

## 階層構造を有する成長現象の微分方程式モデル —家庭用ゲーム機の販売実績に基づく分析例—

中桐裕子 栗田治  
慶應義塾大学

(受理 2000 年 11 月 16 日 ; 再受理 2001 年 9 月 11 日)

**和文概要** 本研究は、従来のモデルでは追従しきれない成長現象を記述するモデルとして、階層構造を有する成長現象の微分方程式モデルを取り上げ、考察を加えるものである。ある種の成長現象は、 $n$ 種の性質を順番に取得するといった「階層的な」構造を持っている。そこで本研究では、ある段階の性質を身に付ける個体数の成長速度が、その段階および直前の段階の性質を入手している個体数に依存するという仮定を設けて、『段階的成長微分方程式モデル』を作成した。同様の仮定から、宅地化を経て市街化面積が広がる様子を上手く記述するモデル等が提案されているが、本研究では、従来の研究にはなかった多段階成長の連立微分方程式に着目して、これに一般解を与える。モデルの適用例としては、特にゲーム機の売上データを取り上げた。ハード購入希望者 → ハード購入者 → ソフト購入者といった階層的な構造を定式化したモデルを実データに当てはめた結果、発売直後のハード売上を再現するには、段階的成長モデルが有効であることが確認できた。更にこのモデルを応用して、値下げキャンペーンによる売上増を記述できる簡便なモデルを作成することに成功した。過去の分析例や今回の研究成果より、ゲーム機売上の記述に留まらず、他の社会現象の中にも、このモデルによる記述が有効な局面も存在するのではないかと考えられる。

### 1. はじめに

私たちの身の回りでは、ここ数年の間に携帯電話が爆発的に普及したり、また目に見えなくても新しい言葉がテレビなどを通じて広がっていたりと、実に様々な成長現象が見られる。本研究はこのような『成長現象』を、構造的な数理モデルで記述することを目的としている。

本稿では成長現象を記述するモデルとして『定数項付指数曲線に段階的成長の考えを取り入れたモデル(本稿中では段階的成長モデルと命名する)』に注目した。このモデルでは、最初は全く無垢だった個体が、時間の経過に伴って徐々に $n$ 通りの性質を身に付けていく、というような現象について考えている。ただし性質 $i$ を取得するには性質 $i-1$ を身に付けておかなければならない、という階層構造を想定する。また、ある時刻に性質 $i$ を新たに身に付ける個体の数は、その時点で直前の段階にあたる性質 $i-1$ を持ってはいるが、性質 $i$ を未だ身に付けていない個体数に比例するものとする。これは次期の子供の数が母親の数に比例する、という自然な成長法則が多段階に存在すると想定していることに他ならない。工場建設を目的とした土地開発を例として述べれば、荒地が整備されて、さらに工場用地へと姿を変えていく過程で、まず荒地の面積が広いほど土地整備の速度が大きく、次に整備が終わった土地の面積が広いほど工場用地が順調に増加していく、といった成長の様子に対応するのである。

実際の動向をこのモデルで表現するにあたっては、次のような仮定を設けた。すなわち、

成長現象に関して我々が入手できる定量的なデータ：例えば人口や土地の用途別面積、商品の売上数などの時系列データは、上で考えた成長過程において、あるひとつの段階の性質を取得した個体数に相当するのだと考えた。つまりある現象がいくつかの不可視な段階を経て、目に見える変化：データとして現れるのだと想定してモデルを作成したのである。こうしたモデルは、同様の仮定を持たない従来のモデルよりも、ある種の現実に対しては当てはまりが良いモデルとなっている。例えば [1] では、宅地化（土地の整備）を経て市街化（住宅などが建設された）面積が広がるという仮定から、実際の市街化が進行する様子を上手く記述するモデルが作られた。また [2] では、潜在的な人口増加を経て実際に人口増加が達成される様子が、同様のモデルによって説明された。

本稿ではまず、「段階的成長モデル」を一般化し、任意の  $n$  段階成長に対する解析解を理論的に導出した。しかる後に、適用対象として人々の購買行動を選び、階層構造を有するモデルの適用可能性とその限界を帰納的に検証している。さらにモデルの応用方法を提案して、これを実際のデータに当てはめた結果を報告する。

本研究の中では、段階的成長モデルを当てはめるデータとしてゲーム機の売上データのみを採用したが、このモデルに当てはまりそうな局面は他にも様々に考えることができる。例えば公共施設数が建設予定→建設中という過程を経て増加する様子や、荒地を開拓した後に農業用地が増加していく様子、携帯電話の普及とこれを利用した犯罪件数の増加という 2 段階成長などへモデルを適用することは有効であるように思われる。本研究中で紹介する段階的成長モデル、およびその応用モデルは、単にゲーム機の売上数を再現する為の手段に留まらず、ある種の成長現象の、背後にある構造を推察する道具となり得ることを強調しておきたい。

## 2. 基本的な概念

この節では、この論文で主に扱うことになる『段階的成長』のモデルについて、例を挙げて基本的な説明をする。

### 2.1. 段階的成長

このモデルでは、成長が段階的に起こると仮定する。例えば工場を建てる時には工場は突然建てられるのではなく、まず工場主がその土地を購入して、次に用地を整備して下準備を行うなど、いくつかの段階を経ないと実際に工場は建設されない。 $y_i(t)$  を工場用地として購入された用地の面積、 $y_{i+1}(t)$  を工場建設のために整備された面積、 $y_{i+2}(t)$  を実際に工場が建設された面積としてその推移を考えると、常に  $y_i(t) \geq y_{i+1}(t)$  を満たすような成長過程が得られるだろう（図 1 上の曲線）。各面積を同心円の面積に対応させると、図 1 下部のような表記も可能である。本稿ではこの表記を多用する。

### 2.2. 段階的成長モデルへの成長曲線の適用

定数項付指数成長とは、ある状態の個体数の成長速度が、まだその状態にはなっていない個体数に比例して決まるような成長のことである。

ある地区の開発を進める場合、その地区の中でまだ手をつけていない土地の面積が広がれば広いほど、開発の余地があるということなので開発がスムーズに進むだろう。このような現象は定数項付指数曲線によって説明が可能である。

この成長を微分方程式で表わしたものが次の式である：

$$\frac{dy(t)}{dt} = b\{S - y(t)\}. \quad (1)$$

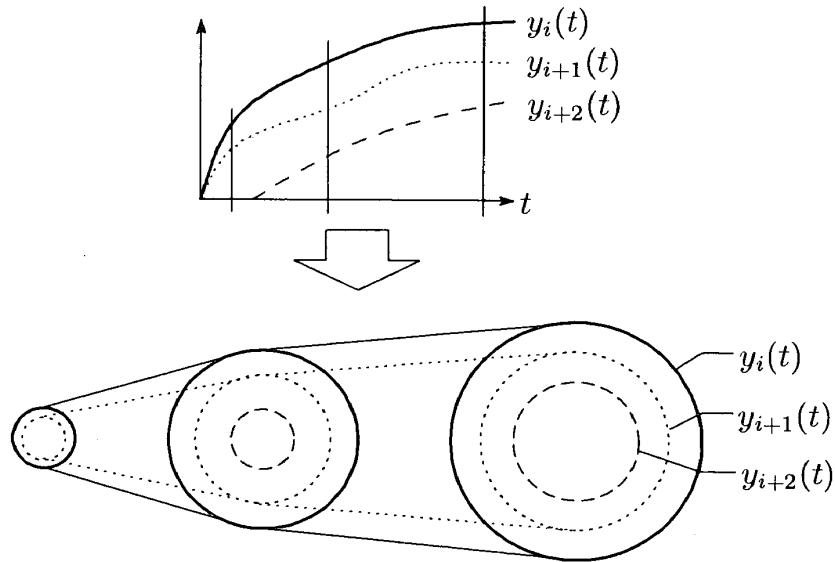


図1 段階的成長の概念図.

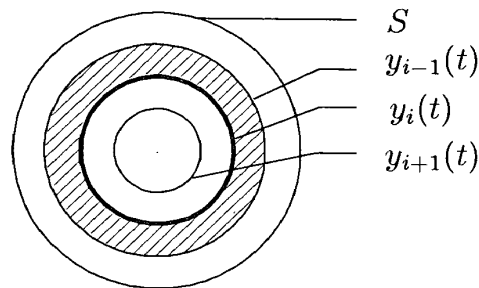


図2 段階的成長モデル概念図.

ここで  $S$  は成長する個体数の許容量を表わし,  $b$  は成長の速さを決定するパラメータである.

本研究では, このパターン of 成長が多段階で起こると仮定して式を立ててみる. つまりどの段階の状態も前の段階の成長が発生した後に発生するという前提をする. さらにその成長速度は, 1 段階前の状態に達してはいるがまだその状態にはなっていない個体数に比例して決まるものとする (図2).  $i$  段階目の状態の個体数を  $y_i(t)$  と置いて, この成長を微分方程式で表わすと次のような式が立てられる:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = b_i \{y_{i-1}(t) - y_i(t)\}. \quad (2)$$

ただし  $y_0 = S$ : 定数とする. こうすると, 1 段階目 ( $i = 1$ ) の成長は, 定数項付指数成長そのものになる. また  $b_i$  は,  $i - 1$  段階目にある個体が  $i$  段階目の状態に変化する成長の速さを決定するパラメータである. (2) で  $i = 1$  とした式 (つまり (1) 式) 及び  $i = 2$  とした式に関しては, 文献 [1], [2] などとその特性や適用例について議論された.

以下の節では, この段階的成長モデルの特徴を見ていくことにする.

### 2.3. 段階的成長モデルの解析

段階的成長モデルの微分方程式 (2) の一般解は, 本研究を通してはじめて下のように算出された:

$$y_i(t) = S - \sum_{u=1}^i \frac{C_u \prod_{m=u+1}^i b_m}{\prod_{l=u+1}^i (b_l - b_u)} e^{-b_u t} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

方程式(2)の一般解が(3)のように求まることを、以下で数学的帰納法によって証明しておく。

**【0】  $i=0$  のとき**

(3)式に $i=0$ を代入すると、次のように計算される：

$$y_0(t) = S.$$

これは、段階的成長モデルの1段階目が定数項付指数曲線に一致する為の条件そのものである。

**【1】  $i=1$  のとき**

(3)式に $i=1$ を代入すると、

$$y_1(t) = S - C_1 e^{-b_1 t}.$$

これを(2)式の両辺にそれぞれ代入して整理する：

$$(\text{左辺}) = (\text{右辺}) = b_1 C_1 e^{-b_1 t}.$$

よって(3)式が成立する。

**【2】  $i=k$  で(3)式が成立すると仮定して、 $i=k+1$  のときを考える。**

$i=k+1$  のとき(2)式は、

$$\frac{dy_{k+1}(t)}{dt} = b_{k+1} \{y_k(t) - y_{k+1}(t)\}. \quad (4)$$

ここで、 $y_{k+1}(t) = Y(t) \cdot e^{-b_{k+1}t}$ (\*) と置いて両辺を微分する：

$$\begin{aligned} \frac{dy_{k+1}(t)}{dt} &= \frac{dY(t)}{dt} \cdot e^{-b_{k+1}t} - b_{k+1}Y(t) \cdot e^{-b_{k+1}t} \\ &= \frac{dY(t)}{dt} \cdot e^{-b_{k+1}t} - b_{k+1}y_{k+1}(t). \end{aligned}$$

これを(4)式に代入する：

$$\frac{dY(t)}{dt} e^{-b_{k+1}t} - b_{k+1}y_{k+1}(t) = b_{k+1} \{y_k(t) - y_{k+1}(t)\}$$

上式を整理すると

$$\frac{dY(t)}{dt} = b_{k+1} \cdot y_k(t) \cdot e^{b_{k+1}t}.$$

さらに帰納法の仮定より、上式は次のように変形できる：

$$\frac{dY(t)}{dt} = b_{k+1} \left\{ S - \sum_{u=1}^k \frac{C_u \prod_{m=u+1}^k b_m}{\prod_{l=u+1}^k (b_l - b_u)} e^{-b_u t} \right\} e^{b_{k+1}t}.$$

上式を $Y(t)$ について解くと

$$\begin{aligned} Y(t) &= S \cdot e^{b_{k+1}t} - \sum_{u=1}^k \frac{C_u \prod_{m=u+1}^k b_m}{\prod_{l=u+1}^k (b_l - b_u)} \cdot \frac{b_{k+1}}{b_{k+1} - b_u} e^{(b_{k+1}-b_u)t} - C_{k+1} \\ &= S \cdot e^{b_{k+1}t} - \sum_{u=1}^{k+1} \frac{C_u \prod_{m=u+1}^{k+1} b_m}{\prod_{l=u+1}^{k+1} (b_l - b_u)} e^{(b_{k+1}-b_u)t}. \end{aligned}$$

(\*) より,

$$\begin{aligned} y_{k+1}(t) &= Y(t) \cdot e^{-b_{k+1}t} \\ &= S - \sum_{u=1}^{k+1} \frac{C_u \prod_{m=u+1}^{k+1} b_m}{\prod_{l=u+1}^{k+1} (b_l - b_u)} e^{-b_u t}. \end{aligned}$$

以上より,  $i = k$  のとき (3) 式が成立すると仮定すると,  $i = k + 1$  のときにも (3) 式が成立することが証明された.

【1】, 【2】より, 連立微分方程式 (2) の一般解が (3) 式で与えられることが証明された. ■

パラメータを与えて  $y_i(t)$  の変化を見た例が図3である. 1段階目 ( $i = 1$ ) の成長曲線: つまり定数項付指数曲線には変曲点がない. この曲線は, 成長速度が初めに最大で次第に遅くなる成長を表しているのである. これに対し2段階目以降の成長は, 立ち上がりから少し時間が経過した後に成長速度が最大となる (変曲点が見れる). 変曲点が見れる時点は変数  $b_i$ ,  $C_i$  の値によって異なる. また, どの段階の曲線も前の段階より大きな値を取ることがなく, 一定値  $S = y_0$  に漸近していく.

ここで, 他のパターンでの成長が多段階で起こる場合について, 考察を加えておく.

まずマルサス法則に基づく成長を考える. マルサス法則とは, ある状態の個体数の成長速度が, その状態にある個体数に比例するというものである. この場合は段階的な成長を考えても, 各段階の個体数の成長速度は他段階にある個体数に依存せずに決定されるので, 個体数の成長曲線は, すべての段階で指数曲線そのものとなる.

次にロジスティック法則に基づく多段階成長曲線について考察したい. ロジスティック法則とは, ある状態の個体数の成長速度が, 既にその状態になった個体数と, まだその状態

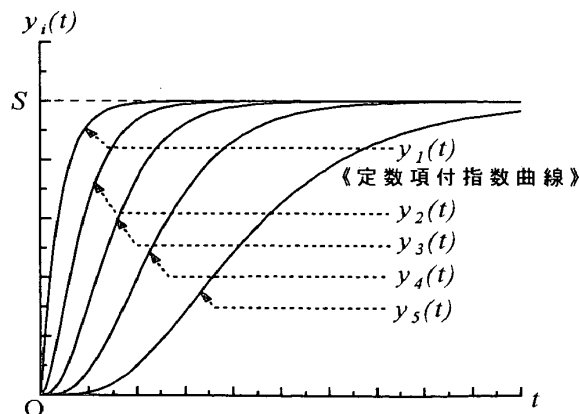


図3 段階的成長モデルの曲線概形.

( $S = 5, b_1(t) = 0.5, b_2(t) = 0.4, b_3(t) = 0.3, b_4(t) = 0.2$ , 各曲線の  $t = 0$  での値が0とした.)

にはなっていない個体数との積に比例するというものであり、この成長は次のような微分方程式で表わすことができる：

$$\frac{dy(t)}{dt} = b \cdot y(t) \{S - y(t)\}. \quad (5)$$

$S$ は成長する個体数の許容量、 $b$ は成長の速さを決定するパラメータである。式(5)は解析的に解くことが出来て、その解は以下の通り：

$$y(t) = \frac{S}{1 - \exp(C - bSt)}. \quad (6)$$

上の曲線は、始めは成長速度が次第に増して行って、個体数が許容量 $S$ のちょうど半分になったときにその速度が最大になり、その後はそれ以前と点対称な推移を見せるような概形となる。

このパターンの成長が、多段階で起こると仮定して式を立てる。つまり各段階の個体数の成長速度が、その段階に既に達している個体数と、1段階前の状態に達してはいるがまだその状態にはなっていない個体数との積に比例して決まるものとする。 $i$ 段階目の状態の個体数を $y_i(t)$ と置いて、この成長を微分方程式で表わすと次のような式が立てられる：

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = b_i \cdot y_i(t) \{y_{i-1}(t) - y_i(t)\}. \quad (7)$$

$y_0 = S$ ：定数、 $b_i$ は、 $i$ 段階目の成長速度のパラメータである。1段階目 ( $i = 1$ ) の成長は、ロジスティック成長そのものである。

連立微分方程式(7)を、パラメータを与えて数値的に解いた例を図4に示す。前述の通り1段階目 ( $i = 1$ ) の成長曲線はロジスティック曲線であるが、それ以降の段階の曲線も、形状がロジスティック曲線と非常に似通っていることが分かる。

以上のように指数成長やロジスティック成長が段階的に起こると仮定しても、それぞれ各段階の成長曲線の形状は、多段階成長を仮定しない場合のそれと（ほぼ）同型であることが示唆された。一方段階的成長モデルでは、成長曲線は図3のように段階を追うに従って顕著に形状を変容させている。この特徴は、段階的成長モデルを $n$ 段階に拡張して求解したからこそ判明したものである。

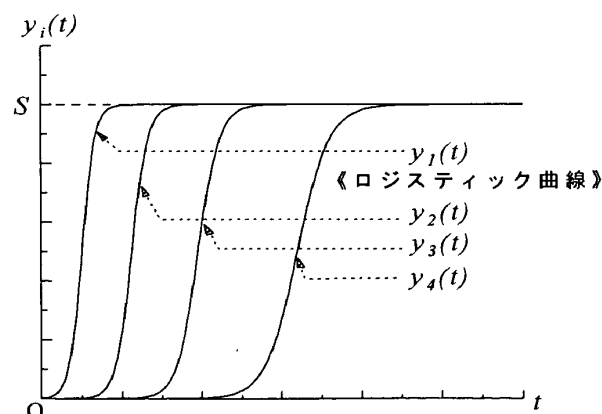


図4 多段階ロジスティックモデルの曲線概形。

( $S = 5, b_1(t) = 0.5, b_2(t) = 0.4, b_3(t) = 0.3, b_4(t) = 0.2$ , 各曲線の初期値を0.01とした.)

### 3. 段階的成長モデルの実例への当てはめ

この章では、実際のデータに段階的成長モデルを当てはめてみて、モデルの実用性について考察をする。データは家庭用ゲーム機本体及びゲームソフトの売上数を用いた。これらのデータを取り上げた理由として、次のようなことが挙げられる。

- ゲームソフトを買う人は必ずゲーム機本体を持っている。つまり必ずゲーム機本体を買った後でゲームソフトを購入する。その構造はモデルで前提にしている段階的成長であるように見える。
- 週ごとの詳しい（1台単位）売上数のデータが容易に入手できる [9] [10]。
- ゲーム機の週毎売上数の増減に、影響を与えるような外的要因（景気変動など）がほとんどない。よってモデルを当てはめて説明するにあたって、データの平滑化などの加工が必要ない。

ゲームソフトが実際に売られるまでの過程を段階的に捉え、売上のデータに段階的成長モデルを少し変形したモデルを当てはめることを試みる。また、微分方程式のクラスを実践的に選択するための指針を追及するために、他の成長曲線の当てはめ結果とも比較して、各曲線が有効な局面を模索する。

#### 3.1. ゲーム機売上のモデル

本研究では、ゲーム機を購入する過程でまずゲーム機本体の購入希望者が増加して、その中から実際の本体購入者が現れるという仮定を設けた。そして更に本体購入者の中からゲームソフトの購入者が出現増加するという段階的成長を仮定したモデル（図5）を作成した。記号を次の通りに定義する：

$$\begin{aligned}
 S &= [\text{最終的な本体売上台数, ハード市場の規模}], \\
 y_1(t) &= [\text{ハード購入希望者数}], \\
 y_2(t) &= [\text{ハード売上台数 (実際に購入した人数)}], \\
 N &= [\text{最終的なハード売上台数 } S \text{ に占める, あるソフトの購入を希望する者の割合}], \\
 &\quad \text{つまり } N \cdot y_2(t) = [\text{ソフト購入希望者数}] \quad (\text{ただし } N \leq 1), \\
 y_3(t) &= [\text{ソフト売上本数}].
 \end{aligned}$$

このとき (2) にならって式をたてると以下の通り：

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = b_1 \{S - y_1(t)\}, \quad (8)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = b_2 \{y_1(t) - y_2(t)\}, \quad (9)$$

$$\frac{dy_3(t)}{dt} = b_3 \{N \cdot y_2(t) - y_3(t)\}. \quad (10)$$

(8)～(10) の解は次のように計算される：

$$y_1(t) = S - C_1 e^{-b_1 t}, \quad (11)$$

$$y_2(t) = S - \frac{b_2}{b_2 - b_1} C_1 e^{-b_1 t} - C_2 e^{-b_2 t}, \quad (12)$$

$$y_3(t) = NS - N \frac{b_2 b_3}{(b_2 - b_1)(b_3 - b_1)} C_1 e^{-b_1 t} - N \frac{b_3}{b_3 - b_2} C_2 e^{-b_2 t} - C_3 e^{-b_3 t}. \quad (13)$$

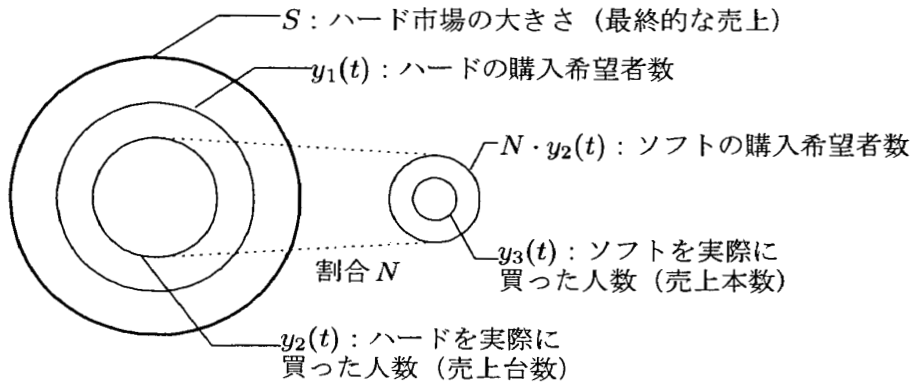


図5 ゲーム機売上モデルの概念図.

### 3.2. 当てはめの方法

本研究では、データに曲線を当てはめる際には全て [3] に準じた方法を取った。例として本体の売上データに曲線 (12) を当てはめる手段について述べておく。時点  $t$  におけるゲーム機の累積売上台数を  $s_t$  として、以下のように残差二乗和を最小にするパラメータ  $S$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $C_1$  及び  $C_2$  の値を各ゲーム機について求めたい:

$$\text{Minimize } \sum_t \left\{ s_t - \left( S - \frac{b_2}{b_2 - b_1} C_1 e^{-b_1 t} - C_2 e^{-b_2 t} \right) \right\}^2. \quad (14)$$

ところで、[3] に準じた方法で以下のように式 (12) を変形すると、等間隔のデータから、これらに当てはまるように曲線のパラメータの値を推定することができる。

まず、実際の売上データなどからゲーム機の最終的な売上  $S$  を適当に推定しておく。

次に推定した  $S$  から第  $i$  期の実データを差し引いた値を  $Y_i$  とおくと、式 (12) は次のように書き換えられる:

$$Y_i = \frac{b_2}{b_2 - b_1} C_1 e^{-b_1 i} - C_2 e^{-b_2 i}. \quad (15)$$

ここで

$$\frac{Y_{i+2}}{Y_i} = \alpha \cdot \frac{Y_{i+1}}{Y_i} + \beta$$

なる  $\alpha$ ,  $\beta$  を求めてみると、

$$\begin{aligned} \alpha &= e^{-b_1} + e^{-b_2} \\ \beta &= -e^{-b_1 - b_2} \end{aligned}$$

であることが容易に導ける。  $Y_{i+2}/Y_i$  及び  $Y_{i+1}/Y_i$  は既知であるので、回帰係数  $\alpha$ ,  $\beta$  を求めると、以下のように  $b_1$ ,  $b_2$  の推定値を決定することができる:

$$b_1, b_2 = -\log \left\{ \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} \right\}.$$



以上で $b_1$ ,  $b_2$ の推定値が求まったので, 式(15)で未知のパラメータは $C_1$ ,  $C_2$ だけになる. これらの推定値は線型最小二乗法によって得られる.

本研究では上のようにして求めた推定値を初期値として, 準ニュートン法による非線型最小二乗法でパラメータの値を決定した.

以下, 本研究では他の成長曲線をデータに当てはめたり, ソフトの売上データに様々な曲線を当てはめたりすることを繰り返し行うが, いずれの場合も同様の手法, すなわち線型最小二乗法によって初期値を与えた上での, 非線型最小二乗法を用いたパラメータの推定を行っている.

### 3.3. 家庭用ゲーム機本体売上への当てはめ

曲線の当てはめに使用したデータは次の通り [10].

1998年11月から1999年5月までの, ゲームボーイ (GB) 本体, ニンテンドウ64 (N64) 本体, プレイステーション (PS) 本体, ドリームキャスト (DC) 本体, ワンダースワン (WS) 本体, ネオジオポケットカラー (Neo) 本体各種の一週間毎累積売上台数.

合わせて6種類のゲーム機売上データを使用した, これらは, 発売してからしばらく経過しているゲーム機 (GB, N64, PS) のデータと, 発売直後のゲーム機 (DC, WS, Neo) のデータに分けることができる. 両者のデータには明確な違いが見て取れ, その動向を記述するのにふさわしい曲線も異なることが本研究で明らかになっている.

段階的成長モデルの有効性やその限界を明らかにする為の比較対象として, 従来よく用いられてきた成長曲線であるところの, 定数項付指数曲線とロジスティック曲線も適用してみよう. ゲーム機本体の売上台数のデータに, 1. 段階的成長を仮定した **段階的成長モデル2段階目の曲線**, 2. 段階的成長を仮定しない **定数項付指数曲線 (段階的成長モデル1段階目の曲線)**, 3. **ロジスティック曲線**の三種類の曲線を当てはめてみた (ロジスティック曲線の一般式は(6)の通り). 先に述べたとおり, 発売直後の売上推移と発売からしばらく経った後の売上推移の二種類のデータを比較したものが図6である.

前者の記述については, 段階的成長モデルの有効性ははっきりと示された (図6a). 図6aからは, 定数項付指数曲線では発売直後の売上の急な伸びが説明しきれないし, ロジスティック曲線でも前半と後半で売上の伸びが異なる点を記述できないことが読み取れよう. 発売からしばらく経った後の状況は段階的成長モデルを適用しなくても, これより単純で, パラメータ数の少ない定数項付指数曲線で十分に説明ができる (図6b). 残差二乗和のグラ

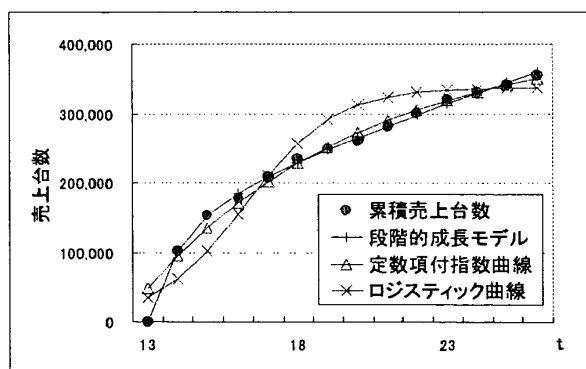


図6a WS本体売上推移と当てはめ結果.

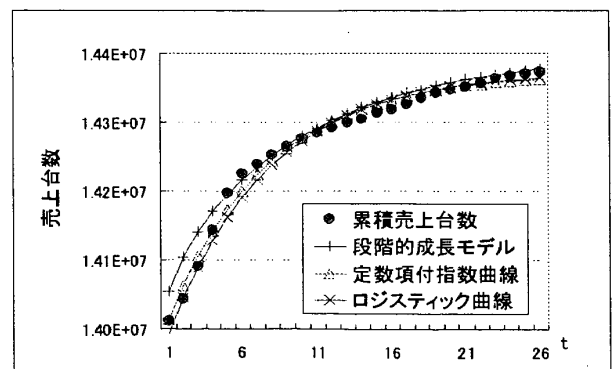


図6b GB本体売上推移と当てはめ結果.

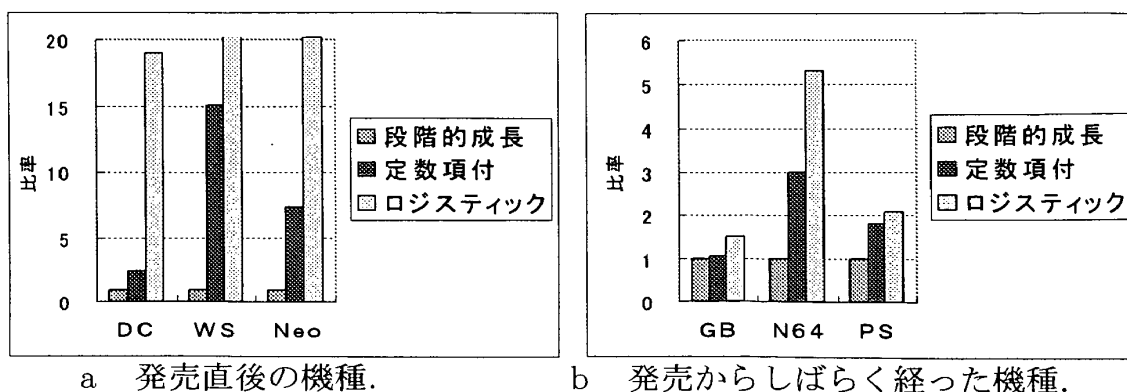


図7 残差二乗和の比較（段階的成長モデルを当てはめたときの残差二乗和を1とする）。

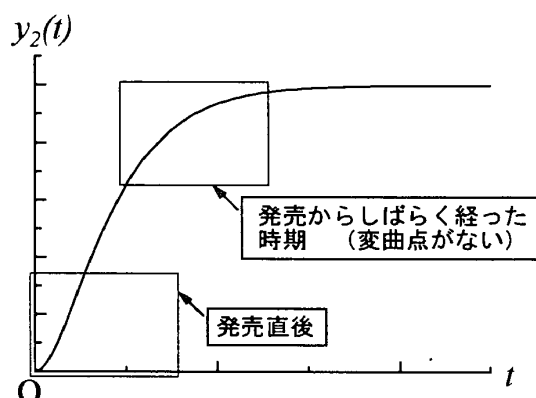


図8 段階的成長モデル2段階目の曲線概形。

フを見ると、対象とした全てのゲーム機において上と同様の傾向が現れているのを確かめることができる（図7）。これはグラフの概形からも予想されることである（図8）。つまり発売から時間が経過した後の売上は、段階的成長モデル2段階目の曲線のうち、変曲点が現れた後の部分に相当する推移を見せる。そしてこのような推移には、狭義凹関数である定数項付指数曲線でも当てはまるのである。

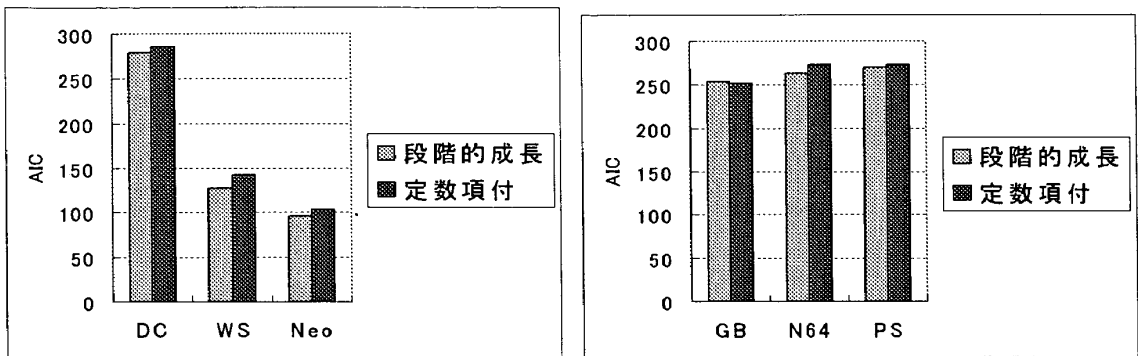
段階的成長モデルは、パラメータ数が5と多いので、他の2つの曲線（パラメータ数3）と比べるとデータへの当てはまりが良くなるのはある意味で当然のことかもしれない。そこで、この点を適切に差し引いて各モデルの当てはまりを検証する為に、パラメータ数の異なるモデルを比較するのに有効な指標であるAICを算出してみた。AICに関しては例えば[5]に詳しい。AICが小さいモデルほど当てはまりの良いモデルとされ、その値は次のように計算できる：

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= -2 \times (\text{モデルの最大対数尤度}) + 2 \times (\text{モデルの自由パラメータ数}) \\ &= \frac{n}{2} \ln \frac{Q}{n} + 2(p+1) + n \ln(2\pi) + n. \end{aligned}$$

ただし $n$ はデータ数を、 $Q$ は最小二乗法を実施したときのモデルの誤差二乗和を、 $p$ はパラメータの数を意味する。上式2行目で第3項以降はパラメータの数によらず一定値を取るなので、第1項と第2項の和が最小になるようなモデルが最適なモデルと判定される訳である。計算の結果を図9に示す。なお、ロジスティック曲線と定数項付指数曲線のパラメータ数は等しいので、この2つのAICの値を比較すると、図7より残差二乗和が小さい定数項付指数曲線の方が、AICが小さいことが明らかである。よって図9では定数項付指数曲線と段階的

成長モデルのみのAICの値を比較している。図9aでは、段階的成長モデルのAICがいずれも最小であるので、発売直後のゲーム機売上の記述には（パラメータ数の多さを差し引いても、）段階的成長モデルが有効であることが確認できた。また図9bでは、特にゲームボーイとプレイステーションの売り上げに当てはめたときに、段階的成長モデルと定数項付指数曲線のAICがほぼ同じ値を取っていることから、発売からしばらく経った後の売り上げ記述には、段階的成長モデルが特に有効という訳ではないことが示された。

最後に、売上推定を行う際に重要な指標となり得る、 $t \rightarrow \infty$ での最終的な売上台数 $S$ の推定値の比較を行う。表1にその結果が示されているが、すべてのゲーム機において、段階的成長モデルによる最終売上台数の推定値が他の二つのモデルによる推定値を上回ることが確認できよう。特に発売直後の機種に関する推定ではその差が顕著である。図10には、ある時点までのデータを用いて成長曲線を当てはめた結果とそれ以降の時点の実データを合わせ示してあるが、この図からは段階的成長モデルの方が、長期にわたる将来の値や最終的な



a 発売直後の機種.                      b 発売からしばらく経った機種.

図9 AICの比較.

表1 最終的な売上台数 $S$ の推定値の比較.

	DC	WS	Neo	GB	N64	PS
段階的成長	1,123,534	977,160	98,843	14,392,189	3,957,479	15,998,966
定数項付	964,555	409,921	77,068	14,370,934	3,579,300	15,500,294
ロジスティック	900,997	337,199	54,108	14,373,507	3,574,939	15,439,452

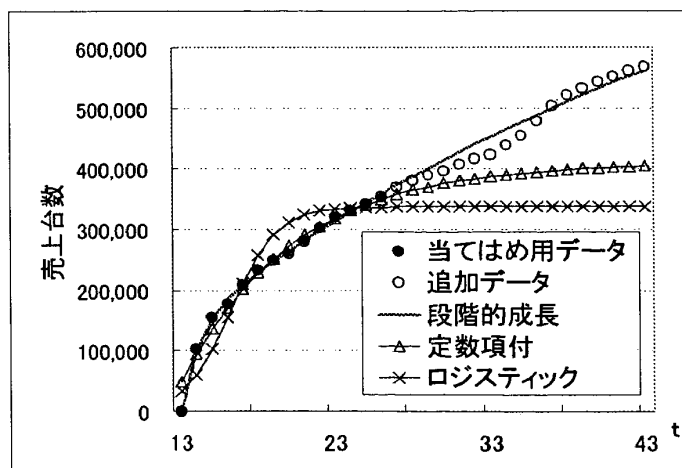


図10 WS本体売上の長期予測と追加データの適合性.

売上をより正しく推定できていることが分かる（定数項付指数曲線とロジスティック曲線は使い物にならない）。発売直後から成長の収束までの様子に適度に追従していることから、ゲーム機本体の購買活動の背後には、段階的成長モデルで仮定したような構造が存在しているのではないかと推察できる。

### 3.4. 家庭用ゲームソフト売上への当てはめ

曲線の当てはめに使用したデータは次の通り [9] [10].

1998年11月から1999年5月までの、ドリームキャスト（DC）対応ソフトの一週間毎累積売上台数。

ソフトの売上データも、ハード発売直後に発売されたソフトのデータと、ハードがある程度普及した後に発売されたデータに分けることができる。しかし両者とも、仮定したような段階的成長モデルの3段階目の式（13）が上手くは当てはまらなかった（図11）。段階的成長モデルの3段階目で仮定したよりも、ソフトの実売上げはより初期のうちに伸びて早い時期に成長が収束しているので、図11a, 図11bともにソフト売上の収束値をかなり高めに見積もってしまう。ハード発売直後のソフトの売上は本体の売上台数を上回ることがないという制約があるために、顕著な売上増加傾向が出るまでに多少時間を要する。このような様子には、かえってロジスティック曲線の当てはまりの方が良い（図11a）。またソフトは本体と比べると安価で購入しやすく、多くの人があるソフトの発売直後に買い求めるという特徴があるために、ハードが普及した後はソフトの売上推移には段階的な成長を仮定（『買いたいと思っている人』を仮定）しない定数項付指数曲線が当てはまることが分かった（図11b）。このようにソフトの売上推移という現象は、段階的成長モデルよりもパラメータ数の少ない単純なモデルで十分に説明が可能であり、多段階成長モデルを適用するまでもないことが判明した。なおソフト購入の際には、そのソフトを使った経験からソフトの評判などは気にせず、発売と同時に買い求める層も少なからず存在するかもしれない。このことを考慮して、固定的な初期売上に段階的成長モデルの3段階目の式を上乗せした曲線（つまり3段階目の曲線を縦方向に平行移動させた曲線）をデータに当てはめることも試みた。この結果多少は当てはまりの改善が見られたが、やはりこの曲線も、ロジスティック曲線や定数項付指数曲線ほどの再現性を持つことはなかった。

以上の考察より、各成長曲線が当てはまる局面を表2のようにまとめることができる。

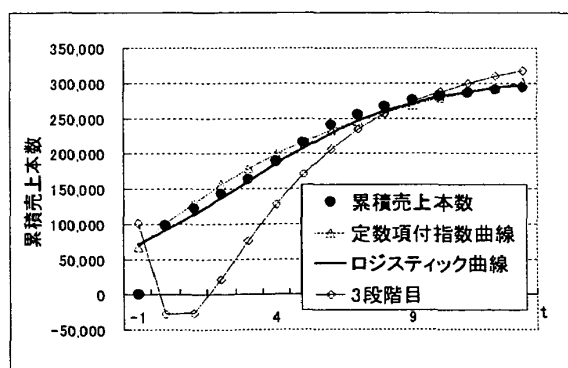


図11a バーチャファイター3tb売上推移と当てはめ結果.

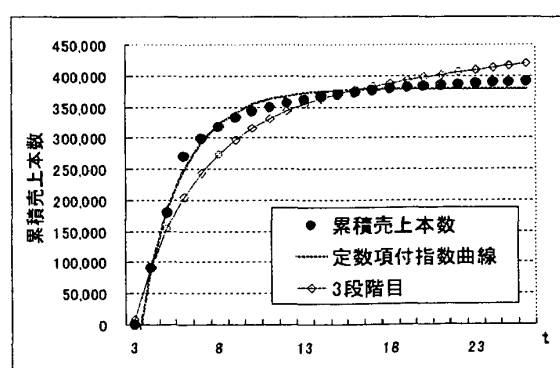


図11b SONIC ADVENTUER売上推移と当てはめ結果.

表2 成長曲線の使い分け.

段階的成長 モデル	一段階目 $y_1(t)$ <定数項付指数曲線>	・容易に実行可能な物事の成長 ・発生から時間が経った現象の成長
	二段階目 $y_2(t)$	発生直後の現象の成長
	三段階目 $y_3(t)$	※式が複雑なので適当な現象を 選ばないと当てはまりが悪い
ロジスティック曲線		発生直後の現象に付随する物事の成長

4. 段階的成長モデルの応用 一値下げキャンペーン時売上増加の記述一

段階的成長モデルは非常に簡便なモデルであり、操作性が良い。この章ではモデルに簡単な仮定を付け加えて、ある出来事をきっかけに現象の成長が促進される様子を記述するモデルを作成する。結果として、成長促進の背後にある構造を推察できるような、簡便で記述性の良いモデルを導くことに成功した。

4.1. キャンペーンによる売上増加のモデル

次のような仮定をたてて、キャンペーン時に売上が伸びる様子を説明することを試みる(図12)：

時刻  $T$  からのキャンペーン(例えば値下げ)によって、最終的な売上  $S_0$  が、瞬間的に  $S_0 + S_c$  に増える。 $S_c$  は、キャンペーン効果を表わす指標とみなせる。ただし、それ以外のときの売上台数推移は段階的成長モデルで説明が可能であるとする。

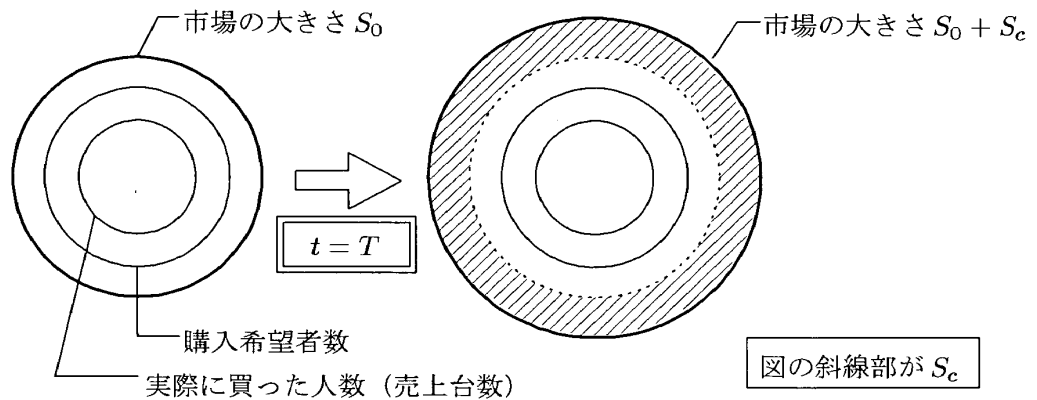


図12 キャンペーン売上増加モデルの概念図.

この仮定に対応する微分方程式は次のようになる：

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = b_1(S(t) - y_1(t)), \tag{16}$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = b_2(y_1(t) - y_2(t)). \tag{17}$$

ただし

$$S(t) = \begin{cases} S_0 & (0 \leq t \leq T), \\ S_0 + S_c & (T \leq t). \end{cases} \tag{18}$$

時刻  $t = T$  で  $y_1(t)$  および  $y_2(t)$  が連続であるという条件を代入して整理すると、上の方程式の解は下のように  $S_c$ ,  $T$  だけを追加した簡便な式で書き表せる：

$0 \leq t \leq T$  のとき

$$y_1(t) = S_0 - C_1 e^{-b_1 t}, \quad (19)$$

$$y_2(t) = S_0 - \frac{b_2}{b_2 - b_1} C_1 e^{-b_1 t} - C_2 e^{-b_2 t}. \quad (20)$$

$T \leq t$  のとき

$$y_1(t) = S_0 + S_c - C_1 e^{-b_1 t} - S_c e^{-b_1(t-T)} \quad (21)$$

$$= (\text{キャンペーンを行わなかったときの値}) + S_c(1 - e^{-b_1(t-T)}),$$

$$y_2(t) = S_0 + S_c - \frac{b_2}{b_2 - b_1} C_1 e^{-b_1 t} - C_2 e^{-b_2 t} \\ - S_c \frac{1}{b_2 - b_1} \{b_2 e^{-b_1(t-T)} - b_1 e^{-b_2(t-T)}\} \quad (22)$$

$$= (\text{キャンペーンを行わなかったときの値})$$

$$+ S_c \left[ 1 - \frac{1}{b_2 - b_1} \{b_2 e^{-b_1(t-T)} - b_1 e^{-b_2(t-T)}\} \right].$$

パラメータの値を与えてグラフを書いた例が図13である。一度収まりかけていた成長が、 $S = S(t)$  の増加に引っ張られて再び段階的に始まり、 $S_0 + S_c$  を新たな漸近値とする成長に変貌する様子が見られる。ただし仮定によると、実際のデータとして我々が目に見ることができるのは  $y_2(t)$  の動向だけである。図13では、実データを見るだけでは想像できない、隠れた構造が浮かび上がっているように見える。

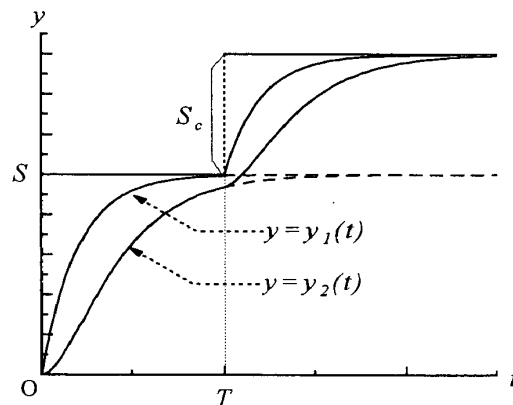


図13 キャンペーン時の売上の変化.

キャンペーン開始時刻  $T$ , キャンペーンの効果の大きさ  $S_c$  の値を変化させたときの、 $y_2(t)$  の動向を図14a, 図14bに示す。

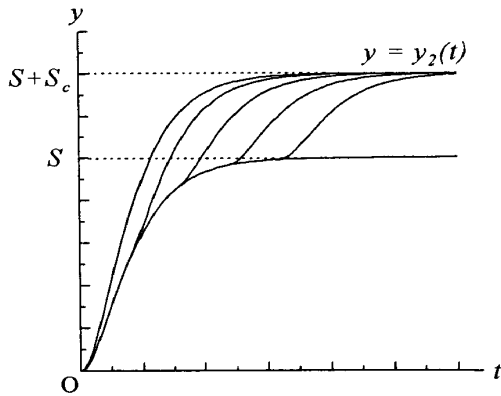


図 14a キャンペーン開始時刻  $T$  の変化による売上数の変化.

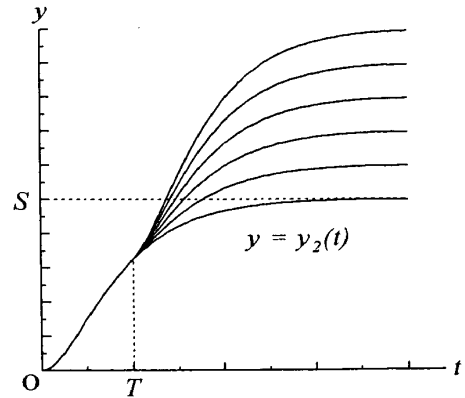


図 14b キャンペーンによる売上の増分  $S_c$  の変化による売上数の変化.

#### 4.2. キャンペーン時のゲーム機売上への当てはめ

ここでは、実際にキャンペーンによってゲーム機本体の売上が増加した例に、前述のモデルを当てはめてみる。

当てはめの対象としたゲーム機本体とキャンペーンの概要は以下の通りである。

**a** ドリームキャスト値下げキャンペーン

開始：1999年6月24日

内容：本体価格の引き下げ（29800円→19900円）

ドリームキャスト人気ソフトの値下げ など

**b** ゲームボーイカラー値下げキャンペーン

開始：1999年5月14日

内容：本体価格の引き下げ（8900円→6800円）

モデルを当てはめてみた結果を図15に示す。実売上台数に曲線  $y_2(t)$  を当てはめると、全てのパラメータの値が推定されるので、これから最終売上  $S$  および  $S + S_c$  や、ゲーム機を買いたいと思っている人（つまり曲線  $y_1(t)$  の値）が推定されている。段階的成長モデルにパラメータを2つ追加しただけの式 (22) が、キャンペーンを機に売上が再増加した様子を良く説明しているといえるだろう。ドリームキャスト値下げキャンペーン時のデータへ当てはめてパラメータの値を算出してみると、キャンペーン前の売上の収束値に相当する  $S$  の値がおおよそ112万（台）であるのに対し、キャンペーンによる売上の増分を表す  $S_c$  の値は約96万（台）である。すなわち、キャンペーンを打ったことによる売上の増加分が8割6分にも

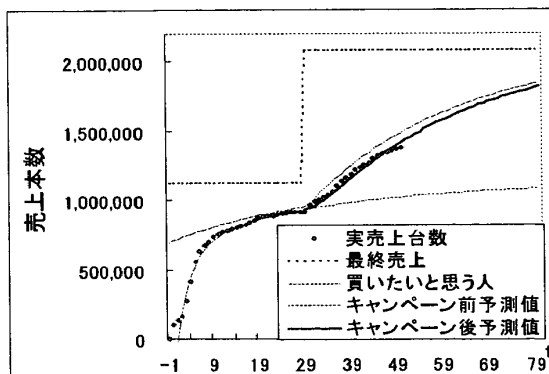


図 15a DC 値下げキャンペーン時の売上

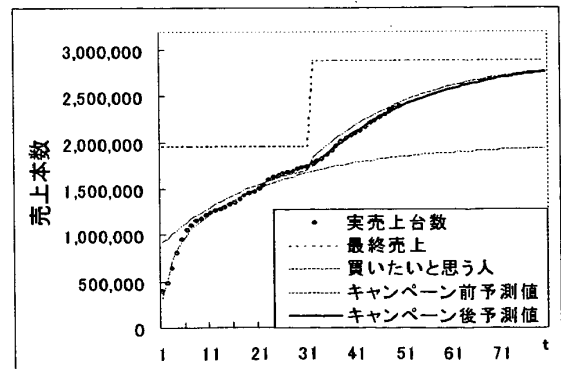


図 15b GB カラー値下げキャンペーン

時の売上推移と当てはめ結果

時の売上推移と当てはめ結果.

達するものと見積もられる (図 15a). 製品市場の規模に対する, このキャンペーンの効果の大きさを数値で求めることができた訳である. ゲームボーイカラー値下げキャンペーンについても同様に,  $S$ の値がおよそ200万(台)で,  $S_c$ の値がその5割ほどの約93万(台)と算出された (図 15b).

実際の売上増加の様子に良く当てはまっていることから, このモデルの応用として, 次節で示すようなキャンペーン開始時刻の最適化モデルが作成できる [4]. また他の現象 (例えば, 過去に流行したファッションの再流行など) への当てはめも可能であると考えられる. 当てはまりが良ければ, そのような出来事の影響, 効果の将来予測に役立てることが可能である. 従前の成長曲線の当てはまりが悪い現象について, 成長を促進した出来事を見つけ出し, 成長の様子をその前後で分けると説明が可能になる例も多いものと考えられる. また複数回にわたってこのような衝撃がある場合についても, 同様の仮定に従って容易に式を立てることができよう. 衝撃が加わるたびに, 式の上ではその時刻と効果を表す二つのパラメータのみが追加される. こうして成長の速度が再び勢いを増す様子が記述されるのである.

#### 4.3. キャンペーン開始時刻の最適化モデル

前節で記した売上増加のモデルを用いて, ゲーム機およびその周辺機器の売上総額の最大化を目的とした, 値下げキャンペーン開始時刻の初等的な最適化モデルを作成した.

まず考察するゲーム機販売会社の売上を, ゲーム機本体の売上と, コントローラーやメモリーカードなどのゲーム機の周辺機器の売上に限定する. キャンペーン開始を遅らすと, 高い値段でより多くのゲーム機を販売して本体売上を増やすことができるという利点があり, 逆にキャンペーンを早い時期に始めると, その分売上台数が早期に増加して, 周辺機器の売上が増加する. ここではこのトレードオフを前提として, 総売上が最も大きくなるようなキャンペーン開始時刻  $T$  を解析的に算出するのである. ただし値下げキャンペーンを行うことによって最終売上台数  $S$  が  $S_c$  だけ増大する, という仮説を立てる. この仮説の下でモデリングを行ってみることにしよう. なお,  $S_c$  はキャンペーン開始時刻や値下げ率によらず一定値を取るという, 単純な仮定をする. また本体を1台持っている人が, 1週間当たり  $P_0$  円の周辺機器を購入するものとする. 発売当時の本体価格を  $P$  円, キャンペーンによる本体価格の値下げ率を  $d$  と置くと, 本体価格の推移  $P(t)$  は次のように記述できる:

$$P(t) = \begin{cases} P & (0 \leq t \leq T), \\ (1-d)P & (T \leq t). \end{cases} \quad (23)$$

キャンペーン前後の本体売上台数の推移を  $Y(t)$  で表すものとする, これは (20) 式と (22) 式より, 次のように与えられる:

$$Y(t) = \begin{cases} S_0 - \frac{b_2}{b_2-b_1} C_1 e^{-b_1 t} - C_2 e^{-b_2 t} & (0 \leq t \leq T), \\ S_0 + S_c - \frac{b_2}{b_2-b_1} C_1 e^{-b_1 t} - C_2 e^{-b_2 t} \\ \quad - S_c \frac{1}{b_2-b_1} \{ b_2 e^{-b_1(t-T)} - b_1 e^{-b_2(t-T)} \} & (T \leq t). \end{cases} \quad (24)$$

いま, 発売開始時刻を0とし,  $[0, t_{max}]$  なる期間での本体売上と周辺機器売上の和を最大化するキャンペーン時刻を決定する問題を考えることにしよう. 発売開始 (時刻0) から  $t_{max}$  週までの総売上を, 月単位の複利計算で現在価値に換算した値を最大化する問題を考える. なお以下では, 一年を52週間 (一ヶ月は52/12週間) として計算する. また, 年当たりの金利を  $i$  に固定して考える. 発売後第  $t$  週目の本体売上額の現在価値は, 一週間の累積売



上台数に販売価格と対応する月の現価係数とを乗ずることで算出できるので、発売開始（時刻0）から $t_{max}$ 週までの本体売上総額の現在価値を $R_1$ とすると、

$$R_1(T) = \sum_{t=1}^{t_{max}} \left[ \{Y(t) - Y(t-1)\} \cdot P(t) \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-\lceil t/\frac{52}{12} \rceil} \right] \quad (25)$$

と計算することができる。ただし上式で“ $\lceil \cdot \rceil$ ”は、小数部分を切り上げるガウス記号である。

次に、時刻0から $t_{max}$ までの間の周辺機器の売上総額を $R_2$ とすると、これは次のような積分計算で求めることができよう：

$$R_2(T) = \sum_{t=1}^{t_{max}} \left\{ \int_{t-1}^t Y(t) dt \cdot P_s \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-\lceil t/\frac{52}{12} \rceil} \right\}. \quad (26)$$

総売上 $R(T)$ は $R_1(T) + R_2(T)$ で与えられる。

以下ではドリームキャストのキャンペーンを例にとって、(25)式と(26)式に基づいたキャンペーン開始時刻の最適化を試みた。売上高を計上する期間を発売開始直後から約4年間( $t_{max} = 200$ )として、本体売上推移とキャンペーン効果の大きさに関するパラメータはこれまでのモデルの当てはめから推定された値を、キャンペーン前後の本体価格は実際の値[9]をそれぞれ使用した。また前述の通りキャンペーン効果の値 $S_c$ はキャンペーン開始時刻によらず一定値を取ると仮定した。さらに本体1台、1週間当たりの周辺機器購入額は $P_s = 150$ [円/(週・台)]と置いた（1年間の購入額を8000円弱と想定した訳である）。年利 $i$ を10パーセントと固定したときのキャンペーン開始時刻 $T$ の変化による本体売上総額、周辺機器売上総額、全体での売上総額の変化は図16の通りである。図16中の各曲線は、月単位の複利計算を行っているために滑らかな曲線とはならない。上のような計算によると、売上額を最大にするようなキャンペーン開始時刻は、実際にキャンペーンが始まった時刻（本体発売から30週間後）よりもかなり早い、約14週間後と算出された。なお、(時刻 $t=200$ 週の時点における)本体の売上総額のみを最大化するには、発売から約49週間後にキャンペーンを開始するのが最適な行動となる。現実の周辺機器購入額 $P_s$ のデータは未入手なので、これを様々に変化させて同様に最適開始時刻を求めた結果を図17に示す。周辺機器の売上が占めるウェイトが小さければ、キャンペーン開始を遅くすることが有利になるという当然の結果が読み取れる。

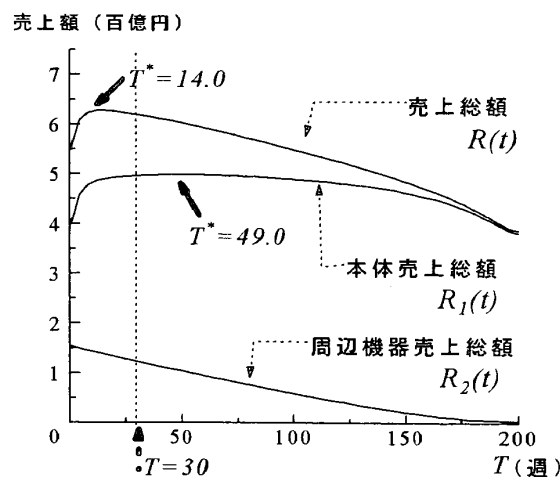


図16 キャンペーン開始時刻 $T$ による売上総額の変化。

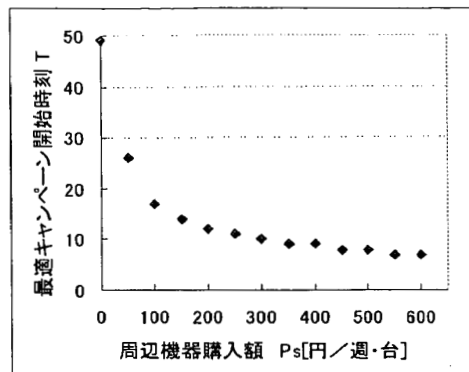


図17 周辺機器購入額の変化によるキャンペーン最適開始時刻の変動.

冒頭で述べた通りこのモデルを作成するにあたっては、「キャンペーン効果の大きさの指標となる  $S_c$  (最終売上台数の増加分) が、キャンペーン開始時刻や値下げ率にはよらず一定値を取る」、「本体を1台持っている人が、1週間に購入する周辺機器の値段が一定額に固定される」など初等的な仮定を多く行っている。しかし適当な分析によって、キャンペーン開始時刻や値下げ幅がキャンペーン効果に与える影響や周辺機器の購買行動が明確になれば、これらを以上のモデルに組み込んで、同様の手法でキャンペーンの最適開始時刻について、より実践的に考察する余地が残されているものと考えられる。

## 5. まとめ

段階的な成長を前提とした「段階的成長モデル」によって、これまで提案されてきた様々な成長曲線よりも自由度の高い曲線が生成された。自由度が高い：つまりパラメータ数が多いので、データへの当てはまりが従来の曲線よりも良くなるのは当然である。しかしこの点を差し引いて考えても、このモデルは、ある局面の状況を上手く説明する、有効なモデルであると言えるだろう。

「段階的成長モデル」による成長曲線だけでなく、他の成長曲線を実データに当てはめてみてその結果を比較した。これによって、状況によって各曲線を使い分けることとその例を説明することが出来たことも、本研究の大きな意義である。

今後の課題としては、適当な現象のデータに段階的成長モデルの3段階目以降の曲線を当てはめてみてモデルの有効性を確かめることが挙げられる。とはいえ、適当なデータを入手することには困難が伴うのが常である。その場合、各段階の発生時間にズレを与えて（初期値を変化させて）、これと他の成長曲線との適合度を考えるなど別の方法でモデルについての考察をすることが必要となるかもしれない。

また、段階的成長を前提として、ロジスティック法則などの他の様々な成長法則を適用すると多様なモデルが作られ、さまざまな検討ができる。しかしこの場合、一般に方程式が解析的に解けないので専ら数値解法を適用することになる。

今回取り上げたゲーム機の例以外にも、段階的成長モデルが有効でありそうな成長現象は多く考えられる。例えば公共施設数が建設予定→建設中という2段階の過程を経て増加する様子や、携帯電話の普及とこれを利用した犯罪件数の増加という2段階成長等にモデルを適用することには興味をひかれるところである。

成長現象を微分方程式モデルで扱うための過去の研究例としては、疫病の研究を例に再起性を持つ現象を扱う理論や開戦時の国民の態度変容を記述するモデルなど枚挙に暇がない[6,7,8]。これらの発想を段階的成長モデルに組み込んで、モデルをさらに発展させること

も可能であるものと思われる。

### 参考文献

- [1] 古藤浩:区画整理事業地区の市街化曲線に関する研究. 第26回日本都市計画学会学術研究論文集,(1990)541-546.
- [2] 古藤浩:人口密度増加曲線による首都圏自治体の比較分析. 第28回日本都市計画学会学術研究論文集,(1993)715-720.
- [3] 増山元三郎:実験公式の求め方 ー増補版ー (竹内書店,1975).
- [4] 中桐裕子:階層構造を有する成長現象の微分方程式モデル ー家庭用ゲーム機の販売実績に基づく分析例ー. 慶應義塾大学理工学部管理工学科卒業論文(2000).
- [5] 坂元慶行, 北川敏男:情報量統計学 (共立出版,1983).
- [6] 佐藤総夫:自然の数理と社会の数理 ー微分方程式で解析する 1 (日本評論社,1984).
- [7] 佐藤総夫:自然の数理と社会の数理 ー微分方程式で解析する 2 (日本評論社,1987).
- [8] 吉田正昭:情報の伝播 (共立出版,1971).
- [9] 週間ドリームキャストマガジン(ソフトバンク,創刊号(1998.11.20)~99年38号(1999.12.10))/大宅壮一文庫蔵. [ゲームソフトの週毎売上げ台数データの出典]
- [10] <http://www.comlink.ne.jp/sika/index2.htm> (本研究のために, 1999年6月から2000年1月までアクセス). [ゲーム機本体の週毎売上げ台数データの出典]

栗田治

慶應義塾大学大学院理工学研究科

開放環境科学専攻

〒223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1

E-mail : kurita@ae.keio.ac.jp

## ABSTRACT

THE MODEL OF HIERARCHICAL GROWTH PROCESSES  
BY DIFFERENTIAL EQUATIONS  
—THE ANALYSIS OF THE SALES OF THE VIDEO GAME MACHINES  
ASSUMING TWO STAGE GROWTH PROCESSES—

Yuko Nakagiri      Osamu Kurita  
*Keio University*

In this study, we introduce the differential equation model which can explain some hierarchical growth processes.

This model is based on the assumptions that some growth processes can be divided into plural stages, and that in a given stage, increasing speed of population (human or otherwise) depends on the size of population in the previous stage. For example, urbanization process can be divided into residential land development stage and building up stage, and the expanding speed of the built-up area depends on the residential development area. In accordance with these assumptions, we formulate the simultaneous differential equations, then calculate their general solutions.

We consider that this model can describe the sales of the video game machines, because the process of buying them has following two stages, first a person wants to buy the machine, then he actually buys it. In addition, the person who gets the game machine will buy some video game softwares. Deriving new model with these thought, we can confirm that the model can explain the sales of video game machines well especially shortly after the machine's being put on the market. This consequence indicates that the hierarchical model is appropriate for the explanation of the growth tendency of the beginning period.

Furthermore, the application of this model to explain the sudden growth in a growth process is proposed in this paper. When a price reduce campaign is launched, the sales of the machines shows a tendency of sudden increase. The model can explain this change by adding only two parameters to the original model.

Our model has so simple structure that it will be able to represent some underlying mechanisms of various growth processes.