線形計画問題の変数の数や次元が増えていくことになり，問題が解きにくくなることには注意が必要である．

3.4. VaR と期待ショートフォールの推計値の安定性

これまでの VaR と期待ショートフォールとの比較分析では，期待ショートフォールの方が VaR よりも優れた性質を持つとの結果が得られた．しかし，概念的に優れたリスク指標であっても，その推計が困難であれば実務に応用することは容易ではない．そこで，山井・吉羽 [20] は，期待ショートフォールと VaR とでいずれの推計誤差が大きくなるかをシミュレーションにより評価した．その結果，損益額分布の裾が重いと VaR の推計誤差よりも期待ショートフォールの推計誤差が大きくなってしまうことがわかった．

本節では，VaR および期待ショートフォールの推計誤差の統計的性質について簡単に述べた後，[20] でのシミュレーションによる誤差の評価結果を紹介する．

3.4.1. VaR と期待ショートフォールの推計誤差の統計的性質

これまでの研究から，VaR の推計誤差の漸近的分布については比較的明快な結果が得られている一方，期待ショートフォールの推計誤差の漸近的分布はわかっていない．

まず，VaR の推計誤差は漸近的に正規分布に従い，その漸近的標準偏差には簡明な解析解があることがわかっている．$100(1-\alpha)$%信頼水準の VaR は損益額分布の下側 100α%分位点である．n 回のシミュレーションで得たこの分位点の推計値は漸近的に正規分布に従い，

---

[10] $(\cdot)^+ \equiv \max(\cdot, 0)$ である．

[11] このアルゴリズムに基づき具体的な計算を行っている文献としては，[3] を参照．

その標準偏差は次式で表わされることがわかっている（[18], pp.356-358を参照）．

$$\sigma_{VaR_\alpha(X)} = \frac{1}{f(x_\alpha)}\sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{n}}, \tag{15}$$

ただし，$f(x)$は損益額分布の確率密度関数である．

一方，期待ショートフォールの場合，推計値が確率1で真値に収束することはわかっているが([2], Proposition 3.1)，その誤差の漸近的性質はわかっていない．そこで，山井・吉羽[20]は，シミュレーションによりVaRと期待ショートフォールの推計誤差を評価し，比較した．

3.4.2. シミュレーションによる推計誤差の評価

ここでは，山井・吉羽[20]による，シミュレーションを用いたVaRと期待ショートフォールの推計誤差の評価結果を紹介する．

[20]では，損益額分布として裾が非常に重いものを考え，裾の重さの変化によってVaRと期待ショートフォールの推計値の誤差がどの程度異なってくるかをシミュレーションによって検討した．ここでは，裾の重い損益額分布として対称安定分布を仮定した．対称安定分布とは，特性関数$\Phi(\theta)$が，

$$\Phi(\theta) = \exp\left\{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha}|\theta|^{\alpha}\right\}, \tag{16}$$

で与えられるものであり，$\alpha=2$で正規分布，$\alpha=1$でコーシー分布となる．つまり，αを2から1に近づけることにより，分布の裾を重くすることができる．誤差の評価は，VaRと期待ショートフォールの水準の差を調整するために，相対標準偏差（＝標準偏差/期待値）で行った．

αの変化に応じてVaRや期待ショートフォールの推計値の相対標準偏差（及び推計値の95%信頼区間）がどのように変化するかをシミュレーションによって求めた結果が表8である[12]（より詳細な結果は[20]を参照）．表8では上段がVaRの結果，下段が期待ショートフォールの結果である．

表8より，極めて裾が重い場合（$\alpha=1.1$）には，相対標準偏差はVaRに比して期待ショートフォールでは160倍（$47.61/0.30 \simeq 160$）となる．このように損益額分布の裾が非常に重い場合は，期待ショートフォールを正確に求めることは困難になる．したがって，期待ショートフォールの推計においてある小さな誤差しか許容できない場合には，VaRを推計する場合よりもサンプル数を多くし，推計値の誤差を小さくするようにしなくてはならない．これは実務的には大きなコストと考えられる．

これを実務への応用を念頭に置いて考えると，実務で扱われるポートフォリオで損益額分布の裾がどの程度の重さになり得るか，また，それが期待ショートフォールの推定誤差にどの程度影響を与えるかが問題となる．実務で扱われる全てのポートフォリオの損益額分布を先見的に知ることはできないため，これを一般的に評価することはできない．しかし，金融実務で損益額分布の裾が重くなるようなポートフォリオを想定し，そのポートフォリオの誤差を評価して実務上の一定のインプリケーションを得ることは可能である．[20]では，こうした裾の重い損益額分布を持つ典型的なポートフォリオとして，ファー・アウト・オブ・

[12]安定分布に従う乱数の生成はChambers, Mallows, and Stuck [9]が示したFortranのコードをCのコードに直して行った．

表 8: 対称安定分布での VaR（上段）の推計値と期待ショートフォール（下段）の推計値の相対標準偏差

α	推計値の平均値 (a)	推計値の標準偏差 (b)	相対標準偏差 (c)=(b)/(a)	推計値の信頼区間 (95%)
2.0	2.30	0.12	0.05	[2.09, 2.54]
	2.62	0.14	0.05	[2.36, 2.90]
1.9	2.57	0.20	0.08	[2.25, 3.03]
	3.94	3.68	0.93	[2.70, 7.02]
1.5	5.41	1.08	0.20	[3.81, 8.00]
	15.16	89.50	5.91	[6.31, 37.93]
1.1	15.53	4.63	0.30	[9.09, 26.85]
	181.77	8,653.26	47.61	[19.63, 351.63]

ザ・マネー・オプションを含むポートフォリオと与信集中の進んだ与信ポートフォリオを取り上げ，シミュレーションにより VaR と期待ショートフォールの誤差の評価を行った．その結果，期待ショートフォールの相対標準偏差は VaR の相対標準偏差の 1.5 倍程度であった．この例から，実務で取り扱う典型的なポートフォリオでは，期待ショートフォールの推定誤差は VaR のそれの数倍程度になり得ることが考えられる．

4. 実務へのインプリケーション

本節では，期待ショートフォールと VaR の比較研究のポイントを述べた後，実務へのインプリケーションを述べて本論文の結びとする．

4.1. 期待ショートフォールと VaR の比較分析のポイント

本論文では，(1) 劣加法性（凸性），(2) テイル・リスク，(3) 期待効用最大化原理との整合性，(4) 推計値の安定性，に焦点をあてて，VaR と期待ショートフォールの比較分析を行った．その結果，(1)～(3) については，期待ショートフォールは VaR よりも幅広い条件でこれらの性質を満たし，概念的には VaR よりも優れたリスク指標であることがわかった．しかし，(4) については，損益額分布の裾が重い場合に期待ショートフォールの推計誤差が VaR よりも大きくなるとの結論を得た．

4.2. インプリケーション

ここでは，上記 4 つの性質に関して，VaR と期待ショートフォールの比較分析を行ったが，4 つの性質すべての面で一方が他方に優れるという結論にはならなかった．期待ショートフォールは裾の情報を平均値として織り込んでいることから VaR 以上のリスクに関する情報を持っており，このため，劣加法性，テイル・リスクの排除，期待効用最大化原理との整合性の 3 つの点で優れている．しかし，裾の推計という難しい課題を抱えている分だけその推計は VaR よりも難しい．すなわち，VaR と期待ショートフォールとの間にはどの性質を満たすかについてトレード・オフが存在する．

こうしたトレード・オフは，リスク指標一般に当てはまる議論でもある．これは,「単一のリスク指標で分布の性質の全てを表すことはできないため，すべての望ましい性質を満たすような完全なリスク指標は存在しない」という事実に基づいている．例えば，Breitmeyer, Hakenes, Pfingsten, and Rechtien [8] では，所得格差の計測方法に関する考察を基に，リスク指標が満たすべき性質として28個もの公理を挙げている．もちろん，これら28個のすべてを満たすリスク指標は存在しない．

このように，リスク指標自体完全なものではないため，リスク管理では以下の2点に留意する必要があると考えられる．第1に，それぞれが抱えるリスクの性質や経営陣の関心に応じたリスク指標の選択を行うことが重要である．まず，保有ポートフォリオの損益額分布の性質を踏まえることが重要であろう．仮に保有ポートフォリオの損益額分布が正規分布あるいは楕円分布に近いものであるならば，VaRのリスク指標としての問題点は基本的に顕現化しない．したがって，VaRに加えて期待ショートフォールを用いる必要性はほとんどない．しかし，損益額分布が楕円分布でない場合は，VaRを用いたリスク計量では上述のような問題が発生し得るため，例えば期待ショートフォールを用いる必要も生じてくる．

また，経営陣やリスク管理担当者がどういったリスクを重視するかを認識することも重要である．例えば，経営陣が倒産確率のみならず，倒産時の損失規模にも関心があるのであれば，楕円分布以外の損益額分布では，VaRはその関心に答えられない．

第2に，特定のリスク指標のみに頼ったリスク管理は危険であり，適当な補完手段を用いてポートフォリオのリスク特性を分析することが重要である．例えば，3節では，VaRのみに依存したリスク管理はVaR以上の損失が発生する可能性を高めることがあることを示した．こうしたVaRの問題点に対しては，まずは，VaRの代りに期待ショートフォールを用いることが考えられる．しかし，損益額分布の裾が厚い場合にはその推計が難しくなる．さらに，3節でも述べたように，期待ショートフォールにもテイル・リスクが存在する場合があり，期待ショートフォールに頼ったリスク管理が常に万全という訳ではない．このため，ポジションやキャッシュ・フローのデスク・レベルでのモニタリング，与信ポートフォリオの与信集中度合いのチェックなどで，リスクの性質を肌目細かく把握することは有効な補完手段となる．

参考文献

[1] C. Acerbi, C. Nordio, and C. Sirtori: Expected shortfall as a tool for financial risk management. *Working Paper*, Italian Association for Financial Risk Management, (2001).

[2] C. Acerbi and D. Tasche: On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking and Finance*, **26** (2002) 1487–1503.

[3] F. Anderson, H. Mausser, D. Rosen, and S. Uryasev: Credit risk optimization with conditional value-at-risk criterion. *Mathematical Programming*, **89** (2001) 273–292.

[4] P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath: Thinking coherently. *Risk*, **10** (November 1997) 68–71.

[5] P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath: Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **9** (1999) 203–228.

[6] S. Basak and A. Shapiro: Value-at-risk based risk management: optimal policies and asset prices. *Review of Financial Studies*, **14** (2001) 371–405.

[7] BISグローバル金融システム委員会: 大規模金融機関におけるストレステスト：ストレステストの現状とテスト結果の集計に関する論点. (国際決済銀行, 2000).

[8] C. Breitmeyer, H. Hakenes, A. Pfingsten, and C. Rechtien: Learning from poverty measurement: an axiomatic approach to measure downside risk. *Diskussionsbeitrag 99-03*, Westfälishce Wilhelms-Universität Munster, Institut für Kreditwesen, (2000).

[9] J. M. Chambers, C. L. Mallows, and B. W. Stuck: A method for simulating stable random variables. *Journal of the American Statistical Association*, **71** (1976) 340–344.

[10] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann: Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls. in M. A. H. Dempster (ed.): *Risk Management: Value at Risk and Beyond* (Cambridge University Press, 2002) 176–223.

[11] P. C. Fishburn: Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. *The American Economic Review*, **67** (1977) 116–126.

[12] K. A. Froot and J. C. Stein: Risk management, capital budgeting, and capital structure policy for financial institutions: an integrated approach. *Journal of Financial Economics*, **47** (1998) 55–82.

[13] H. Konno and H. Yamazaki: Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management Science*, **37** (1991) 519–531.

[14] H. Mausser and D. Rosen: Beyond VaR: from measuring risk to managing risk. *ALGO Research Quarterly*, **1**-2 (1998) 5-20.

[15] H. Markowitz: Portfolio selection. *The Journal of Finance*, **7** (1952) 77–91.

[16] R. T. Rockafeller and S. Uryasev: Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, **2** (2000) 21–41.

[17] A. D. Roy: Safety first and the holding of assets. *Econometrica*, **20** (1952) 431–449.

[18] A. Stuart and J. K. Ord: *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Volume 1 Distribution Theory* (6th Edition, Edward Arnold, London Melbourne Auckland, 1994).

[19] 山井 康浩, 吉羽 要直: バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について—期待ショートフォールとの比較分析による理論的サーベイ—. 金融研究, **20**-2 (日本銀行金融研究所, 2001), 33–68.

[20] 山井 康浩, 吉羽 要直: 期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測—具体的な計算例による考察—. 金融研究, **20**-別冊 2 (日本銀行金融研究所, 2001), 53–93.

[21] 山井 康浩, 吉羽 要直: リスク指標の性質に関する理論的整理—VaR と期待ショートフォールの比較分析—. 金融研究, **20**-別冊 2 (日本銀行金融研究所, 2001), 95–131.

吉羽 要直
日本銀行 金融研究所
〒 103-8660 中央区日本橋本石町 2-1-1
E-mail: `toshinao.yoshiba@boj.or.jp`

ABSTRACT

COMPARATIVE ANALYSES OF EXPECTED SHORTFALL AND VALUE-AT-RISK

Yasuhiro Yamai　　Toshinao Yoshiba
Bank of Japan

This paper summarizes the authors' papers on the comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk.

It discusses the properties of risk measures in terms of (1) elimination of tail risk; (2) consistency with expected utility maximization; (3) subadditivity (convexity); and (4) stability on estimation.

It examines whether expected shortfall and value-at-risk satisfy these properties, and shows that expected shortfall is superior to value-at-risk in terms of (1), (2), and (3), but inferior to value-at-risk in terms of (4).