Journal of the Operations Research
Society of Japan
Vol. 45, No. 3, September 2002

不満関数を用いる集団区間AHP法

八巻直一　静岡大学
杉山 学　群馬大学
劉 暁東　アイタック
山田善靖　東京理科大学

(受理 2001年7月4日；再受理 2001年12月19日)

和文概要　本論文では，AHP(Analytic Hierarchy Process)を，集団の意思決定に適用するための一方法を提案している．提案する方法は，集団の各メンバが自己の信ずる評価項目間の一対比較値を，区間として提示し，それらから集団の一対比較値を導出する．ここで構成するモデルでは，提示された区間に対し不満関数という概念を導入し，整合性と集団全体の不満をともに最小化する．構成されたモデルは自然であり，合意形成手順として受け入れやすい．

1. はじめに

Saaty [5, 6] によって提案されたAHP(Analytic Hierarchy Process)は，主観や直感を含む意思決定支援ツールであり，多くの適用事例 [9, 11, 12, 13] が報告されている．しかし，AHPは唯一の意思決定者を前提としたツールである．したがって，集団の意思決定に適用するためには工夫が必要である．AHPを集団意思決定に用いる試みは幾つか報告 [1, 7] されているが，それらは必ずしも決定的な手法とはなっていない．しかし，現実の組織的意思決定では，集団の合意形成を伴うことが普通である．したがって，集団AHPを確立することは重要である．

Saaty [7] は，集団の各メンバが自己の主張する評価項目間の一対比較値を提示し，それらの幾何平均値を集団の一対比較値とすることを提案している．他方，山田ら [10] の方法では，集団の各メンバは自己の主張する一対比較値を，区間で提示する．この区間は主張区間と呼ばれ，区間内に集団の一対比較値が含まれることを要請するとともに，区間の幅が狭いほど主張が強く，区間の幅が広いほど主張が弱いことを表す．

しかし，山田らの方法では各メンバの主張区間が共通区間を持たない，という局面がしばしば現れることが知られている．山田らの方法の中では，このような場合の合理的対処について，未解決である．また，山田らの集団区間AHP法では，不満度という概念を導入し，整合度最小化と不満度最小化の2目的最適化問題を構成しているが，導入された不満度は対数最小二乗法から導かれる概念であり，整合度が固有値法から導かれる概念であることと適合しない，という難点を持つ．

本論文では，山田らの集団区間AHP法の持つ問題点を解決し，さらに評価項目が多数であるような場合にも適用可能なモデルを提案する．まず，山田らの定義した不満度の概念を整理して，不満関数という概念を導入し，主張区間の意味付けを再定義する．さらに，大規模問題にしばしば現れる，不完全データに対応できるような発展を与える．

2章では，集団AHPのサーベイと，山田らの集団区間AHP法の概略を述べる．3章では，不満関数の定義と山田らの集団区間AHP法の改良モデルの導出を示す．4章では，誤差モ

デルに基づく大規模AHP[12]について概略を述べ，不満関数を用いた集団区間AHP法を大規模な問題に適用できるように拡張した，大規模集団区間AHP法を提案する．5章では本論文をまとめ，将来の研究課題を検討する．

2. 集団AHPのモデル

AHPは唯一の意思決定者を前提としたツールとして提案されたが，現実に適用される意思決定問題では，複数の意思決定者による合意形成を伴う場合が少なくない．AHPを集団の意思決定問題に適用するために，既にいくつかの方法が提案されており，これらは集団AHPと呼ばれている．集団における意思決定にAHPを適用する際に問題となる点は，集団を構成する各メンバが与えた一対比較値をどのように集約するかである．

集団の意思決定問題にAHPを適用する方法として，Saatyは文献[7]において次の二つ方法を提案している．一つは，集団を構成しているメンバ全員で集団としての一対比較値を決定し，重要度を算出する方法(集団話し合い決定法)である．もう一つは，集団を構成する各メンバが与えた一対比較値をそれぞれ幾何平均し，それを集団としての一対比較値として採用する方法(集団幾何平均法)である．

文献[3]によれば，その他の方法として，各メンバの評価結果として求まった重要度を，算術平均して重要度を求める方法(参加者均等格付け法)，各メンバに対して格付けを積極的に行って集約する方法(アクター法)，各メンバに対する格付けを，各メンバのある種の不満の総和を最小化するように決定して集約する方法(集団意思決定ストレス法)，各メンバの一対比較値を区間値として申告させて集約する方法(集団区間AHP法)などが挙げられる．なお，これらの集団AHPのモデルは，各メンバに対して積極的に重み付けを行うか否かで，大きく分別することができる[3]．

本論文で提案する「不満関数を用いる集団区間AHP法」も，集団における意思決定問題に適用するために開発されたモデルである．

2.1. 集団区間AHP法

山田らが提案する集団区間AHP法は，以下の3つの仮説に基づいて開発された方法である[3, 10]．

[仮説1] 人間は自分の判断をはっきりと決める前にその判断を修正させられる方が，一度はっきりと決めてしまった後に判断結果を替えさせるよりは合意が形成されやすい．

[仮説2] 人間はいろいろの判断の間で相互に矛盾がない結果ほどその結果を受け入れやすい．

[仮説3] メンバは集団の決定結果と自分の決定結果との差異が小さいほど満足する．

3つの仮説より，各メンバが自己の主張に対して，事前に妥協を前提とした余裕を与えるために,「抵抗なく受け入れられる範囲」を提示することとし(これを主張区間と呼ぶ)，各メンバの意見を集約した集団一対比較区間を導出する．この結果から,「整合度を最小」とする一対比較値を導いて重要度を導出する．さらに，算出した重要度が一意に定まらない場合には，各メンバ本来の意見(一対比較値)に最も近い意見から重要度を算出する．

2.1.1. 集団区間AHP法の主張区間と集団一対比較行列の設定

集団区間AHP法では，評価者kが評価項目iと評価項目jの一対比較を行い，かつ，他の相手の意見に対し「抵抗なく受け入れられる範囲」を主張区間とし，以下のように定義している．

$$\begin{aligned} &\left[l_{ij}^{(k)}, u_{ij}^{(k)}\right] && (k=1,\ldots,m\ ;\ i,j=1,\ldots,n), \\ &\left[l_{ji}^{(k)}, u_{ji}^{(k)}\right] = \left[\frac{1}{u_{ij}^{(k)}}, \frac{1}{l_{ij}^{(k)}}\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，$l_{ij}^{(k)}$と$u_{ij}^{(k)}$は，評価者kが与えたi項目とj項目の一対比較値の下限値と上限値を表し，$\left[l_{ij}^{(k)}, u_{ij}^{(k)}\right]$は区間$\{x_{ij}^{(k)} \in R | l_{ij}^{(k)} \le x_{ij}^{(k)} \le u_{ij}^{(k)}\}$を表す．また，$m$は評価者数，$n$は評価項目数である．この主張区間$\left[l_{ij}^{(k)}, u_{ij}^{(k)}\right]$の中には，当然評価者$k$本来の意見$c_{ij}^{(k)}$が含まれ，評価者$k$の意見が強い時には主張区間の幅は狭くなり，意見が弱い時には主張区間の幅は広くなる．ここでは，意見の強さ$d_{ij}^{(k)}$は各メンバが与えた主張区間の区間幅の大きさ$|\ln u_{ij}^{(k)} - \ln l_{ij}^{(k)}|$に反比例すると仮定する．

集団区間AHP法では，集団一対比較値$\left[\tilde{l}_{ij}, \tilde{u}_{ij}\right]$の決定に対して，次のような2種類の方法が提案されている．

a) **主張区間に共通する区間が存在する場合**
各メンバが与えた主張区間の間に共通する区間が存在する場合には，その共通区間を含む最小区間を集団一対比較値とする．

b) **主張区間に共通する区間が存在しない場合**
各メンバが与えた主張区間の間に共通する区間が存在しない場合には，各主張区間を全て含む区間の最小区間を集団一対比較値とする．

2.1.2. 集団区間AHP法の重要度決定法

集団区間AHP法の重要度決定モデルは，各要素が区間値から成る集団一対比較行列$X = \left(\left[\tilde{l}_{ij}, \tilde{u}_{ij}\right]\right)$から，整合度(consistency index : C.I.)が最小となる一対比較値を発見し，その時の重要度w_iを採用するものである．整合度を最小とする一対比較値は必ずしも一意ではないが，その場合には各評価者の不満足の度合いを定義し，集団全体の不満足度(dissatisfaction index : D.I.)の最小化を行う．

重要度決定モデルは以下のように定式化される．

[Model 1]

$$\begin{aligned} \min\quad & \alpha(CI) + \beta(DI), \\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} w_j = \lambda w_i \quad (i=1,\ldots,n), \\ & x_{ij} x_{ji} = 1 \qquad (i,j=1,\ldots,n), \\ & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ & w_i > 0 \qquad (i=1,\ldots,n), \\ & \tilde{l}_{ij} \le x_{ij} \le \tilde{u}_{ij} \quad (i,j=1,\ldots,n). \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，目的関数のα, βは目標計画法の付順方式で用いられる順位係数に相当する係数である．なおこの重要度決定モデルの固有方程式の条件において，ペロン・フロベニウスの定理から重要度が正値であるという条件のみで，λが最大固有値であることが保証される．

また，目的関数のCIは整合度であり，一対比較行列の最大固有値λ_{max}を用いて，

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}, \tag{3}$$

と表される．DIは集団全体の不満足度であり，次のように定義されている．

$$DI = \frac{DS - MDS}{MDS} \tag{4}$$

$$\left(\begin{array}{rcl} DS &=& \sum_{i<j}\sum_{k=1}^{m} d_{ij}^{(k)}(\ln x_{ij} - \ln c_{ij}^{(k)})^2, \\ MDS &=& \sum_{i<j}\sum_{k=1}^{m} d_{ij}^{(k)}(\ln p_{ij} - \ln c_{ij}^{(k)})^2, \\ \ln p_{ij} &=& \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} d_{ij}^{(k)}}\sum_{k=1}^{m} d_{ij}^{(k)} \ln c_{ij}^{(k)}, \\ d_{ij}^{(k)} &=& \frac{1}{\left|\ln u_{ij}^{(k)} - \ln l_{ij}^{(k)}\right| + 1}, \\ c_{ij}^{(k)} &=& \sqrt{l_{ij}^{(k)} \cdot u_{ij}^{(k)}}. \end{array}\right).$$

3. 不満関数と集団区間AHP法の改良

本論文で提案する集団区間AHP法は，不満関数という概念の導入により，山田らの集団区間AHP法 [10] を改良するものである．不満関数を用いることにより，各評価者の主張区間を合成するための合理的な基準を与えることが出来る．本章では，この不満関数を用いた集団区間AHP法について考え方と枠組みを与える．

集団の一対比較区間は，すべての一対比較について，集団としての不満の大きさをある閾値以下にするように決定される．さらに，重要度ベクトルを求めるモデルは，対数最小二乗法に基づく最適化問題の解として与えることとする．与えられた数理計画問題は，非常に平易な問題となる．

3.1. 不満関数の導入による主張区間の新しい意味付け

不満関数は，集団の各メンバが一対比較値に対して提示した主張区間に応じて定義される．一対比較値は，評価項目iに対する評価項目jの重要度の比x_{ij}で表される．ここでは，メンバkの一対比較値$x_{ij}^{(k)}$を対数変換した値に対する主張区間を，$(p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)})$と表すこととする．ここで，$p_{ij}^{(k)}$は主張区間の中央値，$q_{ij}^{(k)}$は幅である．主張区間の新しい意味付けは，$\bar{x}_{ij}^{(k)} = \log x_{ij}^{(k)}$と置いたとき，$p_{ij}^{(k)} - q_{ij}^{(k)} \leq \bar{x}_{ij}^{(k)} \leq p_{ij}^{(k)} + q_{ij}^{(k)}$となるように集団の一対比較値$\bar{x}_{ij}$が定まって欲しいという希望を表すものとする．すなわち，主張区間の外に集団の一対比較値が定まれば，主張区間の提示者の不満は非常に大きくなると解釈する．もし，不満の程度が定量化されているとすると，不満がある閾値を超えなければ，主張区間の外に集団の一対比較値が定まっても許容することを意味する．

Model 1における不満度の定義では，主張区間の中央で不満度が0となり，離れるに従って2次関数的に増大する．このとき，主張区間の外では急激に増大する性質はない．それに対して，ここで定義する不満関数は，主張区間の中では緩やかに増大し主張区間の外では急激に増大する．この性質によって，主張区間の意味がより明確化される．

3.2. 不満関数の定義と性質

上記のように主張区間の解釈をするならば，主張区間内では不満が小さく主張区間の外では急激に不満が大きくなるような，不満の程度を表す関数が存在するはずである．ここで

は，次のような区分的2次関数gで模型化する．gをここでは不満関数と呼ぶ．

$$g(x|p,q)=\begin{cases} b(x-p+\eta)^2+aq\eta, & x\le p-q \\ a(x-p)^2, & p-q<x\le p+q \\ b(x-p-\eta)^2+aq\eta, & p+q<x \end{cases}.$$

ただし，$0<a\ll b, 0<q$,

$$\eta=\left(1-\frac{a}{b}\right)q.$$

関数gの基本的な性質は，次のとおりである．

1. 狭義凸関数であり，$x=p$で最小値$g(p|p,q)=0$をとる．
2. $p-q\le x\le p+q$の範囲では小さな値をとり，$g(p\pm q|p,q)=aq^2$, $x<p-q$または$p+q<x$では急激に大きな値をとる．
3. gは2階微分可能である．

集団の一対比較値$\bar{x}_{ij}$を決定するとき，m人中の評価者kの主張区間$(p_{ij}^{(k)},q_{ij}^{(k)})$に対して，不満関数は$g(\bar{x}_{ij}|p_{ij}^{(k)},q_{ij}^{(k)})$と定義される．集団の一対比較値$\bar{x}_{ij}$を決定する際に対する全員の不満の大きさは，これらの和で表すのが自然であろう．ここでは，評価者の数で正規化して，平均値を集団の不満関数と定義する．すなわち，集団の一対比較値$\bar{x}_{ij}$に対する集団の不満の大きさは，

$$g_{ij}(\bar{x}_{ij})=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}g(\bar{x}_{ij}|p_{ij}^{(k)},q_{ij}^{(k)}), \tag{5}$$

ただし，

$$\eta_{ij}^{(k)}=\left(1-\frac{a}{b}\right)q_{ij}^{(k)}, \tag{6}$$

と表される．gの性質より，g_{ij}は狭義凸であり一意の最小点$\bar{x}_{ij}^*$を持つ．さらに，全てのijについて平均値をとることにより，集団一対比較行列全体の不満の大きさの尺度とする．すなわち，メンバ全体の不満の大きさは，次のように表される．

$$G(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(\bar{x}_{ij}). \tag{7}$$

ここで，$\bar{X}$はij要素が$\bar{x}_{ij}$である正方行列である．したがって，集団の合意形成においては，Gを最小とするような$\bar{X}$を採用することが望ましい．このとき，Gはやはり狭義凸である．

いま，m人の評価者の主張区間$(p_{ij}^{(k)},q_{ij}^{(k)}), k=1,\ldots,m$; $i,j=1,\ldots,n$について，$p_{ij}^{(1)}\le\cdots\le p_{ij}^{(m)}$であるとし，区間$I_{ij}^{(k)}=[p_{ij}^{(k)}-q_{ij}^{(k)},p_{ij}^{(k)}+q_{ij}^{(k)}], k=1,\ldots,m$とする．

性質 1： 任意の実数$\bar{x}$について，添え字集合を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} L_{ij}(\bar{x}) &= \left\{k|\bar{x}\le p_{ij}^{(k)}-q_{ij}^{(k)}\right\}, \\ C_{ij}(\bar{x}) &= \left\{k|p_{ij}^{(k)}-q_{ij}^{(k)}<\bar{x}<p_{ij}^{(k)}+q_{ij}^{(k)}\right\}, \\ R_{ij}(\bar{x}) &= \left\{k|p_{ij}^{(k)}+q_{ij}^{(k)}\le\bar{x}\right\}. \end{aligned}$$

ここで，$L_{ij}(\bar{x}), C_{ij}(\bar{x}), R_{ij}(\bar{x})$ の要素数をそれぞれ $m_l(\bar{x}), m_c(\bar{x}), m_r(\bar{x}), (m_l(\bar{x})+m_c(\bar{x})+m_r(\bar{x}) = m)$ とする．

このとき，$g_{ij}(\bar{x})$ を最小とする $\bar{x}^*_{ij}$ は，次の等式を満足する．

$$\bar{x}^*_{ij} = \frac{m_l(\bar{x}^*_{ij})b\mu_l + m_c(\bar{x}^*_{ij})a\mu_c + m_r(\bar{x}^*_{ij})b\mu_r}{m_l(\bar{x}^*_{ij})b + m_c(\bar{x}^*_{ij})a + m_r(\bar{x}^*_{ij})b}, \tag{8}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\mu_l(\bar{x}) &= \frac{1}{m_l(\bar{x})} \sum_{k \in L_{ij}(\bar{x})} (p^{(k)}_{ij} - \eta^{(k)}_{ij}), \\
\mu_c(\bar{x}) &= \frac{1}{m_c(\bar{x})} \sum_{k \in C_{ij}(\bar{x})} p^{(k)}_{ij}, \\
\mu_r(\bar{x}) &= \frac{1}{m_r(\bar{x})} \sum_{k \in R_{ij}(\bar{x})} (p^{(k)}_{ij} + \eta^{(k)}_{ij}).
\end{aligned}$$

性質 2： $I_{ij} = \bigcap_{k=1}^{m} I^{(k)}_{ij} \neq \emptyset$ ならば，$\bar{x}^*_{ij} \in I_{ij}$ であり，

$$\bar{x}^*_{ij} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} p^{(k)}_{ij}, \tag{9}$$

$$g_{ij}(\bar{x}^*_{ij}) = \frac{a}{m}\sum_{k=1}^{m}(p^{(k)}_{ij} - \bar{x}^*_{ij})^2, \tag{10}$$

となる．

性質 3： 「性質 1」より，$0 < a \ll b$ のとき，$\bar{x}^*_{ij}$ は近似的に，

$$\bar{x}^*_{ij} = \frac{m_l(\bar{x}^*_{ij})\mu_l + m_r(\bar{x}^*_{ij})\mu_r}{m_l(\bar{x}^*_{ij}) + m_r(\bar{x}^*_{ij})}, \tag{11}$$

$$g_{ij}(\bar{x}^*_{ij}) = \frac{b}{m}\left\{m_l\sigma_l^2 + m_r\sigma_r^2 - \frac{(m_l\mu_l + m_r\mu_r)^2}{m_l + m_r}\right\}, \tag{12}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\sigma_l^2 &= \frac{1}{m_l} \sum_{k \in L_{ij}(\bar{x}^*_{ij})} (p^{(k)}_{ij} - \eta^{(k)}_{ij})^2, \\
\sigma_r^2 &= \frac{1}{m_r} \sum_{k \in R_{ij}(\bar{x}^*_{ij})} (p^{(k)}_{ij} + \eta^{(k)}_{ij})^2,
\end{aligned}$$

となる．

「性質 2」および「性質 3」より，$0 < a \ll b$ ならば，$\bar{x}^*_{ij}$ は a, b とは，ほとんど無関係に決定されることが分かる．また，a, b は不満のスケールを決定するパラメータであり，不満の大きさは，ほぼ a または b に比例する．

3.3. 不満関数を用いた集団一対比較値の許容区間の決定

集団区間AHP法での主張区間は，集団一対比較値に対する妥協の範囲と主張の強さを表現する．不満関数g_{ij}を用いることにより，主張区間を次の意味で整理できる．

- 集団一対比較値が主張区間の中に決定された場合g_{ij}は非常に小さな値をなる．
- 集団一対比較値が主張区間の外に決定された場合g_{ij}は非常に大きな値となる．
- g_{ij}は関与する評価者の不満の平均値なので，集団一対比較値が決定された場合の，集団としての不満の大きさを表す．

このことより，集団の一対比較値の決定には，例えば$\min g_{ij}(\bar{x})$となるような$\bar{x}^\sharp$を選べばよい．また，$g_{ij}(\bar{x})$を最小にする$\bar{x}_{ij}^\sharp$をij要素とする行列$\bar{X}^\sharp$は，$G(\bar{X})$の最小値を与える．したがって，不満の大きさを最小にすることによって，集団の一対比較行列を決定するには，次の問題1を解けばよい．

問題1： $\min G(\bar{X})$.

しかしながら，問題1の解$\bar{X}^\sharp$を集団一対比較行列とするとき，必ずしも整合度がよいとは限らない．あるいは誤差モデルによれば，最小二乗誤差(以下，誤差という)が大きくなる可能性がある．そこで本論文では，不満の大きさ$G(\bar{X})$の値をある程度以下に押さえながら，誤差を最小にすることを考える．

そのために，ここでは集団一対比較値に対する許容区間を定義する．

[定義1] 集団一対比較値の許容区間：

すべてのijについて，$g_{ij}(\bar{x}) \leq F$を満たす区間$[\bar{l}_{ij}, \bar{u}_{ij}]$を許容区間という．ここで，$F$は許容される集団の不満値の上限である．

もし，上のような条件を満たす区間が存在しなければ，集団の不満値をF以下にする一対比較値は存在しないことになる．すべてのijに対して$[\bar{l}_{ij}, \bar{u}_{ij}]$が存在すれば，許容区間内に集団一対比較値が定まり，$G(\bar{X}) \leq F$を満たす．すなわち，集団一対比較値の許容区間は，集団の不満値が一定の閾値を超えないような区間として，定義されたことになる．

3.4. 集団の重要度ベクトルの決定

山田ら [10] は，集団の一対比較行列の各要素について区間制約を設定し，逆数対称性の条件を付加した上で，整合度最小問題を解くことにより集団の一対比較行列を決定している．

ここでは，山田らの方法での問題点である「集団一対比較値の区間値の定め方」を，定義1にしたがって定めることで合理的な解決を試みる．また，不満関数の定義は誤差モデルと適合しているので，重要度ベクトルの導出には対数最小二乗法を用いることとする．このとき，集団の一対比較行列$\bar{X}$および集団の重要度ベクトル$\bar{w}$は，山田らのモデルに従えば以下の2目的最適化問題として定義される．

[Model 2]

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(\bar{X}, \bar{w}) = \frac{\delta}{2}\|\bar{X} - \bar{w}\mathbf{1}^\top + \mathbf{1}\bar{w}^\top\|_F^2 + \gamma G(\bar{X}), \\
\text{s.t.} \quad & \bar{L} \leq \bar{X} \leq \bar{U}, \\
& \bar{X} + \bar{X}^\top = 0, \\
& \bar{w}^\top \mathbf{1} = \kappa.
\end{aligned} \tag{13}$$

ここで，$\mathbf{1}$はすべての要素が1であるようなベクトルであり，δ, γは正のパラメータである．

そして，κは任意の定数であるが，$w^\top \mathbf{1} = 1$となるように選ぶことが出来る．また，$\| \quad \|_F$はフロベニウス・ノルムを表す．

この重要度決定モデルは対数最小二乗法に基づく最適化問題であるので，解きやすく，かつ不満関数の定義ともよく適合している．

3.5. 改良型集団区間AHP法の数値例

本節では，本論文で提案された不満関数を伴う集団区間AHP法を使った簡単な数値例を示す．

本数値例では，集団を構成する評価者は2人とし，評価項目は4個とする．また，評価者kが与えた主張区間$[l_{ij}^{(k)}, u_{ij}^{(k)}]$を要素とする一対比較行列を$X^{(k)} = \left(\left[l_{ij}^{(k)}, u_{ij}^{(k)}\right]\right)$とする．各評価者による一対比較行列が，以下のように与えられたものとする．

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [4,6] & [6,8] \\ [\frac{1}{3},1] & 1 & [2,3] & [\frac{1}{3},1] \\ [\frac{1}{6},\frac{1}{4}] & [\frac{1}{3},\frac{1}{2}] & 1 & [\frac{1}{7},\frac{1}{3}] \\ [\frac{1}{8},\frac{1}{6}] & [1,3] & [3,7] & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & [2,4] & [1,3] & [7,8] \\ [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & 1 & [1,4] & [\frac{1}{5},\frac{1}{2}] \\ [\frac{1}{3},1] & [\frac{1}{4},1] & 1 & [\frac{1}{2},1] \\ [\frac{1}{8},\frac{1}{7}] & [2,5] & [1,2] & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

閾値Fの決定は，g_{ij}の最小値の中で一番大きい値とする．このように決定されたF以上の閾値に対して，問題(13)は実行可能解を持つ．

この例では，$a = 0.1$, $b = 10.0$と設定した結果，集団不満の閾値は$F = 0.442$となる．したがって，各ijの集団一対比較値の許容区間は，以下のように決定される．

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & [0.402, 1.367] & [1.097, 1.385] & [1.674, 2.288] \\ [-1.367, -0.402] & 1 & [0.400, 1.385] & [-1.325, -0.404] \\ [-1.385, -1.097] & [-1.385, -0.400] & 1 & [-0.896, -0.896] \\ [-2.288, -1.674] & [0.404, 1.325] & [0.896, 0.896] & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

これを対数変換する前の一対比較値に戻すと以下のようになる．

$$X = \begin{pmatrix} 1 & [1.495, 3.924] & [2.995, 3.995] & [5.333, 9.855] \\ [0.255, 0.669] & 1 & [1.492, 3.995] & [0.266, 0.668] \\ [0.250, 0.334] & [0.250, 0.670] & 1 & [0.408, 0.408] \\ [0.101, 0.187] & [1.498, 3.762] & [2.450, 2.450] & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

ここで$\delta = 2.0$, $\gamma = 1.0$と設定し，重要度決定モデル(13)を解いた結果得られた一対比較行列$X = (x_{ij})$と重要度$w = (w_i)$は，

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 3.113 & 2.995 & 7.000 \\ 0.321 & 1 & 1.492 & 0.668 \\ 0.334 & 0.670 & 1 & 0.408 \\ 0.143 & 1.498 & 2.450 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$w=\begin{pmatrix} 0.509 \\ 0.155 \\ 0.003 \\ 0.334 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

となる．誤差は$R = 2.221$，不満値は$G = 0.304$であった．

3.5.1. パラメータの変更による計算結果

そこで次に，δとγの値を変化させ，ウェイトの値の推移，そして，誤差と不満値の関係を計算すると以下の表1のようになった．さらに，ウェイトの値の推移を図1に示す．

表 1: 各ケースによる計算結果

ケース	δ	γ	w_1	w_2	w_3	w_4	誤差	不満値
1	2.0	0.0	0.455	0.114	0.000	0.431	2.174	0.369
2	2.0	0.1	0.451	0.123	0.000	0.425	2.177	0.334
3	2.0	0.2	0.447	0.131	0.000	0.421	2.180	0.314
4	2.0	0.5	0.444	0.139	0.000	0.417	2.182	0.304
5	2.0	1.0	0.444	0.139	0.000	0.418	2.204	0.274
6	2.0	2.0	0.438	0.138	0.000	0.424	2.264	0.233
7	2.0	3.0	0.438	0.138	0.000	0.424	2.343	0.201
8	2.0	5.0	0.438	0.138	0.000	0.424	2.458	0.172
9	2.0	7.0	0.437	0.146	0.000	0.418	2.598	0.149
10	2.0	9.0	0.433	0.154	0.000	0.413	2.688	0.137
11	2.0	10.0	0.426	0.161	0.000	0.412	2.724	0.133
12	2.0	100.0	0.426	0.161	0.000	0.412	2.724	0.133
13	2.0	1000.0	0.426	0.161	0.000	0.412	2.724	0.133

本数値例の結果によれば，重要度はパラメータによって劇的な変動が起こらないことを示している．この例だけで議論を一般化はできないが，多くの数値例で同様の現象が確認されており，重要度がパラメータにとって敏感に変化しない点が，AHPの信頼性の理由の一つと考えられる．

誤差の大きさをx軸にとり不満の大きさをy軸にとって，Model 2 の解をプロットすると単調減少曲線を描く．したがって，図2のグラフを参照することにより，パラメータの決定の参考にすることが出来る．

単調減少であることは，次の補題によって保証される．

補題 1 [4]: パラメータθを伴う次の最適化問題$P(\theta)$を考える．

$$P(\theta): \quad \min_{x \in X_0} \Psi(x,\theta),$$

$$\Psi(x,\theta) = f(x) + \theta g(x),$$
$$f, g\text{:連続},\ \theta \geq 0,\ X_0\text{:凸}.$$

また，$P(\theta)$ は解 x_θ を持つとする．

このとき，以下のことが成り立つ．$\theta_1 \geq \theta_2$ に対して

1. $f(x_{\theta_1}) \geq f(x_{\theta_2})$,
2. $g(x_{\theta_1}) \leq g(x_{\theta_2})$.

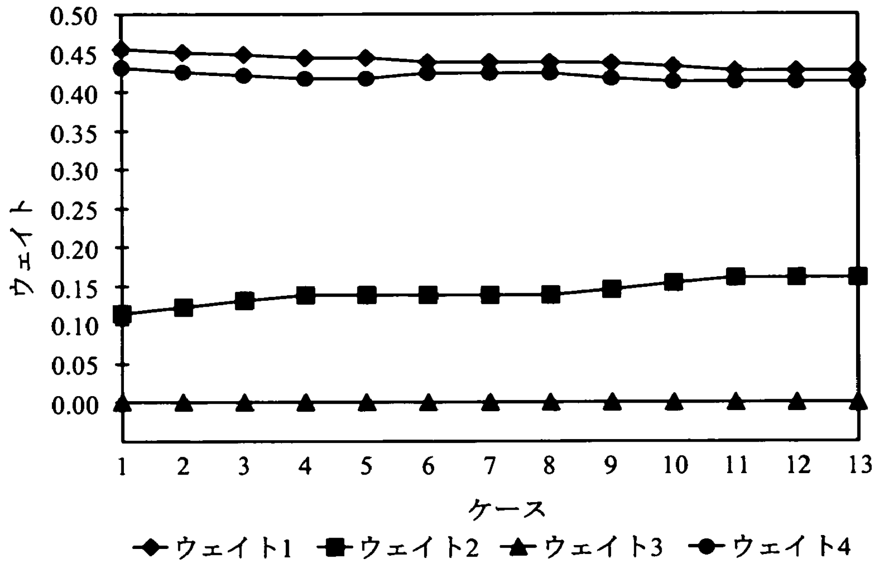

図 1: ウェイトの値の推移

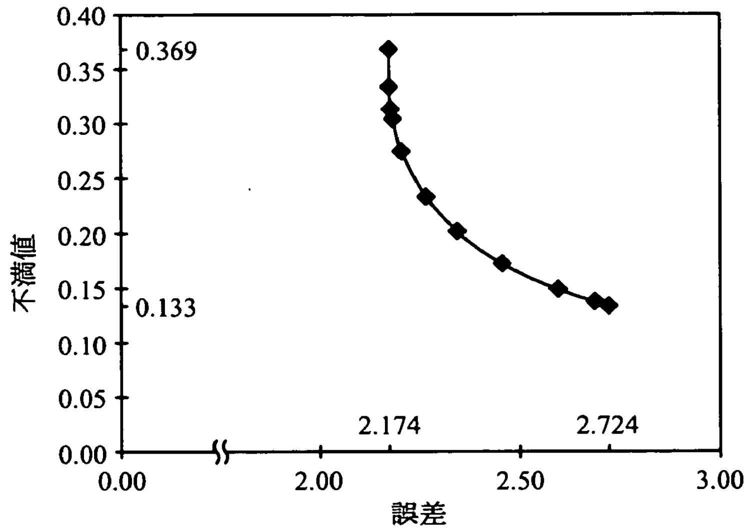

図 2: 誤差と不満値

3.5.2. 従来の集団区間 AHP 法との比較

次に，この不満関数を伴う集団区間 AHP 法の結果を評価するために，山田らの集団区間 AHP 法（Model 1）による結果を示す．この例では，集団一対比較値の区間値は，以下のようなる．

$$X = \begin{pmatrix} 1 & [2,3] & [1,6] & [7,8] \\ [\frac{1}{3},\frac{1}{2}] & 1 & [2,3] & [\frac{1}{3},\frac{1}{2}] \\ [\frac{1}{6},1] & [\frac{1}{2},\frac{1}{3}] & 1 & [\frac{1}{7},1] \\ [\frac{1}{8},\frac{1}{7}] & [2,3] & [1,7] & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

ここで $\alpha = 1.0, \beta = 1.0$ と設定し，重要度決定モデル (2) を解いた結果得られた一対比較行列 $X = (x_{ij})$ と重要度 $w = (w_i)$ は，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2.339 & 3.340 & 7.000 \\ 0.427 & 1 & 2.229 & 0.444 \\ 0.299 & 0.449 & 1 & 0.410 \\ 0.143 & 2.251 & 2.441 & 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$w = \begin{pmatrix} 0.569 \\ 0.153 \\ 0.091 \\ 0.187 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

となる．整合度は $CI = 0.155$，集団全体の不満足度は $DI = 0.008$ であった．

Model 1 と Model 2 ともに，不満の大きさと整合性の大きさに掛かるパラメータを揃えて重要度を求めた．その結果，重要度の1番目と2番目はほぼ一致し，3番目と4番目は幾分異なる値を得た．しかし，順位は同じであった．この結果から直ちに一般化はできないが，この例は Model 1 を用いても Model 2 を用いても，結果に大きな差異は生じないであろうことを示唆している．したがって，評価を行う場合，評価方法の理論的整合性が，結果の受け入れられ易さに決定的な影響があることから，Model 2 の方法が持つ説得力の方が Model 1 に勝るといえよう．

4. 大規模集団区間 AHP 法

本章では，前章までで提案した山田らの集団区間 AHP 法の改良モデルを，さらに拡張して大規模問題に適用できるようなモデルを導出する．まず大規模 AHP[12] を簡潔に説明し，次いで集団区間 AHP 法を大規模 AHP の枠組みに取り込む．これにより，不完全データを伴う場合の集団意思決定に，集団区間 AHP 法を適用することが可能となる．

4.1. 大規模 AHP

従来の集団 AHP は，原則として全一対比較を前提としているため，代替案の数が多い場合には適用が困難である．

また，情報欠落に対する重要度ベクトルの推定についても，ハーカー法など [2, 8] が知られているが，それらは全一対比較のごく一部が欠落している場合を想定している．しかし，多くの代替案を伴う意思決定では，全一対比較が与えられることの方がむしろ例外的であろう．大規模 AHP は，評価者が複数であり評価項目および代替案が多数であるような問題に対して，適用可能となるように拡張されたものである [12].

一方，集団区間AHP法において各メンバは，主張区間内に一対比較値が決定されるならば，自己の希望が叶うという意味で不満はないであろう．逆に，集団の一対比較値が主張区間の外に決定されれば不満は非常に大きい．このような，自然な感情を表すのが不満関数である．ここでは，大規模AHPに不満関数を導入して，各メンバの満足度を測定できるような集団AHPを構成する．

大規模AHPの原理に沿えば，ある一対比較の組について誰も主張区間を提示しない場合と，評価者の一部しか主張区間を提示しない場合を想定する．これにより，評価項目数の大きい問題により適用性が増すことになる．人事評価などでは問題の規模が大きくなり，大規模AHPの有用性が知られている [12]．

大規模AHPでは，一対比較行列という形式ではなく，ネットワークを利用した形式をとっている．

評価者は L 人とし,代替案を n 個とする．このとき第 l 評価者が一対比較した代替案対の集合を

$$K_l = \{\,(i,j)\,|\,\text{代替案}\, i,j (1 \le i < j \le n)\ \text{は第}\ l\ \text{評価者によって相対評価された.}\},$$

とする．第 l 評価者が代替案 i に対して代替案 j を一対比較した場合，その一対比較値を $x_{ij}^{(l)}$ とする．このとき，いずれかの評価者によって一対比較された代替案対の集合 K は $K = \cup_{l=1}^{L} K_l$ であり，また，いずれの評価者からも一対比較されなかった代替案対の集合 $\bar{K}$ は

$$\bar{K} = \{\,(i,j)\,|\,1 \le i < j \le n\} \setminus K, \tag{23}$$

である．

代替案 i を点 i に対応させて，点集合 $V = \{1,\ldots,n\}$ と有向な並列枝の集合 E から構成されるグラフ $G=(V,E)$ を考える．ここで，各枝は各評価者 $l=1,\ldots,L$ 毎に代替案 i,j が $(i,j)\in K_l$ であれば，またその時に限り点 i から点 j へ枝を結ぶことで与えられる．

枝で点対が結ばれている関係を示す一対比較ネットワーク G の接続行列を，$A \in R^{n\times|E|}$ とする．このとき，A の列は枝に対応し，ノード i からノード j への有向枝であるとすると，i 行要素が1，j 行要素が-1であり，その他の行の値は0である．

また，$|E|$ 次元ベクトル b を接続行列 A の列に割り当てられた枝の並びに沿って $\bar{x}_{ij}^{(l)}$ を並べたベクトルとする．ただし，$\bar{x}_{ij}^{(l)} = \log x_{ij}^{(l)}$ である．

接続行列 A とカットベクトル b を利用することにより，誤差モデル (24) は以下のように与えることができる．

$$A^{\top}\bar{w} = b + \epsilon. \tag{24}$$

ここで $\bar{w} = (\bar{w}_1,\ldots,\bar{w}_n)^{\top}$,$\epsilon \in R^{|E|}$ は，接続行列の列に割り当てられた枝の並びに沿って，誤差項 $\epsilon_{ij}^{(l)}$ を並べた誤差ベクトルである．

誤差モデルによる重要度ベクトルは，誤差最小化問題 (25) の解として与えられる．

$$\min \|A^{\top}\bar{w} - b\|. \tag{25}$$

ただし，$\|\quad\|$ は l_2 ノルムを表す．

4.2. 不満関数を用いる大規模集団区間 AHP 法

本節では，大規模AHPのモデルに不満関数を付加することによって，代替案を多数含むような集団意思決定の枠組みの中に，各メンバの不満を低く押さえる合意形成のメカニズムを提案する．

大規模問題を考えるにあたって，次に示す基準化不満関数を適用する．

4.2.1. 基準化不満関数

不満関数は各メンバの主張区間に応じて定義されるが，ここでは，主張区間の端で不満値が1となるように，不満関数をスケーリングすることを考える．

主張区間の端で不満値が1となるようにスケーリングされた不満関数を，基準化不満関数と呼ぶことにする．規準化不満関数は，次のような区分的2次関数hで定義される．

$$h(\bar{x}|p,q)=\begin{cases}\rho(\bar{x}-p+q-\frac{1}{\rho q})^2+1-\frac{1}{\rho q^2}, & \bar{x}\le p-q\\ \frac{1}{q^2}(\bar{x}-p)^2, & p-q<\bar{x}\le p+q\\ \rho(\bar{x}-p-q+\frac{1}{\rho q})^2+1-\frac{1}{\rho q^2}, & p+q<\bar{x}\end{cases}. \tag{26}$$

ただし，ρは十分大きな正の実数である．

関数hの基本的な性質は，次のとおりである．

1. 狭義凸であり，$\bar{x}=p$で最小値$h(p|p,q)=0$をとる．
2. $p-q\le\bar{x}\le p+q$の範囲では小さな値をとり，$h(p\pm q|p,q)=1$, $\bar{x}<p-q$または$p+q<\bar{x}$では急激に大きな値をとる．
3. hは2階微分可能である．

基本的性質より，hは主張区間の端で1をとり，主張区間の内部では1以下である．

定義より，メンバkの一対比較値$x_{ij}^{(k)}$に対する主張区間は，$(p_{ij}^{(k)},q_{ij}^{(k)})$と表わされる．このとき，各メンバの不満は，基準化不満関数により$h(\bar{x}_{ij}^{(k)}|p_{ij}^{(k)},q_{ij}^{(k)})$と表される．したがって，メンバ全体の不満を低くしたいという目的からは，各メンバの不満の平均値を最小とするような集団の一対比較値を決定すればよい．

4.2.2. 大規模集団区間AHP法

大規模集団区間AHP法では，一対比較ネットワークの各ノード間に対して，枝の存在または重複の様子が一定ではない．したがって，ここではある一対比較値に対して集団の主張区間を定めるのではなく，各メンバの主張区間を不満の許容限界から狭めるかまたは広げることで，主張の集約を試みる．ここで，各メンバが許容可能な不満の上限をuとすると，不満の大きさがu以下である区間は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}p-\sqrt{u}q\le\bar{x}\le p+\sqrt{u}q,&\qquad u\le 1,\\ p-q-\frac{1}{\rho q}r\le\bar{x}\le p+q+\frac{1}{\rho q}r,&\quad 1<u.\end{aligned}$$

ただし，$r=\sqrt{1+\rho q^2(u-1)}-1$．したがって，$u=1$の場合は$\bar{x}$のバンド幅が主張区間そのものとなる．$u$は，各メンバの主張区間を許容誤差によって拡大または縮小する意味を持つ．拡大または縮小された区間が，一対比較値の制約バンド幅となる．

また，カットベクトルbと一対比較ネットワークの枝全体Eに対して，メンバ全体の不満の平均値$H(b)$は，以下のように与えられる．

$$H(b)=\frac{1}{|E|}\sum_{(i,j)\in K}h(\bar{x}_{ij}^{(l)}|p_{ij}^{(l)},q_{ij}^{(l)}). \tag{27}$$

一方，誤差モデルより，集団の重要度ベクトルは誤差最小となるように決定されるべきものである．すなわち，$\|A^\top\bar{w}-b\|$を最小とする$\bar{w}$であることが望ましい．ここで，bの要素は一対比較ネットワークにおける各枝の値に対応する．もし，bに制約条件が科せられなけ

れば，この最小化問題は意味を持たない．また，各メンバの許容可能な不満の上限である u を，$u \to 0$ とすれば，各 $\bar{x}_{ij}^{(k)} \to p_{ij}^{(k)}$ となり，問題は既存の大規模 AHP と一致する．

ここで，誤差最小化モデルと不満最小化モデルを合成すれば，基準化不満関数を伴う大規模集団区間 AHP 法のモデルを構成することができる．

[Model 3]

$$\begin{array}{ll} \min & f(\bar{w}, b|u,\theta) = \|A^\top \bar{w} - b\|^2 + \theta H(b), \\ \text{s.t.} & h(\bar{x}_{ij}^{(k)}|p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)}) \le u, \\ & (i,j) \in K, \\ & k \le L. \end{array} \tag{28}$$

ここで，u は正のパラメータであり，各メンバの許容できる不満の上限値を意味する．θ は正のパラメータであり，小さな値のときは集団一対比較値の整合性を重視し，大きな値をとるときは集団全体の不満の最小化を重視することを表す．

4.3.　大規模集団区間 AHP 法の数値例

本節では，基準化不満関数を用いる大規模集団区間 AHP 法の簡単な数値例を示す．

本数値例では，集団を構成する評価者は4人とし，評価項目は4個とする．また，評価者 k が与えた主張区間 $[l_{ij}^{(k)}, u_{ij}^{(k)}]$ を要素とする一対比較行列を，$X^{(k)} = \left(\left[l_{ij}^{(k)}, u_{ij}^{(k)}\right]\right)$ とする．各評価者が与えた評価は，以下のとおりであった．

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [4,6] & - \\ [\frac{1}{3},1] & 1 & [2,3] & - \\ [\frac{1}{6},\frac{1}{4}] & [\frac{1}{3},\frac{1}{2}] & 1 & - \\ - & - & - & 1 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & - & [1,3] & [7,8] \\ - & 1 & - & - \\ [\frac{1}{3},1] & - & 1 & [1,2] \\ [\frac{1}{8},\frac{1}{7}] & - & [\frac{1}{2},1] & 1 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & [2,4] & - & [6,8] \\ [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & 1 & - & [\frac{1}{3},1] \\ - & - & 1 & - \\ [\frac{1}{8},\frac{1}{6}] & [1,3] & - & 1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$X^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & - & - & - \\ - & 1 & [1,4] & [\frac{1}{5},\frac{1}{2}] \\ - & [\frac{1}{4},1] & 1 & [\frac{1}{7},\frac{1}{3}] \\ - & [2,5] & [3,7] & 1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

ここで $\rho = 100$, $u = 1.0$, $\theta = 1.0$ と設定し，重要度決定モデル (28) を解いた結果得られた重要度 $w = (w_i)$ は，

$$w = \begin{pmatrix} 0.588 \\ 0.152 \\ 0.096 \\ 0.164 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

となった．この時の誤差は$R = 3.293$，不満値は$H = 0.639$であった．

5. まとめ

本論文では，山田らの集団区間AHP法の持つ二つの問題点を解決し，大規模問題まで適用可能な実用的な方法を提案した．二つの問題点とは，山田らの集団区間AHP法において各メンバの提示した区間が共通区間をもたない場合の対処が不明確であった点と，最適化問題が代替案の数が多くなると数値解が求めにくくなる点である．

山田らのモデルにおける不満度の定義は，主張区間の中央で0となり主張区間の境界の内と外で滑らかさが一定で下に凸な二次関数となる．したがって，不満の大きさは主張区間の境界付近の内側に集団一対比較値が決定されても，境界付近の外側に決定されても大きな差とならない．主張区間の定義に従えば，主張区間の外側では急激に不満が増加するべきであり，この点がやや欠点といえる．提案の二つモデル，Model 2 と Model 3 は，いずれも上の欠点を補っている．Model 2 では，各一対比較に対して集団の一対比較区間を導出するので，集団の一対比較区間そのものが評価できる．Model 3 では，各メンバの主張区間に対して，許容される不満の大きさによる拡大または縮小を行う．したがって，集団の一対比較区間は定義しない．しかし，結果に対する各メンバの不満の大きさが，直接的に評価できる．

導入した不満関数の考え方は簡単なものであるが，数値実験の結果からは十分な効果が期待されることが実証された．

ここで提案した二つの方法は，以下のように要約されるであろう．

Model 2は，比較的代替案数が少なく，かつ評価者も少ない場合に有効である．この方法では，集団の一対比較値を制約する区間が明示されるので，それ自身を集団で評価することが出来る．しかし，集団の一対比較値を制約する区間の導出は，若干面倒である．

Model 3は，代替案数が大きく，かつ評価者も多い場合に有効である．この方法では，各評価者の提示した主張区間内に一対比較値を決定することが可能である．したがって，許容される不満の大きさによって大きな妥協を図らなくとも，各評価者の主張を受け入れることができる．これが大きな特徴である．

これら二つの方法は十分に両立し，集団意思決定の多くの場面で，効力を発揮するものと思われる．しかし，提案したモデルは，どちらも誤差の最小化と不満の最小化の二つを目的とするので，誤差の最小化と不満の最小化のトレードオフを図る何らかの基準がほしい．どちらのモデルにおいても，モデルのパラメータに対して不満の大きさと誤差の大きさの関係を$x-y$平面上にプロットすると，単調な曲線となることから，集団における合意形成経験が蓄積された後には，この曲線を用いたパラメータの設定基準が与えられるであろう．すなわち，集団での合意形成経験から，その集団での合意形成における誤差の上限と不満の上限が得られれば，その値で曲線を制約することによって，パラメータの設定範囲が特定される．あるいは，各上限以内に解が存在しないことが発見できる．

今後は，さらに多くの問題に適用し実用的なソフトウェアとして配布することを目標とし

たい．また，不満関数となり得るような他のモデルについても，検討する計画である．

参考文献

[1] I. Basak and T.L. Saaty: Group decision making using the analytic hierarchy process. *Mathematical and Computer Modelling*, **17** (1993) 101–109.

[2] P.T. Harker: Alternative modes of qustioning in the analytic hierarch process. *Mathematical Modelling*, **9** (1987) 353–360.

[3] 木下栄蔵 編著: AHPの理論と実際 (日科技連, 2000).

[4] 今野浩, 山下浩: 非線形計画法 (日科技連, 1978).

[5] T.L. Saaty: A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*, **15** (1977) 234–281.

[6] T.L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process* (McGraw-Hill, 1980).

[7] T.L. Saaty: Group decision making and the AHP. B.L. Golden, E.A. Wasil and P.T. Harker (eds.): *The Analytic Hierarchy Process: Application and Studies* (Springer-Verlag, 1989) 59–67.

[8] E. Takeda and P.L. Yu: Assessing priority weights from subsets if pairwise comparisons in multiple criteria optimization problems. *European Journal of Operatinal Research*, **86** (1995) 315–331.

[9] 刀根薫: ゲーム感覚意思決定法 —AHP入門 (日科技連, 1986).

[10] 山田善靖, 杉山学, 八巻直一: 合意形成モデルを用いたグループAHP. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **40** (1997) 236–244.

[11] 八巻直一, 洪時宗, 嶋田駿太郎, 山田善靖, 杉山学: グループAHPの人事評価への適用. 日本オペレーションズ・リサーチ学会 第40回シンポジウム予稿集「AHPの理論と実際」, (1998) 27–30.

[12] 八巻直一, 関谷和之: 複数の評価者を想定した大規模なAHPの提案と人事評価への適用. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **42** (1999) 405–421.

[13] 八巻直一, 嶋田駿太郎: 人事評価にグループAHPを適用する. オペレーションズ・リサーチ, **42** (1997) 367–370.

杉山 学
群馬大学社会情報学部
〒371-8510 前橋市荒牧町4-2
E-mail: `sugi@si.gunma-u.ac.jp`

ABSTRACT

Group Interval AHP by using a dissatisfaction function

Naokazu Yamaki *Shizuoka University*
Manabu Sugiyama *Gunma University*
Xiaodong Liu *ITAC Inc.*
Yoshiyasu Yamada *Tokyo University of Science*

This paper proposes a group consensus making method by using modified AHP (Analytic Hierarchy Process).

Many application examples are reported as a decision-making support tool with AHP. However, AHP is a tool on condition of the only one decision-making person, and if it remains as it is, it is inapplicable to group decision-making. Therefore, it is important to establish a group AHP.

It has proposed that each group member presents the pairwise comparison value between the evaluation items which self believes, and Saaty makes those geometric average value group pairwise comparison value. On the other hand, Yamada, Sugiyama and Yamaki present that each group member has proposed the pairwise comparison value of self to believe in a interval. This intervalis called the interval for assertion.

In this paper, an applicable model is proposed when the problem of the group interval AHP method of Yamada et al. is solved. In this paper, by the introduction of the concept of a dissatisfied function, re-defined semantic of the interval for assertion. By using the dissatisfied function, it is impossible to give the rational standard which is the grade in which each member can permit the result of the group decision-making comes out.

It is determined that the group decision-making will make all members' dissatisfied size below a certain limit value at this time. A weight vector is given as asolution of the optimization problem accompanied by a parameter, and the relation between dissatisfied limit value and the minimum residual of a model is given as a figure. Therefore, the group that uses this model can choose the own decision-making on intention referring to a figure.