

円ドルレートティックデータの週次フラクタル次元

熊谷 善彰
慶應義塾大学産業研究所

(受理 2001 年 9 月 17 日; 再受理 2002 年 7 月 25 日)

和文概要 円ドル相場における提示価格のティックデータを用いて、週毎のフラクタル次元を計測する。時間尺度 (スケール) として 1 分間隔のサンプリングによる実時間と価格提示毎に時間を進めるティック時間の 2 通りについて、それぞれによる次元を比較した。主な結果は以下の通りである。週次のフラクタル次元は、時期によって変動する。ボラティリティの高い時期に価格時系列の自己相似性が強くなる傾向がある。実時間で観測した場合、ティック時間で観測した場合に比べて価格系列は強い自己相似性を示す。測定される次元は、どちらの時間を用いても次元が 1.5 を上回る、反持続的な性質がみられる。ティック時間の場合に反持続性がより強くみられるが、週毎の 2 つの次元の変動はほぼ同調しているため、次元の差はほぼ一定である。

1. はじめに

本稿では、円ドル相場における提示価格のティックデータについてフラクタル解析を行う。従来、フラクタル解析はデータ数確保のため長期間のデータを用いて行われ、フラクタル次元を比較的長期にわたって変わらない定数とみなすことが多かった。しかし、経済構造は日々変化している。特に為替市場においては、市場の状態は長期にわたって安定しているとは考えにくい。これまでも、状態の変化をフラクタル次元の変化によって捉えようという試みはいくつかあったが、近年、金融分野では高頻度データが利用可能になりつつある [9]。本稿では、提示された価格を記録したデータ (ティックデータ) を用いることによって、フラクタル次元の週単位の変化について分析したい。

一般に、金融時系列において、時間をどの尺度で測るべきかについては多くの議論がある [7] [17]。主な候補としては、物理的時間、営業時間、取引順序の 3 つがある。この 3 つはいずれも長所と短所があり、決定的なものはない。価格に影響を与える情報はいつでも発生するという観点からは、物理的時間が望ましい。しかし、休日などの市場が開いていない期間は価格が存在しないため、データが欠落する部分の扱いが問題となる。そこで、市場の営業時間のみを考えれば、データの抜けた部分はなくなる。しかし、市場が開いていないときにも価格に影響を与える情報は発生している。このため、休日を挟んだ部分の処理が必要となる。また、24 時間取引されている為替市場などでも、後で述べるように市場の活動は時間帯によって大きく異なる。そこで、取引順序を用いれば、市場の活発なときには時間が早く進むと考えることになる。しかし、これも休日の問題を解決することにはならない。日次のデータによる分析では、休日・祝祭日からなる非営業日を挟んだ営業日をつなげることが多い。このときは 2 番目の候補である営業時間で測定することに相当している。

ティックデータは個々の取引 (本稿のデータの場合は取引ではなく価格提示) についてのデータである。ビッドまたはアスクの価格の提示時刻は等間隔ではない。取引時刻についても同様に等間隔ではない。このように異なる時間間隔で発生するデータを分析するため

に様々な手法が提案されている [5] [6]. 金融時系列の高頻度データは通常、物理的時間と取引順序の 2 通りの時間尺度で分析されている. 物理的時間を用いる場合には、ティックデータを加工して 5 分あるいは 1 分などの等しい時間間隔のデータにする必要がある. そのためには、適当な時間間隔でサンプリングし直す方法が一般的である. ただし、この方法では、間引かれるデータの情報は失われる. つぎに、データの発生順序を時間とみなすこともある. 取引が 1 回行われるごとに時間が 1 単位進むと考え、時間軸としてティックをとる. これは、出来高の累積を価格過程の先導過程とする方法 [3] と同じ考え方に基づいている.

本稿の分析対象である外国為替市場では 24 時間取引が行われ、1 週間つまり 5 営業日は原則的に連続している. そのため、この 5 日間は物理的時間と営業時間の 2 つの尺度は一致している. 物理的時間とティックの関係では、アジア・ヨーロッパ・アメリカの 3 つの地域が活動時間帯となるとときにティック数が増大する. 時間あたりのティック数のグラフには後に示すように 1 日の間に 3 つの山ができる. 中でもヨーロッパ及びアメリカの活動時間帯の度数はアジアに比べて大きい. このため、時間尺度として物理的時間と累積ティック数のどちらを採用するかによって、観測される時系列の性質は異なることが予想される. 本稿では、時間尺度として、物理的時間と累積ティックを採用した 2 つの場合について、Higuchi の方法 [11] によって週毎のフラクタル次元を測定・比較する.

2. フラクタル次元の測定法

本節では、時系列からフラクタル次元を計算する方法について簡単に説明する. フラクタル次元の測定は、通常、等時間間隔の時系列データを前提としている. しかし、等時間間隔にサンプリングし直す、あるいは時間尺度を定義し直してデータを「等時間間隔」にすることにより、時間間隔が異なる時系列データにも有効である.

まず、Burlaga and Klein [2] によるフラクタル次元の測定法 (BK 法) を紹介する. 元になる時系列を $X(1), X(2), \dots, X(N)$ とする. 時間軸を k で粗視化した時系列を次のように構成する. まず、元の時系列を k 個ずつに

$$(X(1), X(2), \dots, X(k)), (X(k+1), X(k+2), \dots, X(2k)), \dots \quad (1)$$

と分割する. データ数 N が k で割り切れない場合は、最後の組は k 個以下になる. つぎに、それぞれの組の平均値を求める. j 番目の組の平均値を $\overline{X_j(k)}$ とかけば、 k で粗視化したときの長さ $L_{BK}(k)$ は

$$L_{BK}(k) = \frac{\sum_{j=1}^{[N/k]} |\overline{X_{j+1}(k)} - \overline{X_j(k)}|}{k} \quad (2)$$

と定義される. ここで、 $[]$ はガウス記号である. このとき、この長さ $L_{BK}(k)$ と粗視化の尺度である k の間に

$$L_{BK}(k) \propto k^{-D_{BK}} \quad (3)$$

の関係が成立するとき、 D_{BK} をフラクタル次元とする.

この方法ではまず、平均をとってから長さを計算しているが、これに対して、長さをとってから平均する方法が Higuchi(1988) 法 [11] である. k で時間軸を粗視化した時系列の組

$$\tilde{X}_m(k); X(m), X(m+k), X(m+2k), \dots, X(m + [\frac{N-m}{k}]) \quad (m = 1, 2, \dots, k) \quad (4)$$

を k 個作成する。つまり、元の時系列を間隔 k でサンプリングし直した時系列は、その最初の時点である m を 1 時点ずつずらすことで k 通り構成できる。このように構成されたそれぞれの $\tilde{X}_m(k)$ について、長さ $L_m(k)$ を

$$L_m(k) = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor} |X(m+ik) - X(m+(i-1)k)| \right) \frac{N-1}{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor k} \right\} / k \quad (5)$$

のように求める。ここで、 $(N-1)/(\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor k)$ の項によって、各系列のデータ数の違いを補正している。 k で粗視化されたときの時系列の長さ $L(k)$ は、上で求めた k 個の $L_m(k)$ の算術平均によって

$$L_H(k) = \frac{\sum_{m=1}^k L_m(k)}{k} \quad (6)$$

と定義する。この長さ $L_H(k)$ と粗視化の尺度である k の間に

$$L_H(k) \propto k^{-D_H} \quad (7)$$

の関係が成立するとき、 D_H をフラクタル次元とする。 $L_H(k)$ と k の両対数グラフに直線を当てはめたときの傾きが $-D_H$ である。このときの相関係数は 0.999 以上は必要とされている。また、データ数 N に対して信頼の置ける結果を与える k の範囲（スケーリング期間）は、最小時間間隔 1 から $N/20 \sim N/10$ までの内側にある必要がある。BK 法の問題点は、例えば、標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数を並べて作成した時系列に適用することで明らかになる。BK 法では平均をとってから長さを測定する。 k 個の平均 $\overline{X_j(k)}$ の分散は $1/k$ であるから、十分大きな k に対してはほとんど確実に 0 となり、測定される長さ $L_{BK}(k)$ が 0 になってしまう。Higuchi 法では長さを測定してから平均するため、このようなことはない。このため、Higuchi 法で求めた時系列の長さ $L_H(k)$ は、BK 法で求めた時系列の長さ $L_{BK}(k)$ より常に長い。Higuchi 法は最初に位相をずらしながら長さを測定することで、BK 法よりも精度の高い結果を与えることが確認されている [11]。

ここで求められる次元 D_H は局所箱個数次元（ボックスカウンティング次元）であり、ランダムウォークに対しては $D_H = 1.5$ となる。ブラウン運動では、その広がり（経過時間 t の平方根 $t^{1/2}$ ）に比例する。これを一般化した、経過時間 t の t^H に比例してその広がりが増大する過程が非整数（フラクタル）ブラウン運動である [16]。このときの指数 H はハースト指数とも呼ばれる。 $H = 0.5$ の場合が通常のブラウン運動である。ハースト指数 H とここで求められるフラクタル次元 D_H の間には $D_H = 2 - H$ の関係がある。 $H > 1/2$ の場合は時系列は持続性を持ち、 H が 1 に近づくほど時系列グラフは滑らかになり、 $H = 1$ のときにはテイラー展開可能となる。 $H < 1/2$ の場合は反持続性を持ち、時系列は変動の激しいものとなる [12]。

本稿では、時間として、実時間とティック順序の 2 通りの「時間」について、価格時系列のフラクタル性を検証したい。実時間を用いる場合には、不等間隔のデータを等間隔にサンプリングする。ただし、その際、データが捨てられたり、逆に補間されることになる。また、ティック順序を用いる場合は、価格の提示が頻繁に行われる期間は市場における価格過程が早く進んでいると考える。つまり、このときは、価格の提示から次の価格の提示までの間隔は、等間隔であると仮定していることになる。

3. データ

本稿で用いるデータは、金融データ提供会社 CQG による、円ドルレートのブローカーの提示価格である。取引価格を記録したものではないが、取引を要求されたときに背後にいる銀行は、その提示価格で取引する義務が生じる。しかし、実際に取引が行われたかどうかは保証されていないので分析者の判断によるしかない。データには、ビッド (Bid) とアスク (Ask)¹ の区別と共に送信時刻が記録されている。提示価格の送信時刻はアメリカ中央時 (シカゴ時間) で分単位で記録される。日付変更後、アジア取引時間帯 17:00-24:00, ヨーロッパ取引時間帯 0:00-7:00, アメリカ取引時間帯 7:00-17:00 の順となる。図 1 及び図 2 に、データの同一部分を異なる表示法で示した。図 1 では、横軸の時間軸は分単位の物理的時間である。この場合、分単位で同じ時刻に記載されている価格については記録されている順序によって時間的順序は分かるが、秒単位の時間は不明である。横軸の時刻に対して複数の提示価格が対応しているので、図では点として表記した。また、データが価格軸に対して離散的であることも分かる。一方、図 2 では、時間軸として 2000 年 5 月 8 日 2 時を基点としたティック数の累積値を用いた。ここでは、横軸の累積ティック数に対して提示価格が一意に対応しているので、データを線で結んで表記した。ティック時間で観測するという事は、図 2 のグラフのような時系列を分析するという事である。一方、実時間で観察するという事は、図 1 において同じ x 座標をもつ点を 1 点で代表させ、これらの点を結んだ時系列を分析することになる。送信時刻の記録精度は 1 分である。それぞれの価格提示の時間的な前後関係は正確に記録されているが、秒単位の時刻は不明である。分表示した送信時刻が同一の提示価格が複数存在する場合は、記録されている順序によって提示価格間の時間的順序は分かるが、各々の提示された秒単位の正確な時刻は把握できない。原則としては、ビッド・アスクの順で対になって建値されるが、ビッドあるいはアスクの提示が連続して記録されている場合もある。

図 3 に今回対象とする期間における円ドルレートの週次の平均提示価格を示した。この図はデータから作成したものであるが、この縮尺ではビッドとアスクは図上では判別できない。図 4 の上半分には、週次の終値と始値の差、つまり金曜の最終の提示価格と月曜の最初の提示価格の差を示した。下半分には、1 分間隔でサンプリングしたデータの標準偏差を週毎に求めた。いずれも 10 月のドル暴落を含む 1998 年後半に大きな値となっている。

図 5 には、1 日の時間帯による市場の活動状況を分あたりの価格の提示回数によって示した。データの全期間にわたって、ビッドあるいはアスクの価格の提示回数を 1 分毎に集計して、その平均値を求めた。アジア取引時間帯は、アメリカ中央時における前日の 17 時、日本時間では朝の 8 時から始まる。日本時間の午前中にあたるアメリカ中央時における 20 時ごろに提示回数のグラフでは最初の山が見られる。アジアにおける午後の山はそのままヨーロッパにおける取引に引き継がれていき、ロンドン時間の 8 時頃に第 2 の大きな山がある。ロンドン時間はアメリカ中央時と 6 時間の時差があるため、アメリカ中央時では夜中の 2 時である。そして、米国中央時の 8 時ごろが第 3 の山となる。図 6 には、データの全期間における各週毎の提示価格の個数をビッドとアスクそれぞれについて示した。ここに示した 1 週間の提示価格の度数は必ずしも市場の出来高を反映しているわけではない。また、これはあくまでも記録された個数であり、入力されないことによるデータの欠損が多い時期もあるため、長期的な変動は市場の実態に即していない場合もある。

¹ビッド・アスクのほか「取引 (Trade)」という記録区分が全期間中に 2 回だけ存在する。

4. 計測結果

データセットからビッドの系列及びアスクの系列をそれぞれ抜き出す。ビット・アスクの各系列について、上記の Higuchi 法によりフラクタル次元を求める。まず、物理的な時間を「時間」とする場合である。サンプリング間隔は1分とする。このデータでは秒単位の時刻は不明であるため、厳密に1分間を測ることはできない。しかし、提示の時間的な順序に従って記録されているため、記録時刻において分の値が変わる時点が1分間で最後に提示された価格となる。そこで、各分毎に最後に提示された価格を1分間隔でサンプリングされた値として採用する。時刻の変化が2分以上、つまり間の1分間価格が提示されなかった場合は、その実際には提示がなかった時刻に前時点と同じ価格の提示があったとする。このようにデータを補間することによりデータに歪みを生じることになる。取引の活発な時間帯には、図1のように1分間に10回以上は価格の提示が行われる。1分間に提示された価格の中で最後に行われた価格だけを取り出すので、原データの情報は大きく失われる。ここでは24時間取引が行われる為替市場のデータであるため、1週間の5営業日は年末年始などを除いて原則的に連続している。1分毎のデータに加工し直した場合、5日間のデータは7200個になる。フラクタル次元の測定のためにはデータ数は多いほうが望ましいが、これを1ヶ月まで伸ばすと、土曜日曜の休日を3、4回挟むことになる。2日間2880分にも及ぶデータの存在しない期間が生じることは、分単位の時間間隔による粗視化を行う本稿の分析においては適当ではない。このため、ここでは週毎に計算を行う。土日以外に取引のない期間としては、年末年始とクリスマスがある。例えば、1996年の12月31日14時9分の次に記録されている取引は翌1997年1月2日17時2分であり、2日以上取引のない期間がある。また、1995年12月24日には米国中部時間で11時7分から16時53分まで、翌25日には9時30分から15時35分まで取引が存在しない。12月24日、25日については、他の年においても同様に数時間以上取引が存在しない期間がある。そこで、これらの年末年始2日間とクリスマスの2日間を含む12月から1月にかけての2週間を分析の対象から外す。その他の各市場における祝祭日には頻度が小さくなるものの、取引は行われている。このため、取引のない期間が通常より増えるわけではないので、分析対象から除外しない。図7に週毎に計算したフラクタル次元を示した。スケーリング期間は1分から128分である。

図から明らかなように、測定されたフラクタル次元は時期によって異なる。全期間で1.5を上回る週がほとんどであるが、週毎の変動と共に年単位の大きな変化が見られる。1995,1996年にはごく緩やかに上昇し、1997年に1.5近くまで下落し、1998年にはしばしば1.5を挟んで変動した。その後1998年半ばには再び上昇傾向になるが、1999年は乱高下し、2000年に至る。つまり、1995,1996年には反持続性を持っていたが、この性質が1997年1年間で失われた。1998年にはランダムに近い性質を持つようになったが、これは安定せずに反持続性に戻りながら変動している。グラフの下部には、週毎の日米通貨当局による市場介入の総額(円換算)を示した。この内、米通貨当局による介入は1995年の3月から8月までの8回と1998年6月17日だけであり、ほとんどの場合、金額も同じ週の日本側の介入額の半分以下である。円売りドル買いの介入額は正の値、円買いドル売りの介入額は負の値で示した²。1995年の後半から1998年にかけては、介入が行われた週には次元が大きく減少していることがわかる。図8には、 $L_H(k)$ と k の両対数グラフにおける相関係数の推移を表示した。全期間にわたってほとんどの週で0.9995を上回っているが、1998年、特に後半に高い値を示している。この時期は、図4に示した1週間の価格変化、あるいは1分間隔にサンプ

²財務省『外国為替平衡操作の実施状況』及びFederal Reserve Bank of New York, *Quarterly Report* より

リングしたデータの標準偏差のどちらの尺度で見てもボラティリティが高い。両対数グラフにおける相関の高い程、自己相似性が強いと考えられるため、ボラティリティが高い時期に価格時系列の自己相似性が強くなるという興味深い結果が得られた。

ここまでは物理的な時間が、市場を駆動する時間と一致していると考えた場合である。つぎに、ティック毎に時間が進展するというモデルに基づいて週次フラクタル次元を計算する。この場合には、図 2 のように価格時系列を把握することになり、データ数は 25000 前後と平均的な場合では分単位の場合の約 4 倍になる。まず最初に、スケーリング範囲を 1 ティックから 512 ティックまでとした。価格提示が 1 分間に十数回行われるような市場の活発な時間帯には、このモデルにおける「時間」は早く進む。例えば、1 分間に 8 回提示があれば、512 ティックは実時間においては約 1 時間 (64 分) に相当する。全ての時間帯を通した平均では 512 ティックは 2 時間程度に相当する。このスケーリング範囲で計算した場合の $L_H(k)$ と k の両対数の相関係数は、全期間において 0.998 から 0.999 の水準で推移する。物理的な時間を用いた場合に相関係数 r が 0.9999 を若干下回る水準であったのに比べて、ティック時間の場合には相関係数が小さくなる。このときの対数グラフを見ると、最初の 1 ティックから 2 ティックまでの期間の傾きが他に比べて大きく、この部分が直線の当てはまりを悪くしていることが分かる。そこで、スケーリング範囲を 2 ティックから 512 ティックまでとすると、相関係数は 0.999 以上に改善される。このときの、相関係数の推移を図 10 に示した。図 8 に示した実時間の場合に比べて、すべての期間で相関係数が低い。つまり、実時間を用いた場合に価格時系列の自己相似性がより強く現れている。このことは、自己相似性が自然界の普遍的な性質であるとするれば、価格進展を図る尺度としては、ティック時間に比べて実時間が優れていることを示唆している。

測定される次元はスケーリング範囲を 1 ティックからとした場合に比べて 0.04 前後小さくなる。図 9 には、このティックを時間とみなした場合の週次のフラクタル次元の推移を示した。次元の推移は分単位のデータの結果と似た傾向を示している。しかし、次元の水準としては、多くの期間において 1.6 を上回り、分単位の実時間データから計算した次元よりも常に高い。つまり、一貫して反持続性を示している。

図 11 の上半分には、ティックを時間とみなした図 9 の場合と分単位の図 7 の場合の次元を併せて表示し、下半分には同一の週に対して計算したこの 2 つの次元の差を示した。次元の差は 0.05 前後であり、1998 年以降若干その差が開いている。実時間とティック時間の次元の変動は大部分で同調しているため、2 つの次元の差にはあまり変動が残っていない。

本稿ではスケーリング範囲を、実時間の場合に 1 分から 128 分、ティック時間で 2 ティックから 512 ティックとして、短い時間内の価格時系列の自己相似性を測定している。このため、1 週間の間に価格が大きく変動したとき、つまり、週足の始値と終値の差が大きい場合にもあまり大きな影響を受けない。例えば、1998 年 10 月 5 日から 9 日の 5 日間で 15 円の円高となった週には、1 分毎の価格変化の標準偏差も図 4 のように非常に大きい値となっている。一方、この週の次元は実時間でビッド・アスクとも 1.46、ティック時間でビッド・アスクがそれぞれ 1.53 と 1.54 のように、他の時期に比べた場合には反持続性が小さいが、価格が一方向に動いているという点から予想されるような持続性を示していない。これは、実時間で 128 分 (2 時間 8 分)、ティックで 512 までという市場の短期構造を捉えているからである。市場が活発になった時期である 1998 年、特に同年 6 月から 11 月にかけては実時間ではブラウン運動に近い次元が得られ、測定の際の相関係数も高い。市場の活発さを表す尺度としては、ほかに図 6 に示した週毎の提示回数がある。しかし、電子取引の進展や送信

記録自体の入力漏れなどの要因を考慮しても、1998年後半は他の期間に比べて記録された提示価格の頻度は特に大きくない。

また、市場介入の影響については、図7, 9に見られるように、大規模な介入の行われた週と反持続的傾向が弱まった週は一致する場合が多い。1995年9月6日・8日(計1兆0840億円)、1996年2月20日から23日(8740億円)、1998年4月10日(2兆6201億円)、1999年6月14日から21日(計1兆4059億円)のなどがその例である。また、金額としては小規模な介入であるが、日米協調介入³である1998年6月17日(3494.7億円)、1999年9月10日(3794億円)・14日(6401億円)も次元の極小と一致している。いずれも介入日を含む週の次元が前後3ヶ月程度の期間内の極小値となっている。介入が連続して行われる場合には、多くの場合その最初の介入日に近い週に次元の極小が一致する。一方、1995年2月から4月の長期にわたった日米通貨当局による介入(計2兆4445.6億円)、1997年12月17日から19日の1兆591億円の介入、1999年11月以降の介入は、その影響がはっきりしない。ここでの次元は2時間あるいは512ティックまでの短期の価格変動の反持続性を表しており、「時間」の進展に伴う価格系列の広がり小さい、つまり、レンジ内の取引の傾向が強いことを意味している。反持続性が弱まるということは、ごく短期のレンジ内での変動の傾向が崩れることを意味している。ただし、介入によって短期的な市場の安定状態が崩れたのか、あるいは、このような市場の状態を見て介入が行われたのかという因果関係の方向については本分析からは明らかではない。

これまでの日次の価格系列に対する研究では、本稿と測定方法が異なるものの、株価指数などでは1.5よりも低いフラクタル次元に対応する0.5以上のハースト指数が測定され、時系列が持続性を示す場合が多いのに対して、個別株価はほぼ0.5であり、為替市場のデータに関しては比較的0.5に近いハースト指数が報告されている[18], [15], [19], [10], [21]。また、ティック刻みの高頻度データに対しても、持続的な傾向が確認される場合が多い[4] [8] [20] [1]。株価指数では、30分以内という短期間では持続的な傾向が見られ、それより長時間では $H = 0.5$ に近い。これに対して為替市場では、数十分程度までの短期の性質の分析では、反持続的な性質が指摘されている。例えば、円ドル為替レートの取引価格についての分析によると、10分以内の市場は反持続性を示すが、10分以上のスケールではブラウン運動の性質を示すという[22]。このデータは本稿とは異なり取引価格であるが、分析期間である1998年10月26日から11月30日及び1999年1月4日から3月16日は、本稿の分析期間に含まれている。この期間中、本稿の分析では1分間隔の実時間に対してブラウン運動に近い1.5付近の次元が得られており、ティック時間を用いた場合では次元は1.6を超えて反持続性が示されている。具体的には、2つの分析期間のうちの第1の期間になるべく近い1998年10月26日から11月27日の5週間の平均を求めると、実時間を用いた場合には、ビッド・アスク共に1.52、ティック時間では、ビッド・アスクがそれぞれ1.60と1.61となっている。同様に、1999年1月4日から3月13日までの10週間の週次次元の平均値はビッド・アスクがそれぞれ1.55と1.56、ティック時間では、ビッド・アスクがそれぞれ1.62と1.63となっている。本稿において、より細かい情報を捉えているティック刻みを時間とした場合に、反持続性が強く現れたことは、この研究の結果とは整合的である。

このほか、時間軸の替わりに価格軸を粗視化することで、順序以外の時間情報を捨て、価格情報の損失なしに一種のフラクタル次元を測定することもできる[13]。この方法を本稿と

³ルービン米財務長官の在任中唯一のドル売り介入であり、米通貨当局の対円介入としては1995年8月15日以来ほぼ3年ぶりである。

同一のデータに適用した結果から局所箱個数次元を推定すると、おおむね同様の変動が観察された [14].

最後に、以上の結果は、円ドルレートを使った投資にどのようなインプリケーションを与えるであろうか。価格時系列に持続性がある場合には、テクニカル分析が有効である可能性がある [19], [21]. 今回のように反持続性が示される場合にも、価格の予想が可能であることを示している。この場合には、実時間あるいはティック時間の進展に対して価格時系列が広がる速さが、ランダムウォークの場合に比べて遅いということである。つまり、価格変動があるレンジに入って、その中で変動している状態に相当する。ただし、2時間あるいは512ティックと非常に短い期間における性質であるため、実際にこれを利用できる市場参加者は限られる。また、反持続性が強い場合には相関係数が低い傾向があるため、予測の精度が落ちる可能性がある。また、次元には週毎の細かい変動と共に1998年を底とした大きな変動も存在している。1998年には為替市場がこのような短期のレンジが以前のように形成できないほど、活発な、あるいは、ボラティルな状態であったのかもしれない。

5. 結び

本稿では、円ドルレートのビット及びアスクの提示価格のティックデータを用いてフラクタル解析を行った。物理的な時間を市場における時間とみなす実時間と、ティック毎に価格過程が進展すると考えるティック時間の2通りの方法でフラクタル次元を測定した。週の5営業日の間24時間取引されている円ドルレートは、実時間で最も長期間連続したデータである。これを今回用いたデータの測定精度である1分毎にサンプリングした1週間5営業日の7200個のデータから、各週のフラクタル次元を測定した。また、ティックの累積を時間とみなした場合についても同様に次元を計算した。本稿では時系列のフラクタル次元の測定において一般的な方法であるHiguchi法を用いて、時間軸の粗視化によるフラクタル解析を行った。しかし、1分毎のデータに等間隔サンプリングする際には、多くの情報を失っている。これは、不等間隔のデータを等間隔にサンプリングし直す場合には避けられないことである。一方、ティックを時間とみなす方法では、より短期間の変動が反映されて、価格の非持続的性質が明らかになる。しかし、自己相似性は実時間の場合より弱い。測定された週次のフラクタル次元は、時期によって変動する。ボラティリティの高い時期に価格時系列の自己相似性が強くなる傾向がある。得られる次元はどちらの時間を用いても次元が1.5を上回る、反持続的な性質がみられる。ティック時間の場合に、より反持続性が強いが、週毎の2つの次元の変動はほぼ同調しているため、次元の差はほぼ一定である。フラクタル次元は、一つの市場においては安定的な数値と考えられる傾向があったが、本稿では、市場の状態を表す指標の一つとして、フラクタル次元そのものの時間による変動を観察することを提案する。

謝辞

本稿の作成にあたり、レフェリー及び編集者から大変有益なコメントを頂いた。厚く御礼申し上げたい。また、プロジェクトへの参加及びデータの使用許可を下さった森平爽一郎氏(慶應義塾大学)、データ及び為替市場全般についての丁寧な解説を頂いた森谷博之氏(オックスフォードファイナンシャルエデュケーション、住商キャピタルマネジメント)に深く感謝したい。なお、いうまでもなく、本稿における誤りは、全て著者の責任である。

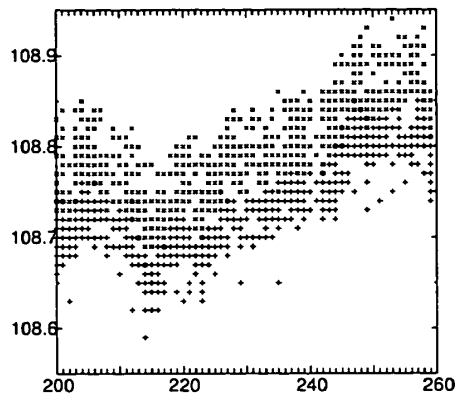


図 1: 提示価格データの一部 (提示時刻表示). データ期間は 2000 年 5 月 8 日 2:00 - 3:00 アメリカ中央時 (アジア取引時間帯). 横軸は記録時刻である. ビッド提示価格は (+), アスク提示価格は (x) で表す. 同一分内に同一価格が記録されている場合, つまり, グラフ上でビッドとアスクが重なる場合は (•) で表示する.

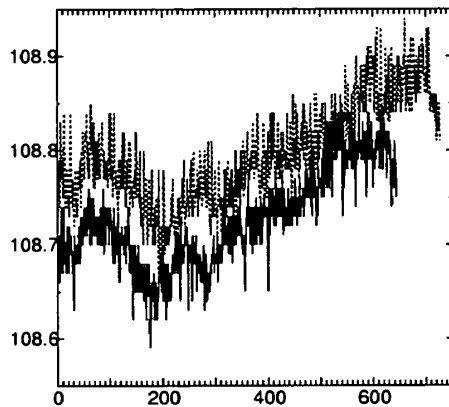


図 2: 提示価格データの一部 (累積ティック表示). データ期間は 2000 年 5 月 8 日 2:00 - 3:00 アメリカ中央時 (アジア取引時間帯). 横軸は 5 月 8 日 2 時からのティック数の累積である. 図 1 と同様のデータだが, ビッド提示価格は (実線), アスク提示価格は (点線) で表す. ビッドとアスクは必ずしも交互に記録されていないため, グラフ上で同一の x 座標を持つビッドとアスクが同時に発生したことを意味しない.

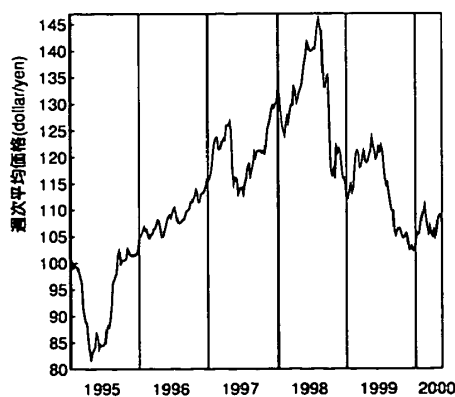


図 3: 円ドルレートの推移. データ期間は 1995 年 1 月 5 日から 2000 年 5 月 26 日である. 1 週間の提示価格の平均値を表示した. この縮尺ではビッドとアスクは図上では判別できない.

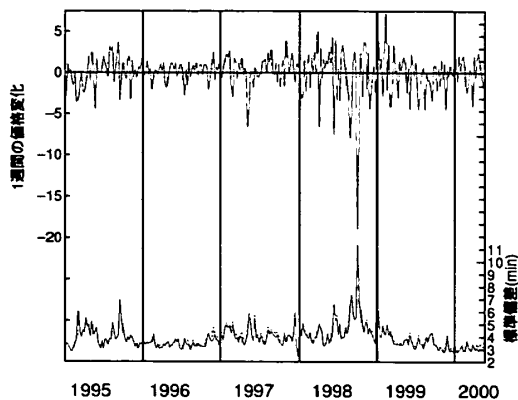


図 4: 円ドルレートのボラティリティ。データ期間は 1995 年 1 月 5 日から 2000 年 5 月 26 日である。週次の価格変化を図の上半分にて左側を参照軸として表示する。ビッド提示価格は (実線)、アスク提示価格は (点線) で表す。この縮尺ではビッドとアスクは図上では判別できない。図の下半分には、ビッドとアスクの 1 分間隔にサンプリングしたデータについて価格変動の標準偏差を右側を参照軸として表示する。

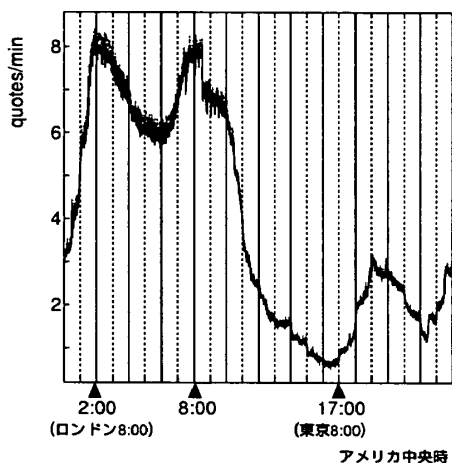


図 5: 1 日の市場の活動周期。データ期間は 1995 年 1 月 5 日から 2000 年 5 月 26 日である。分あたりの提示回数の全期間にわたる平均値を表示した。図 6 から予想されるように、時期によって分あたり提示回数水準は大きく異なる。しかし、1 日の周期の傾向は大きく変化しない。

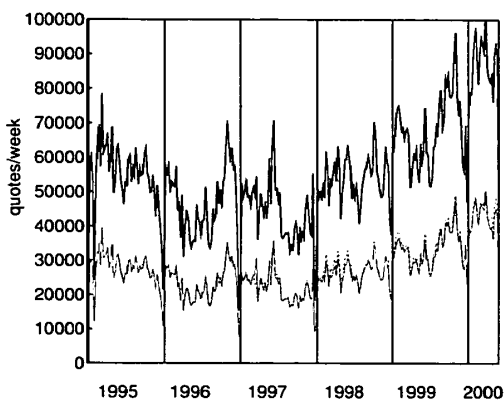


図 6: 週毎の提示価格の度数の推移。データ期間は 1995 年 1 月 5 日から 2000 年 5 月 26 日である。ビッド・アスクそれぞれについて週間の提示価格の度数を集計した。ビッド提示価格は (細い実線)、アスク提示価格は (点線)、また、ビッドとアスクの合計を上のに太い実線で表した。

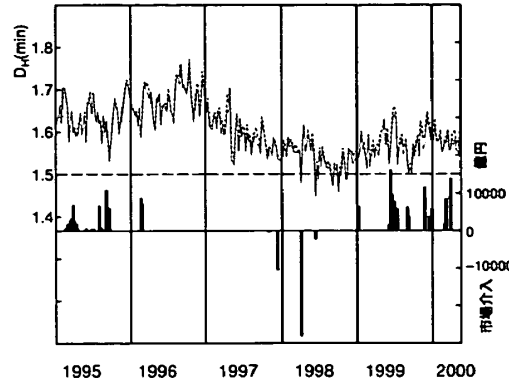


図 7: 週次フラクタル次元 (実時間) と市場介入額. データ期間は 1995 年 1 月 5 日から 2000 年 5 月 26 日である. 1 分間隔にサンプリングしたデータについて Higuchi 法によって週毎に計算したフラクタル次元を図の上半分の左側を参照軸として表示する. ビッド提示価格は (実線), アスク提示価格は (点線) で表す. スケーリング期間は 1 分から 128 分である. 図の下半分には, 週毎の市場介入の総額を右側を参照軸として表示する. 単位は億円, 符号は円売りを正とした.

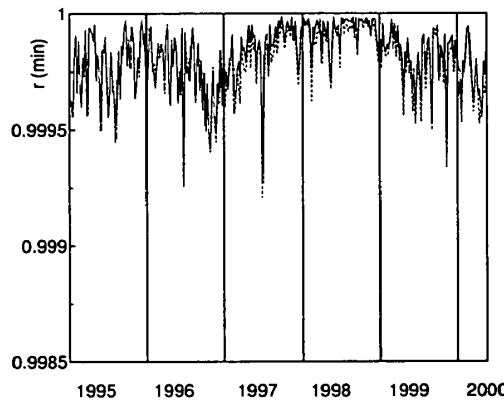


図 8: 週次フラクタル次元測定の際の相関係数 (実時間). 1 分間隔にサンプリングしたデータについて Higuchi 法によって週毎にフラクタル次元を計算する際の $L_H(k)$ と k の両対数グラフの相関係数である. ビッド提示価格は (実線), アスク提示価格は (点線) で表す.

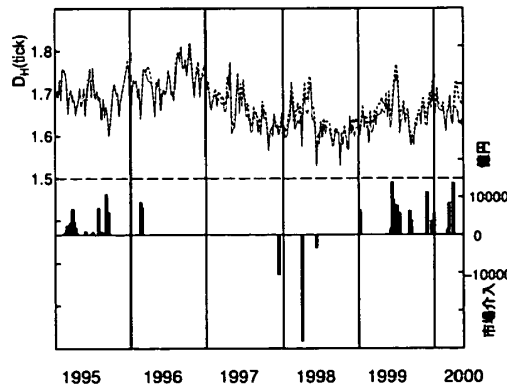


図 9: 週次フラクタル次元 (ティック時間) と市場介入額. データ期間は 1995 年 1 月 5 日から 2000 年 5 月 26 日である. ティックの累積を時間とみなしたデータについて Higuchi 法によって週毎に計算したフラクタル次元を図の上半分の左側を参照軸として表示する. ビッド提示価格は (実線), アスク提示価格は (点線) で表す. 各週のデータ数は図 6 に示した. 両対数グラフに直線を当てはめる範囲 (スケーリング期間) は 2 ティックから 512 ティックとした. 図の下半分には, 週毎の市場介入の総額を右側を参照軸として表示する. 単位は億円, 符号は円売りを正とした.

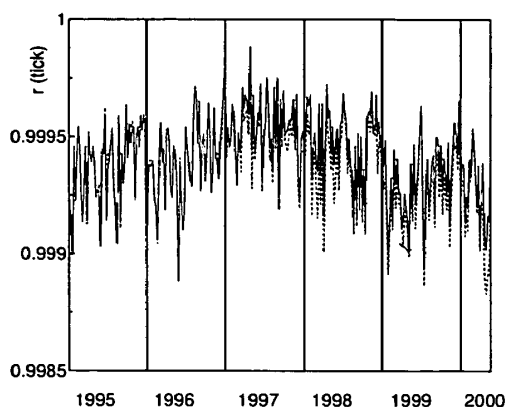


図 10: 週次フラクタル次元測定の際の相関係数 (ティック時間)。ティックの累積を時間とみなしたデータについて Higuchi 法によって週毎にフラクタル次元を計算する際の $L_H(k)$ と k の両対数グラフの相関係数である。ビッド提示価格は (実線), アスク提示価格は (点線) で表す。

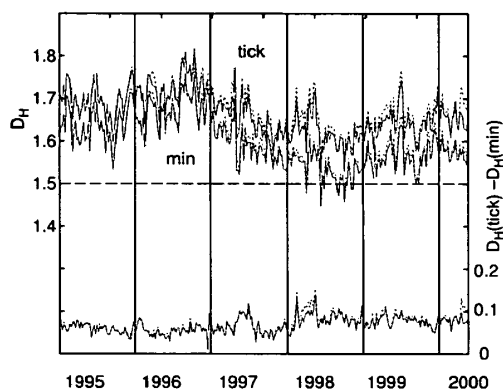


図 11: 週次フラクタル次元 (ティック時間と実時間)。上半分は図 7 と図 9 に示した週毎のフラクタル次元を再び描いた。下半分には、図 7 の次元と図 9 の次元の差を示した。ビッド提示価格は (実線), アスク提示価格は (点線) で表す。

参考文献

- [1] J.-P. Bouchaud and M. Potters: *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management* (Cambridge University Press, 2000).
- [2] L. F. Burlaga and L. W. Klein: Fractal structure of the interplanetary magnetic field. *Journal of Geophysic Research*, **91** (1986) 347-350.
- [3] P. K. Clark: Subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. *Econometrica*, **41** (1973) 135-155.
- [4] M. M. Dacorogna, U. A. Muller, R. J. Nagler, R. B. Olsen, and O. V. Pictet: A geographical model for the daily and weekly seasonal volatility in the foreign exchange market. *Journal of International Money and Finance*, **12** (1993) 413-438.
- [5] R. F. Engle: The econometrics of ultra-high-frequency data. *Econometrica*, **68** (2000) 1-22.
- [6] E. Ghysels: Some econometric recipes for high-frequency data cooking. *Journal of Business and Economic Statistics*, **18** (2000) 154-163.

- [7] C. A. E. Goodhart and M. O'Hara: High frequency data in financial markets: issues and applications. *Journal of Empirical Finance*, **4** (1997) 73-114.
- [8] D. M. Guillaume, M. M. Dacorogna, R. R. Dave, U. A. Muller, R. B. Olsen, and O. V. Pictet: From the bird's eye to the microscope: a survey of new stylized fact of the inter-daily foreign exchange markets. *Finance and Stochastics*, **1** (1997) 95-129.
- [9] O. Gwilym and C. Sutcliffe: Problems encountered when using high frequency financial market data suggested solutions. *Journal of Financial Management and Analysis*, **14** (2001) 38-51.
- [10] 東田啓: 株式市場と為替市場におけるテクニカル分析の有効性と長期記憶性 (持続性) 及びカオス性との関係. *横浜経営研究*, **16** (1996) 354-364.
- [11] T. Higuchi: Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. *Physica D*, **31** (1988) 277-283.
- [12] H. E. Hurst: Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, **116** (1950) 770-808.
- [13] Y. Kumagai: Fractal structure of financial high frequency data. *Fractals*, **10** (2002) 13-18.
- [14] Y. Kumagai: Fractal dimension of high frequency data in foreign exchange market. *Journal of the Korean Physical Society*, **40** (2002) 1100-1104.
- [15] A. Lo: Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*, **59** (1991) 1279-1313.
- [16] B. B. Mandelbrot and J. W. van Ness: Fractional Brownian motions, fractal noises and applications. *SIAM Review*, **10** (1968) 422-437.
- [17] R. N. Mantegna and H. E. Stanley: *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, 2000).
- [18] 岡本雅典: 日別為替レートにおける Hurst 効果. *経済論叢* (広島大学), **9** (1986) 51-58.
- [19] E. E. Peters: *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics* (John Wiley, 1994).
- [20] R. Svetlozar: *Stable Paretian Models in Finance* (John Wiley, 2000).
- [21] 時永祥三・森保洋・宮崎明雄・島津宣之: 時系列のフラクタル性を用いた予測手法とその応用. *電子情報通信学会論文誌 (A)*, **J79-A 11** (1996) 1793-1800.
- [22] A. A. Tsonis, F. Heller, H. Takayasu, K. Marumo and T. Shimizu: A characteristic time scale in Dollar-Yen exchange rates. *Physica A*, **291** (2001) 574-582.

熊谷善彰

慶應義塾大学産業研究所

東京都港区三田 2-15-45

E-mail: kumagai@mbg.nifty.com

ABSTRACT

WEEKLY FRACTAL DIMENSIONS OF YEN-DOLLAR TICK-BY-TICK
EXCHANGE RATES

Yoshiaki Kumagai
Keio Economic Observatory

In this study, we measure the fractal dimension of dollar/yen exchange rates for each week. The tick-by-tick data set of the bid/ask prices submitted by the brokers is used. For analyzing the data, we use two time scales: the physical time and the number of the submitted prices. The data are resampled to one-minute interval when the physical time is used. Using the number of the submitted prices, we can analyze all the data in the order of the records. We calculate the fractal dimensions on this two time scales by Higuchi's method. The main results are as follows. The weekly fractal dimensions vary with time. The fluctuations of the prices tend to have rather strong self-similarity when the market is volatile. The self-similarity is stronger on the physical time than on the number of prices. By using either time scale, the measured fractal dimensions exceed 1.5, which suggest anti-persistence. For any week, this anti-persistence is stronger on the number of the prices than on the physical time. However, the differences between these two dimensions of the same week little vary with time, since the variations of the two synchronize.