

戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル

枇々木規雄
慶應義塾大学

(受理 2000 年 6 月 22 日 ; 再受理 2000 年 12 月 18 日)

和文概要 長期的な動的投資政策のための多期間最適資産配分決定問題を議論する。この問題を解くためには、従来シナリオ・ツリーを用いるモデルが広く使われているが、本研究では、モンテカルロ・シミュレーションによるパスを用いて不確実性を記述した確率制御（動的確率計画）タイプのモデルの枠組みのもとで、線形計画問題として記述できるモデル（シミュレーション型多期間確率計画モデル）を提案する。モデルの振る舞いを検証するために簡単な数値実験も行った。また、リスク評価とリスク制御を統一した枠組みで将来の多期間にわたるリスク管理を行うことができる統一的なリスク管理プロセスの概念も提示する。

1. はじめに

複数の投資対象の中から投資家にとって最も好ましいように、どの投資対象にどれだけ投資をしたらよいかという問題をポートフォリオ最適化問題という。特に投資対象を資産区分（アセット・クラス）に限定した問題、すなわち、複数の資産にどのように投資をしたらよいかという問題を最適資産配分問題という。資産投資を行う場合、最初に株式や債券という資産区分の組み合わせ比率を決め、次にそれぞれの資産の中で個別銘柄の組み合わせを決める2段階の投資決定方式がとられることが多い。この第1段階目のことを資産配分（アセット・アロケーション）と呼ぶ。特に、長期的な観点からベースとなるアセット・ミックスを決める意思決定が戦略的資産配分（strategic asset allocation）である。

本研究では、長期的な動的投資政策のための最適資産配分決定問題について議論する。機関投資家は、様々な不確実性、政策や法的制約、その他の条件のもとで、最大の期待効用、もしくは好ましいリスク・リターンを持つように、長期的に戦略的な資産配分を行う必要がある。次のような二種類のタイプの多期間確率最適化モデルがこの問題を解くために用いることができる。

- (1) 確率制御（動的確率計画）モデル
- (2) シナリオ・ツリーを用いた確率計画モデル

多期間モデルによるポートフォリオ最適化問題として最初に提案されたのは、確率制御（動的確率計画）モデルのタイプである。Merton[8] と Samuelson[11] によって基本的枠組みが提示された¹。確率制御モデルは一般に問題を解くのが難しく、実際に多期間ポートフォリオ問題を解くためのモデルとしては、シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルが中心となって発展している。シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルは近年、コン

¹詳しいサーベイは、本多[6]を参照されたい。

コンピュータの高速化と解法アルゴリズムの発展に伴い、大規模な問題を解くことが可能になり、様々な研究が行われている²。しかし、シナリオ・ツリー型モデルは不確実性の記述を詳細にしようとする、問題の規模が指数的に増加するという欠点がある。また、問題を大規模にしないためには数少ないシナリオでうまく不確実性を記述しなければならない難しさもある。

一方、確率制御モデルのタイプでも、離散時間で離散分布に従う確率変数をモンテカルロ・シミュレーションにより発生させたパスで不確実性を記述することによって、問題を解くためのモデル化が考えられる。このようなタイプのモデルはシナリオ・ツリーに比べて不確実性をより詳細に記述することが可能であるが、非凸非線形計画問題として定式化されるため、大域的最適解を導出できるとは限らない。

本研究では、モンテカルロ・シミュレーションによるパスを用いて不確実性を記述した確率制御(動的確率計画)モデルの枠組みのもとで、従来想定している投資決定ルールを変更することによって線形計画問題³として記述できるモデル(定式化)を提案する。通常、ポートフォリオ最適化問題は投資比率を求める問題として記述されるが、多期間モデルではそのことがモデルの非線形構造の原因となっている。そこで、投資比率の代わりに投資額または投資量を求める問題に変更する(投資ルールを変更する)ことによって、線形計画モデルとしての定式化を可能にする⁴。多期間モデルによって問題を解いた場合、最も重要なのは計画初期時点(現時点)の意思決定であるが、計画初期時点の意思決定は、本モデルでも一意に投資比率を決めることができる⁵。線形計画問題として定式化が可能になれば、大規模な問題でも大域的最適解の導出が保証され、実務的にも有用なモデルになる⁶。このタイプのモデルを「シミュレーション型多期間確率計画モデル」(multi-period stochastic programming model using simulated paths)と呼ぶことにする。

また、本研究ではリスク管理に対する新しい概念も提示する。本研究で提案するモデルは、モンテカルロ・シミュレーションと最適化手法を融合したモデルである。「リスク評価」と「リスク制御」を統一した枠組みで将来の多期間にわたるリスク管理を行うことができるモデルであり、リスク管理を統一的なリスク管理プロセスの中で行うことができる概念である。この新しい概念を提示するのも、本研究の重要な一つの側面である。

本論文の構成は以下の通りである。2節では、シミュレーション型多期間確率計画モデルの典型的な3つのタイプのモデル(投資比率決定モデル、投資額決定モデル、投資量決定モデル)の定式化を示す。3節では、投資額決定モデルと投資量決定モデルに対する数値実験例を示す。4節では、シミュレーション型モデルに関連する議論として、二種類のタイプのモデルの比較と、シミュレーションと最適化の融合の概念を提示する。最後に、5節で結論と今後の課題を述べる。

²詳細は、Mulvey and Ziemba[9, 10]の参考文献を参照されたい。

³目的関数が非線形凸関数の場合には非線形凸計画問題となるが、大域的最適解を導出することができる。

⁴シナリオ・ツリー型モデルでも投資比率を用いると非線形計画問題となるので、投資額もしくは投資量を求める問題として定式化される。しかし、シナリオ・ツリー型モデルでは、投資比率、投資額、投資量のいずれを用いてもそれらの定式化は等価となる。一方、本研究で提案するモデルは、投資比率、投資額、投資量の3種類の定式化は等価にはならない。

⁵投資比率を決定するモデルの最適解と異なることには注意が必要である。

⁶非凸非線形計画問題では、初期点によって求められる解が異なる(局所最適解になる)可能性がある。初期点を様々変更して問題を解かなければならない。その場合でも一般に大域的最適解の導出は保証されない。実務的には、常に安定して最適解が導出されることは極めて重要である。

2. シミュレーション型多期間確率計画モデル

2.1. 投資の意思決定とモデル化

資産価格が確率的に変動し、その振る舞いが確率微分方程式(確率差分方程式)や時系列モデル式などで記述されるとする。そのとき、モンテカルロ・シミュレーションによって生成された複数のサンプル・パス(乱数を用いて離散的な価格変動を数値的に記述した一連の経路)をここでは略して、シミュレーション経路(simulated path)と呼ぶ⁷。例えば、図1のような価格変動の経路のことである。シミュレーション経路によって、将来の資産価格の不確実な変動を記述する。

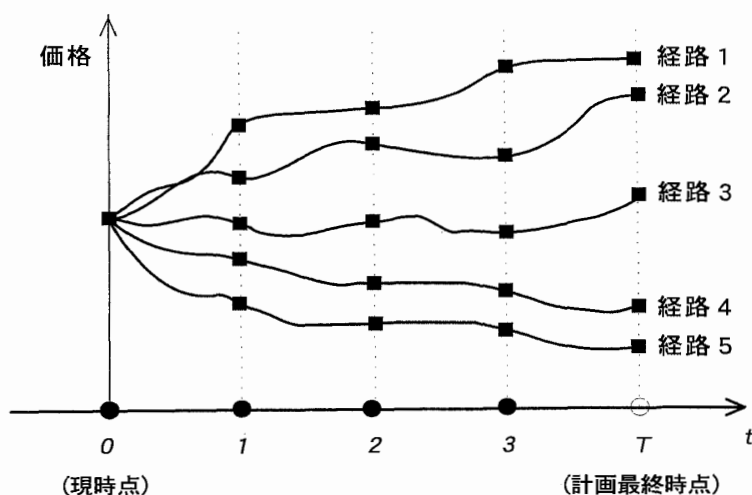


図 1: シミュレーション経路 (パス)

シミュレーション経路は1本の経路にだけ注目すると、 t 時点の状態の次に発生する $t+1$ 時点の状態は1つしか想定しない。したがって、各状態ごとに投資の意思決定を別々に行うと、それは確定条件下での意思決定を行うことになる。そこで、シミュレーション型モデルの場合には、すべての時点で状態に依存しない(どの状態に到達するかにかかわらず)取引戦略による意思決定を行わなければならない⁸。ただし、現金は運用する各時点で収益が確定するので状態に依存してもよい。ここで、「状態に依存しない取引戦略」とは、1つの投資決定をすべてのシミュレーション経路に適用することを意味する。 t 時点でどの状態になるかがわからないもとの t 時点での意思決定が行われることを想定したモデルであるので、シナリオ・ツリーを用いたモデルとは異なり、各状態下での条件付き意思決定にはならない。既知のシミュレーション経路上で、逐次的に各時点において前時点の意思決定の条件のもとで意思決定を行うことになる。

次に、モデルのタイプ別に「状態に依存しない取引戦略」を設定し、それに応じた決定変数の取り扱い方を考える。将来のある時点において、状態にかかわらずにある1つの最適な投資比率(投資額、投資量)にリバランスをするという戦略(意思決定戦略)のために投資

⁷シナリオ・ツリー上の経路(シナリオ・パス)との違いやモンテカルロ・シミュレーションとの融合を強調するために、シミュレーション経路と呼ぶ。

⁸投資決定を行う確率計画モデルでは、将来生じる状態を確定的に知っていることを利用して意思決定ができる機会をなくす条件(非予想条件: non-anticipativity condition)が必要である。

比率(投資額, 投資量)を決定変数として設定する. 以降, 3つのモデルを示すが, それぞれのモデルで考える取引戦略は次の通りである.

- ① 投資比率決定モデル: どの状態が生じた場合でも, 取引後(リバランス後)の危険資産 j への投資比率および現金の保有比率を同一にする.
- ② 投資額決定モデル: どの状態が生じた場合でも, 取引後(リバランス後)の危険資産 j への投資額を同一にする. 各経路での富は異なるが, その富と危険資産への投資額の違いはすべて現金で保有する. したがって, シミュレーション経路の各時点(状態)における現金の保有額は同一ではない.
- ③ 投資量決定モデル: どの状態が生じた場合でも, 取引後(リバランス後)の危険資産 j への投資量を同一にする. 各経路での富は異なるが, その富と危険資産への投資額の違いはすべて現金で保有する. したがって, シミュレーション経路の各時点(状態)における現金の保有額は同一ではない.

2.2. モデルの定式化: 投資比率決定モデル

シミュレーション型多期間確率計画モデルを用いた資産配分問題を記述する. n 個の危険資産 ($j = 1, \dots, n$) と現金 ($j = 0$) に資金を配分する問題を考える. 資産0を現金(安全資産), 資産1 ~ 資産 n を危険資産とする対象資産数が $n + 1$ 個の資産配分問題である. 0時点を投資開始時点, T 時点を計画最終時点とする.

一般に, ポートフォリオ選択問題における投資の意思決定は「投資比率」を決定することである. 投資額決定モデルおよび投資量決定モデルを導出するために, 最初に投資比率決定モデルの定式化を示す. 以下に, モデルに用いる記号を示す.

(1) 添字

i : 経路(パス)を表す添字.

(2) パラメータ

I : 経路の本数

$\mu_{jt}^{(i)}$: 期間 t の経路 i の危険資産 j の投資収益率. ($j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$)

r_0 : 期間 1 の金利(0 時点のコール・レート).

$r_{t-1}^{(i)}$: 期間 t の経路 i の金利($t - 1$ 時点のコール・レート). ($t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$)

W_0 : 0時点での富(初期富).

W_E : 計画最終時点で投資家が要求する期待富.

W_G : 計画最終時点での目標富⁹.

(3) 決定変数

w_{jt} : t 時点の危険資産 j への投資比率. ($j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T - 1$)

c_t : t 時点の現金(コール運用)の比率. ($t = 0, \dots, T - 1$)

$W_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の富. ($t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$)

$q^{(i)}$: 計画最終時点の経路 i の富の目標富に対する不足分. ($i = 1, \dots, I$)

配分決定のためのモデルは以下のように記述することができる. 目的関数は, 計画最終時点での富(最終富)の期待値(リターン尺度)をある一定以上にするという制約のもとで, 最終富の目標富に対する不足分(リスク尺度; 1次の下方部分積率)を最小化することとする. 下

⁹目標富とは, この値を下回る大きさをリスクと考えるときの目標となる富の水準である.

方部分積率は下方リスク尺度の一つであり、(1)式のように記述できる [1, 2].

$$LPM_k \equiv \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I |W_T^{(i)} - W_G|_-^k \quad (1)$$

ここで、次数 k はリスク選好の度合いを表すパラメータである。また、 $|a|_- = \max(-a, 0)$ である。以下のモデルで 1 次 ($k = 1$) の下方部分積率を用いる理由は、線形計画問題として記述するためである¹⁰。

【投資比率決定モデル】

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (2)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n w_{jt} + c_t = 1, \quad (t = 0, \dots, T-1) \quad (3)$$

$$W_1^{(i)} = \left\{ \sum_{j=1}^n (1 + \mu_{j1}^{(i)}) w_{j0} + (1 + r_0) c_0 \right\} W_0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (4)$$

$$W_t^{(i)} = \left\{ \sum_{j=1}^n (1 + \mu_{jt}^{(i)}) w_{j,t-1} + (1 + r_{t-1}^{(i)}) c_{t-1} \right\} W_{t-1}^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T; i = 1, \dots, I) \quad (5)$$

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \geq W_E \quad (6)$$

$$W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (7)$$

$$w_{jt} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1)$$

$$c_t \geq 0, \quad (t = 0, \dots, T-1)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I)$$

以上の定式化では、(5)式が非凸非線形制約式であるため、大域的最適解を導出できるとは限らない。

2.3. 投資額決定モデル

投資比率を決定する問題を実際に解くことは難しいので、危険資産の配分決定を「投資比率」から「投資額」へ変更する¹¹。モデル化のために、以下の記号を導入する。

¹⁰2 次以上にしても凸計画問題として記述できるので、大域的最適解を導出できる。

¹¹この変更は以下の式において右辺の投資比率を固定するのではなく、左辺の投資額を固定することを考えたモデルである。

$$\text{危険資産 } j \text{ への投資額} = \text{危険資産 } j \text{ の投資比率} \times \text{全資産への投資額合計}$$

ある時点の投資額を経路にかかわらず同一にしたとしても、その次の時点における投資額は価格変化により経路によって異なる。そこで、

$$\text{現金} = \text{全資産への投資額合計} - \text{危険資産 } j \text{ への投資額合計}$$

のように、現金を経路に依存させることによって、次の時点においても経路にかかわらず危険資産への投資額を同一にするモデル化を可能にする。現金(コール運用額)の収益率(金利)は各投資配分決定時点で確定するので、非予想条件に反していない。2.4項に示す投資量決定モデルも同様に考えることができる。

x_{jt} : t 時点の危険資産 j の投資額. ($j = 1, \dots, n$; $t = 0, \dots, T-1$)

v_0 : 0 時点の現金 (コール運用額).

$v_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の現金 (コール運用額). ($t = 1, \dots, T-1$; $i = 1, \dots, I$)

モデルは以下のように記述することができる.

【投資額決定モデル】

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (8)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n x_{j0} + v_0 = W_0 \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n (1 + \mu_{j1}^{(i)}) x_{j0} + (1 + r_0) v_0 = \sum_{j=1}^n x_{j1} + v_1^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^n (1 + \mu_{jt}^{(i)}) x_{j,t-1} + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^n x_{jt} + v_t^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n (1 + \bar{\mu}_{jT}) x_{j,T-1} + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \geq W_E \quad (12)$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^n (1 + \mu_{jT}^{(i)}) x_{j,T-1} + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \right\} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (13)$$

$$x_{jt} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1)$$

$$v_0 \geq 0$$

$$v_t^{(i)} \geq 0, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I)$$

ここで, $\bar{\mu}_{jT} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \mu_{jT}^{(i)}$ である¹². 投資額を決定変数にしたモデルで問題を解くことによって, 投資比率は以下のように計算することができる¹³. 0 時点以外の危険資産への投資比率および現金 (コール運用) の比率は経路 i によって異なる.

- 0 時点の危険資産 j への投資比率, 現金 (コール運用) の比率 : $\frac{x_{j0}^*}{W_0}, \quad \frac{v_0^*}{W_0}$
- t 時点の経路 i の危険資産 j への投資比率, 現金 (コール運用) の比率 : $\frac{x_{jt}^*}{W_t^{(i)*}}, \quad \frac{v_t^{(i)*}}{W_t^{(i)*}}$

¹²(12), (13) 式は

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \geq W_E \quad (14)$$

$$W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (15)$$

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^n (1 + \mu_{jT}^{(i)}) x_{j,T-1} + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (16)$$

のように記述する方が分かりやすいかもしれない. 上記の定式化では, (16) 式を (14), (15) 式に代入して, 問題のサイズを小さくした定式化を行った. このことによって, 制約式の本数を I 本減らすことができる.

¹³決定変数に '*' (アスタリスク) が付いている場合には最適解を表す.

2.4. 投資量決定モデル

実際の世界では、投資額ではなく、投資量(単位)で投資を行っている(資産を売買している). 投資額は次のように、価格と投資量に分解できる.

$$\begin{aligned} \text{投資額} &= \text{単位あたり価格} \times \text{投資量(単位数)} \\ &= \underbrace{\frac{\text{単位あたり価格}}{\text{単位あたり基準価額}}}_{\text{相対価格}} \times \underbrace{\{\text{単位あたり基準価額} \times \text{投資量(単位数)}\}}_{\text{基準価額で記述した投資量(投資基準価額)}} \end{aligned}$$

ここで、(単位あたり)基準価額とは、(単位あたり)額面価額や投資時点での(単位あたり)価格のような投資の際に基準となる金額として定義されるものとする. 投資量を表す決定変数を単位数だけでなく、金額表現もできるように基準価額というものを導入する. 単位あたり価格と投資量(単位数)を用いて記述しても、相対価格と投資基準価額を用いて記述しても全く同じなので、使いやすさに応じて使い分ければよい.

また、価格(相対価格)は投資収益率を用いて次のように計算できる.

$$\begin{aligned} \rho_{j1}^{(i)} &= (1 + \mu_{j1}^{(i)}) \rho_{j0}, \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, I) \\ \rho_{jt}^{(i)} &= (1 + \mu_{jt}^{(i)}) \rho_{j,t-1}^{(i)}, \quad (j = 1, \dots, n; t = 2, \dots, T; i = 1, \dots, I) \end{aligned}$$

ここで、

ρ_{j0} : 0時点の危険資産 j の価格(相対価格). ($j = 1, \dots, n$)

$\rho_{jt}^{(i)}$: t 時点の経路 i の危険資産 j の価格(相対価格).

($j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$)

である. モデル化のために、以下の記号を導入する.

z_{jt} : t 時点の危険資産 j への投資量(投資基準価額). ($j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1$)

モデルは以下のように記述することができる¹⁴.

【投資量決定モデル】

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (20)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1 + r_0) v_0 = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j1} + v_1^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (22)$$

¹⁴以下の(19)式を(17), (18)式に代入することによって、(24), (25)式のように記述することができる. このことによって、制約式の本数を I 本減らすことができる

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \geq W_E \quad (17)$$

$$W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (18)$$

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1} + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1} + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt} + v_t^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (23)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{\rho}_{jT} z_{j,T-1} + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \geq W_E \quad (24)$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1} + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \right\} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (25)$$

$$z_{jt} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1)$$

$$v_0 \geq 0$$

$$v_t^{(i)} \geq 0, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I)$$

投資量を決定変数にしたモデルで問題を解くことによって、危険資産 j への投資額も以下のように計算することができる。

- 0 時点の危険資産 j への投資額 : $\rho_{j0} z_{j0}^*$
- t 時点の経路 i の危険資産 j への投資額 : $\rho_{jt}^{(i)} z_{jt}^*$

同様に、投資比率も以下のように計算することができる。

- 0 時点の危険資産 j への投資比率、現金(コール運用)の比率 : $\frac{\rho_{j0} z_{j0}^*}{W_0}, \frac{v_0^*}{W_0}$
- t 時点の経路 i の危険資産 j への投資比率、現金(コール運用)の比率 : $\frac{\rho_{jt}^{(i)} z_{jt}^*}{W_t^{(i)*}}, \frac{v_t^{(i)*}}{W_t^{(i)*}}$

2.5. モデルの修正

前項で示したモデルは多期間確率計画モデルを記述するのに最低限必要な数式を記述した。ここでは、実務で要求されることのある以下の問題に対するモデルの修正法を示す。

- ① フル・インベストメント(すべての資金を危険資産へ投資)をする場合
- ② 期中での評価および制御を明示的に行う場合

(1) フル・インベストメントへの対応

投資額決定モデルおよび投資量決定モデルでは、モデルの構造上、期中においては現金への投資を必要とするため、全期間でのフル・インベストメントには対応できない。しかし、初期時点のみ、定式化を修正することによって、すべての投資を危険資産へ投資することが可能である¹⁵。それぞれ以下のようにモデルを修正すればよい。

(A) 投資額決定モデル

(9), (10) 式から v_0 を取り除き、それぞれ次のように書き換える。

$$\sum_{j=1}^n x_{j0} = W_0 \quad (26)$$

¹⁵多期間確率計画モデルは初期時点だけでなく、将来時点での意思決定に対しても最適解を導出する。しかし、このモデルは、時間が経過したときに、モデルから得られた将来時点での最適解に従って投資行動を「しなければならない」ことを意図しているのではなく、「行うことを前提にして」初期時点の意思決定を導出することを目的としている。実際に時間が経過したときには、再び問題を解き直し、その時点の先の将来も考慮して、その時点での意思決定を行うことになる。その場合、モデルから得られる結果を利用するのは初期時点の最適解のみであるので、フル・インベストメントへも対応できると考えてよいだろう。

$$\sum_{j=1}^n (1 + \mu_{j1}^{(i)}) x_{j0} = \sum_{j=1}^n x_{j1} + v_1^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (27)$$

(B) 投資量決定モデル

(21), (22) 式から v_0 を取り除き, それぞれ次のように書き換える.

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} = W_0 \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j1} + v_1^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (29)$$

(2) 期中での評価および制御への対応

期中での評価および制御を行うことは数式を追加することによって容易にできる. ここでは投資量決定モデルを修正する. (22), (23) 式の値がそれぞれ $W_1^{(i)}$, $W_t^{(i)}$ であることを以下のように明示的に制約式として記述する.

$$W_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1 + r_0) v_0 = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j1} + v_1^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I)$$

$$W_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1} + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt} + v_t^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$$

各時点のリスク (1 次の下方部分積率) は, 時点 t の目標富を $W_{G,t}$ とすると,

$$LPM_{1,t} = \min \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q_t^{(i)} \left| W_t^{(i)} + q_t^{(i)} \geq W_{G,t}; i = 1, \dots, I \right. \right\} \quad (30)$$

と記述できる. これらは計画最終時点における評価と同様に記述すればよい. この問題は複数時点のリスクを同時に扱う多目的計画問題となり, 目的関数としては例えば,

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^T d_t \cdot LPM_{1,t} \quad (31)$$

のような関数を設定することができる. ここで, d_t は t 時点のリスクに対するウェイトを表し, その値としてはディスカウント・ファクターを用いることが考えられる. また, 各時点の期待富は

$$\bar{W}_1 = \sum_{j=1}^n \bar{\rho}_{j1} z_{j0} + (1 + r_0) v_0 \quad (32)$$

$$\bar{W}_t = \sum_{j=1}^n \bar{\rho}_{jt} z_{j,t-1} + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} \quad (33)$$

と表すことができるので, これらに対する制約式を追加することもできる.

2.6. モデルの選択

2.2~2.4 項に示した 3 つのモデル (投資比率決定モデル, 投資額決定モデル, 投資量決定モデル) は等価なモデルではない. したがって, 実際に確率計画問題を解くときには, 採用する「取引戦略」の考え方に見合うモデルを選択する必要がある. しかし, 投資比率決定モデル

表 1: 問題のサイズ

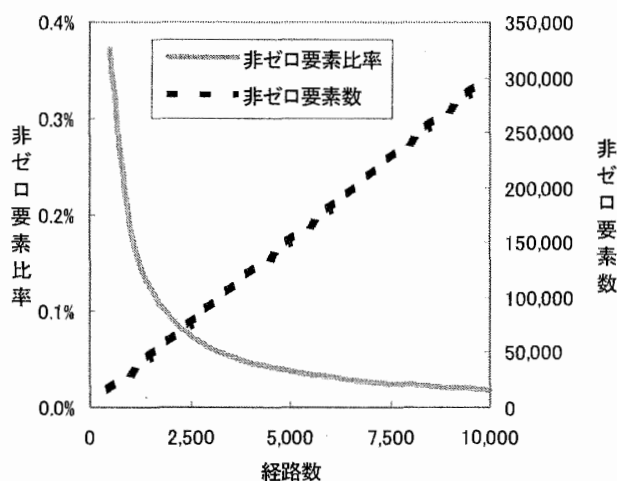
	投資比率決定モデル	投資額決定モデル	投資量決定モデル
制約式 (非負制約除く)	$(T+1)(I+1)$	$TI+2$	$TI+2$
決定変数	$(T+1)I + (n+1)T$	$(n+I)T+1$	$(n+I)T+1$

ルで用いる取引戦略の考え方に特にこだわらなければ、解法上の容易さから、投資額決定モデル、もしくは投資量決定モデルのどちらかで問題を解くことが望ましい。これらの問題のサイズを表1に示す。

経路数が増えると問題のサイズは膨大になるが、問題の係数行列は疎大行列である。投資量決定モデルに対する非負制約を除く制約式の要素数を以下に示す。

非ゼロ要素数	全要素数
$(2nT + 2T - n + 1)I + 2n + 1$	$\{(n+I)T+1\}(TI+2)$

経路数を様々に変更したときの経路数と非ゼロ要素数および非ゼロ要素比率 (= 非ゼロ要素数/全要素数) を図2に示す。ここでは、危険資産数を $n=3$ 、期間数を $T=4$ に固定した場合の図を示す。

図 2: 経路数と非ゼロ要素の関係 ($n=3, T=4$)

経路数が増加するにつれて、非ゼロ要素数もほぼ比例して増加するが、非ゼロ要素比率はほぼ経路数の逆数に比例して減少する。

2.7. 売買コストを考慮したモデル

実際の資産の売買を行う場合、購入価格と売却価格は異なるし、売買手数料もかかる。今まで示したモデルは各時点でのリバランスは考慮しているが、売買価格の違いや手数料を考慮していない。これらを考慮するためには、投資量決定モデルをもとにモデルを構築するのが容易である。モデルを簡単に、しかも分かりやすく記述するために、資産の市場流動性のために生じるコストや有価証券取引税などの取引コストなどを一括して、売買コスト率と

して取り扱う。売買コスト率は、資産の種類(j)、時点(t)、状態(i)、売買($B(\text{uy}), S(\text{ell})$)に依存すると考えられるので、それらを $\gamma_{jt}^{B(i)}$ (購入コスト率), $\gamma_{jt}^{S(i)}$ (売却コスト率) と表す。購入価格は市場価格に売買コストを上乗せし、売却価格は市場価格から売買コストを差し引く。購入価格および売却価格は以下のように示すことができる¹⁶。

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_{j0}^B) \rho_{j0} &: 0 \text{ 時点の危険資産 } j \text{ の購入価格. } (j = 1, \dots, n) \\ (1 + \gamma_{jt}^{B(i)}) \rho_{jt}^{(i)} &: t \text{ 時点の経路 } i \text{ の危険資産 } j \text{ の購入価格.} \\ &\quad (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \\ (1 - \gamma_{jt}^{S(i)}) \rho_{jt}^{(i)} &: t \text{ 時点の経路 } i \text{ の危険資産 } j \text{ の売却価格.} \\ &\quad (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \end{aligned}$$

以下に追加的に用いる記号を示す。

y_{jt}^+ : t 時点の危険資産 j の購入量 (購入基準価額). ($j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1$)

y_{jt}^- : t 時点の危険資産 j の売却量 (売却基準価額). ($j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1$)

危険資産 j への投資量 (投資基準価額) は、購入量 (購入基準価額) および売却量 (売却基準価額) を用いて、(34) 式のように記述することができる。

$$z_{jt} = z_{j,t-1} + y_{jt}^+ - y_{jt}^-, \quad (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1) \quad (34)$$

投資量決定モデルの (22), (23) 式に売買コスト率を考慮して (34) 式を代入すると、それぞれ (35), (36) 式ようになる。左辺がキャッシュ・アウト・フロー、右辺がキャッシュ・イン・フローを表す。

$$\sum_{j=1}^n (1 + \gamma_{j1}^{B(i)}) \rho_{j1}^{(i)} y_{j1}^+ + v_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n (1 - \gamma_{j1}^{S(i)}) \rho_{j1}^{(i)} y_{j1}^- + (1 + r_0) v_0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (1 + \gamma_{jt}^{B(i)}) \rho_{jt}^{(i)} y_{jt}^+ + v_t^{(i)} &= \sum_{j=1}^n (1 - \gamma_{jt}^{S(i)}) \rho_{jt}^{(i)} y_{jt}^- + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)}, \\ &\quad (t = 2, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \end{aligned} \quad (36)$$

売買コスト率が 0 のとき、(35), (36) 式と (22), (23) 式は等価である。売買に伴うコストを考慮した投資量決定モデルは次のように定式化できる。

【 売買コストを考慮した投資量決定モデル 】

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (37)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n (1 + \gamma_{j0}^B) \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \quad (38)$$

$$z_{jt} = z_{j,t-1} + y_{jt}^+ - y_{jt}^-, \quad (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1) \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^n (1 + \gamma_{j1}^{B(i)}) \rho_{j1}^{(i)} y_{j1}^+ + v_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n (1 - \gamma_{j1}^{S(i)}) \rho_{j1}^{(i)} y_{j1}^- + (1 + r_0) v_0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (40)$$

¹⁶ 以下に示すモデルでは 0 時点で投資を開始するので、0 時点の売却価格は考えなくてよい。また、計画最終時点での富は、その時点での売却価格によって評価する。

$$\sum_{j=1}^n \left(1 + \gamma_{jt}^{B(i)}\right) \rho_{jt}^{(i)} y_{jt}^+ + v_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \left(1 - \gamma_{jt}^{S(i)}\right) \rho_{jt}^{(i)} y_{jt}^- + \left(1 + r_{t-1}^{(i)}\right) v_{t-1}^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (41)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{\rho}'_{jT} z_{j,T-1} + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left(1 + r_{T-1}^{(i)}\right) v_{T-1}^{(i)} \geq W_E \quad (42)$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \left(1 - \gamma_{jT}^{S(i)}\right) \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1} + \left(1 + r_{T-1}^{(i)}\right) v_{T-1}^{(i)} \right\} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (43)$$

$$z_{jt} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1)$$

$$y_{jt}^+ \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1)$$

$$y_{jt}^- \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1)$$

$$v_0 \geq 0$$

$$v_t^{(i)} \geq 0, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I)$$

ここで, $\bar{\rho}'_{jT} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left(1 - \gamma_{jT}^{S(i)}\right) \rho_{jT}^{(i)}$ である.

3. 数値実験

2節で示したように, モデルは3種類考えられるが, 線形計画モデルとして定式化が可能な投資額決定モデルと投資量決定モデルに対する数値実験例を示す. 数値実験は, 数理計画法ソフトウェア NUOPT を用いた¹⁷.

3.1. 設定条件

- 3期間
- シミュレーション経路: 500 経路
- 対象資産: 株式, 債券, CB(転換社債), 現金(コール運用)
- 表2のような各資産に対するデータの基本統計量(期待値, 標準偏差, 相関係数行列)¹⁸を用いてシミュレーション経路を生成する.
- シミュレーション経路の生成方法は, 以下の通りである.

- ① 資産 j の期間 t の収益率は, 期待値 $\bar{\mu}_{jt}$, 標準偏差 σ_{jt} の正規分布に従う. また, ε_{jt} を標準正規分布に従う確率変数とする. 標準正規乱数 $\varepsilon_{jt}^{(i)}$ を用いて, シミュレーション経路 i の資産 j の期間 t の収益率 $\mu_{jt}^{(i)}$ を以下のように生成する.

$$\mu_{jt}^{(i)} = \bar{\mu}_{jt} + \sigma_{jt} \varepsilon_{jt}^{(i)}, \quad (j = 0, \dots, n; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I)$$

また, コールレート $r_t^{(i)}$ は以下の式を用いて生成する.

$$r_1^{(i)} = r_0 \times (1 + \mu_{01}^{(i)}), \quad (i = 1, \dots, I)$$

$$r_t^{(i)} = r_{t-1}^{(i)} \times (1 + \mu_{0t}^{(i)}), \quad (t = 2, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$$

¹⁷NUOPT は(株)数理システム社の製品である.

¹⁸これらの基本統計量は, 日興株式パフォーマンスインデックス(東証一部インデックス), 日興債券パフォーマンスインデックス(総合インデックス), 日興CBパフォーマンスインデックス(総合インデックス), コール・レートをもとに生成した.

表 2: 数値実験に用いたデータの基本統計量

	金利			株式			債券			CB		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
期待値	-0.087	-0.081	-0.089	0.848	0.867	0.843	0.625	0.623	0.645	0.786	0.780	0.786
標準偏差	0.780	0.784	0.778	5.571	5.582	5.595	1.372	1.372	1.353	3.543	3.541	3.538
相関係数	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
金利	1.000	-0.091	0.073	-0.101	0.000	-0.032	-0.238	0.008	0.090	-0.146	-0.044	-0.052
	-0.091	1.000	-0.092	0.045	-0.094	-0.007	-0.183	-0.237	0.011	-0.012	-0.144	-0.047
	0.073	-0.092	1.000	0.016	0.042	-0.091	-0.166	-0.188	-0.221	-0.062	-0.017	-0.138
株式	-0.101	0.045	0.016	1.000	0.022	-0.031	0.145	-0.173	-0.096	0.761	0.042	-0.045
	0.000	-0.094	0.042	0.022	1.000	0.018	0.085	0.144	-0.170	0.019	0.760	0.0414
	-0.032	-0.007	-0.091	-0.031	0.018	1.000	0.077	0.085	0.141	0.011	0.019	0.760
債券	-0.238	-0.183	-0.166	0.145	0.085	0.077	1.000	0.130	-0.108	0.327	0.202	0.065
	0.008	-0.237	-0.188	-0.173	0.144	0.085	0.130	1.000	0.137	-0.114	0.327	0.204
	0.090	0.011	-0.221	-0.096	-0.170	0.141	-0.108	0.137	1.000	-0.180	-0.109	0.321
CB	-0.146	-0.012	-0.062	0.761	0.019	0.011	0.327	-0.114	-0.180	1.000	0.092	-0.068
	-0.044	-0.144	-0.017	0.042	0.760	0.019	0.202	0.327	-0.109	0.092	1.000	0.093
	-0.052	-0.047	-0.138	-0.045	0.041	0.760	0.065	0.204	0.321	-0.068	0.093	1.000

② 確率変数 ε_{jt} は資産間、時点間で相関を持つ。

$$\varepsilon_{jt} \sim N(\mathbf{o}, \Sigma)$$

ここで、 Σ は資産間、時点間の相関係数行列 $((n+1)T \times (n+1)T$ 行列) である。

- 資産価格は簡単のため相対価格を用いることにし、株式、債券、CBの初期時点での価格を1とする。また、コール・レートの初期金利は、0.44%(1期間換算)とする。
- 初期(時点の)富(W_0)は1億円とする。
- 計画期末(3時点後)の目標富(W_G)は1億円とする。
- 計画期末(3時点後)の期待富(W_E)に対する制約を様々に変えることによって、どのような資産配分になるかを調べる。調べたケースは以下の8ケースである。ただし、極端なケースを調べるために、ケース1とケース8は定式化を変更し、それぞれ(期待富制約なしの)リスク最小化問題、(リスクを考慮しない)期待富最大化問題として問題を解いている。投資額決定モデルと投資量決定モデルを比較するために、同じ制約を設定した¹⁹。以降、単位のない場合には、すべて万円単位である。

ケース 1	リスク最小化	ケース 5	$W_E = 10, 210$
ケース 2	$W_E = 10, 165$	ケース 6	$W_E = 10, 225$
ケース 3	$W_E = 10, 180$	ケース 7	$W_E = 10, 240$
ケース 4	$W_E = 10, 195$	ケース 8	期待富最大化

¹⁹最初にケース1とケース8の問題を解いた結果、投資額決定モデルでは、ケース1の期待富が10,148.4万円、ケース8の期待富が10,243.0万円、投資量決定モデルでは、ケース1の期待富が10,148.7万円、ケース8の期待富が10,258.3万円であったので、ケース2～ケース7の要求期待富を10,165万円～10,240万円に設定している。

3.2. 結果 1 : 投資額決定モデル

(1) 投資額

投資額決定モデルによって問題を解くと、表3に示すような投資額が最適解として求められる。ただし、1時点と2時点の現金はシミュレーション経路によって異なるので、紙面の都合上、その平均値を示す²⁰。具体的には以下の決定変数に対する最適解である。

$$\begin{aligned} \text{現金} &: v_0^*, \bar{v}_t^*, (t = 1, 2) \\ \text{危険資産} &: x_{jt}^*, (j = 1, 2, 3; t = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

表 3: 投資額

	現金 (平均)			株式			債券			CB		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
ケース1	7933.9	7921.2	7006.5	0.0	0.0	0.0	1269.0	1810.2	3091.2	797.1	317.7	0.0
ケース2	5991.6	6174.3	3209.5	0.0	732.0	224.3	3075.3	3146.6	6672.1	933.1	0.0	0.0
ケース3	3784.6	3813.6	1122.2	263.8	993.8	400.8	4626.9	5250.9	8593.3	1324.7	0.0	0.0
ケース4	0.0	1098.2	774.4	421.6	1157.7	545.6	7554.2	7810.8	8810.2	2024.2	0.0	0.0
ケース5	0.0	727.0	1079.6	1336.3	2675.0	841.8	4066.2	6212.9	5626.6	4597.5	458.0	2593.5
ケース6	0.0	848.9	1424.1	1712.4	4362.3	1176.1	1382.7	3191.2	1696.4	6904.9	1674.9	5855.3
ケース7	0.0	1082.6	1855.5	4296.0	8562.6	5134.1	0.0	0.0	0.0	5704.0	436.1	3174.0
ケース8	0.0	1514.7	2077.5	10000.0	8570.1	8088.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

(2) リスクとリターン

表 4: 各時点の期待富の大きさとリスク

	初期富	期中富		最終富	LPM_1
	0	1	2	3	
ケース1	10000.0	10035.4	10059.4	10148.4	0.00
ケース2	10000.0	10027.2	10019.5	10165.0	4.76
ケース3	10000.0	10017.2	10003.0	10180.0	14.58
ケース4	10000.0	10008.4	10011.8	10195.0	27.57
ケース5	10000.0	10008.2	10017.1	10210.0	57.81
ケース6	10000.0	10007.9	10019.7	10225.0	115.48
ケース7	10000.0	10005.9	10026.9	10240.0	195.05
ケース8	10000.0	10012.7	10028.3	10243.0	238.59

リターン尺度である計画最終時点の期待富とリスク尺度である計画最終時点の1次の下方部分積率 (LPM_1) の値を表4に示す。期中での富(1時点と2時点における富)の期待値も示

²⁰現金の平均値は以下のように計算している。

$$\bar{v}_t^* = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I v_t^{(i)*}$$

す。また、計画最終時点では経路によって異なる500通りの富の経験分布が得られる。その累積分布を図3に示す。

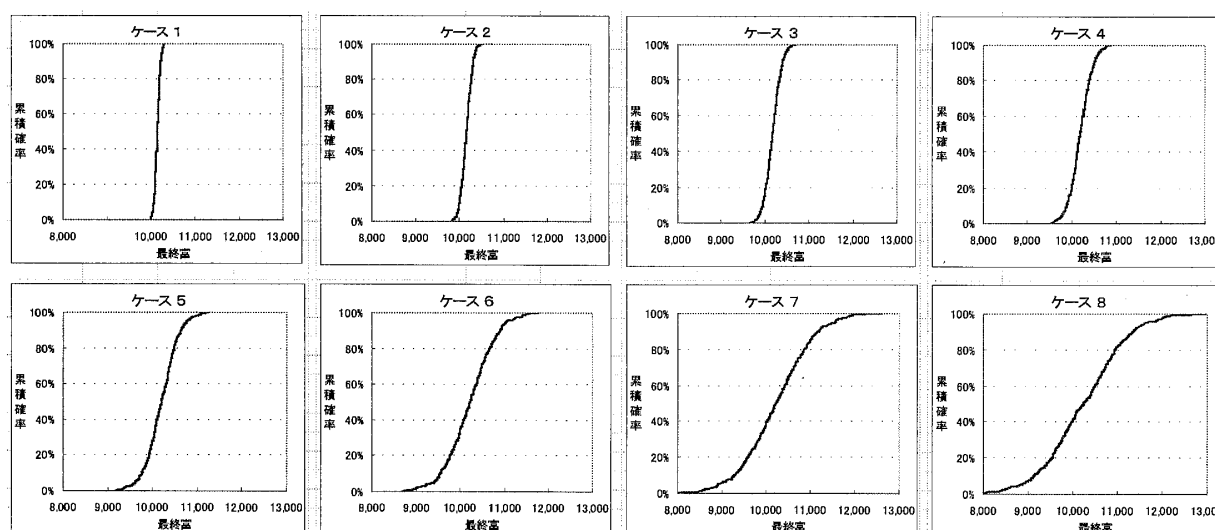


図 3: 最終富の累積分布関数の比較

3.3. 結果 2 : 投資量決定モデル

(1) 投資量 (投資基準価額)

投資量決定モデルによって問題を解くと、表5に示すような投資量 (投資基準価額) が最適解として求められる。ただし、1時点と2時点の現金はシミュレーション経路によって異なるので、紙面の都合上、その平均値を示す。具体的には以下の決定変数に対する最適解である。

$$\text{現金} : v_0^*, \bar{v}_t^*, (t = 1, 2)$$

$$\text{危険資産} : z_{jt}^*, (j = 1, 2, 3; t = 0, 1, 2)$$

表 5: 投資量 (投資基準価額)

	現金 (平均)			株式			債券			CB		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
ケース 1	7849.5	7865.2	6984.1	0.0	0.0	0.0	1383.0	1862.2	3075.3	767.5	307.7	0.0
ケース 2	6128.8	6016.5	3227.4	0.0	655.7	223.4	2967.8	3317.4	6569.0	903.3	36.4	0.0
ケース 3	3997.9	3856.0	1063.0	239.9	1002.3	423.0	4521.2	5029.8	8516.0	1240.9	128.6	0.0
ケース 4	590.5	970.2	192.6	514.2	1136.5	504.6	7331.2	7899.5	9306.3	1564.1	0.0	0.0
ケース 5	0.0	168.7	213.3	864.7	1825.2	956.4	5227.0	6541.9	6958.4	3908.3	1467.1	1878.8
ケース 6	0.0	192.9	179.2	984.8	2673.9	1283.8	2732.6	3452.3	3694.6	6282.6	3682.5	4847.4
ケース 7	0.0	186.1	210.6	1671.8	3513.2	1909.6	0.0	392.4	926.1	8328.2	5909.3	6959.9
ケース 8	0.0	0.0	0.0	10000.0	10000.0	10000.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

(2) リスクとリターン

投資額決定モデルの結果と同様に、リターン尺度である最終時点の期待富とリスク尺度である最終時点の1次の下方部分積率(LPM_1)の値を表6に、最終富の経験分布の累積分布を図4に示す。

表 6: 各時点の期待富の大きさとリスク

	初期富	期中富		最終富	LPM_1
	0	1	2	3	
ケース1	10000.0	10049.2	10098.0	10148.7	0.00
ケース2	10000.0	10052.6	10106.0	10165.0	4.53
ケース3	10000.0	10057.6	10116.1	10180.0	14.20
ケース4	10000.0	10065.1	10129.1	10195.0	26.69
ケース5	10000.0	10070.7	10140.4	10210.0	49.30
ケース6	10000.0	10074.8	10150.3	10225.0	97.04
ケース7	10000.0	10079.6	10161.0	10240.0	157.24
ケース8	10000.0	10084.7	10172.9	10258.3	276.49

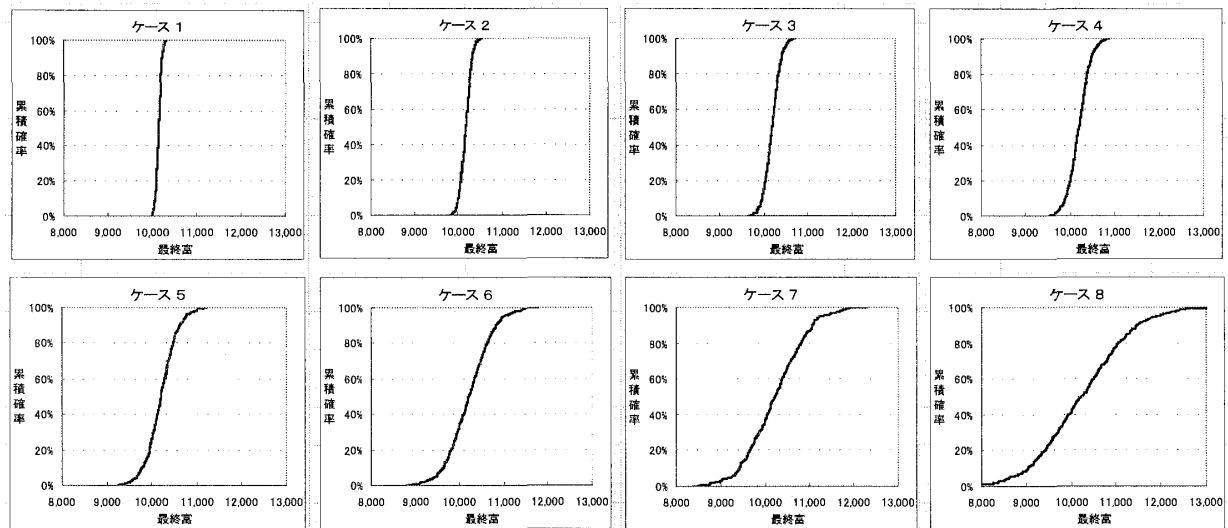


図 4: 最終富の累積分布関数の比較

3.4. 考察とモデルの比較

3.2項と3.3項の結果について考察をするとともにモデルの比較を行う。ケース1はリスク最小化を目指しているため、現金(コール運用)と債券の投資額(量)が大きい。しかし、期待最終富の要求水準を大きくするにつれて、株式とCBの投資額(量)が大きくなる。特に、ケース8では期待最終富の最大化を目指すために、株式への投資を多く行っている。両方のモデルともに同様の結果が得られており、しかも極めて直感的に理解しやすい結果である。期待最終富の要求水準が高いケースでは、0時点の現金(コール運用額)は0である(すべて危険資産に投資する)が、1時点と2時点では経路によって富の水準が変わってくるため、現

金(コール運用額)は0ではなくなる可能性が高くなる²¹。結果を見ると、現金(コール運用額)は投資額決定モデルと投資量決定モデルでは大きく異なる。投資量決定モデルに比べて、投資額決定モデルの現金(コール運用額)は大きい。これは、投資量決定モデルでは、危険資産に対する投資額は固定されないため、経路によって異なる富の水準の違いを記述する役割を果たす現金(コール運用額)を少なくすることができるからであると考えられる。

また、そのことはリスクとリターンの大きさにも影響を与えている。ケース2~ケース7は同じ期待最終富(リターン)であるが、リスク(LPM_1)の値は投資量決定モデルの方が小さい。さらに、ケース8(期待最終富最大化問題)では、投資量決定モデルの期待最終富は投資額決定モデルの期待最終富に比べて大きい。要求期待富の水準の刻み幅をより小さくして、効率的フロンティアを記述すると、図5のようになる。

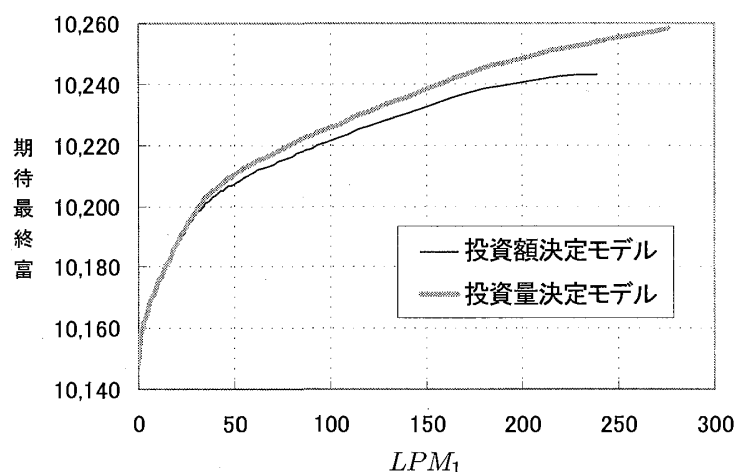


図 5: 効率的フロンティア

図5より、本研究で取り扱うリスクとリターンの尺度では、投資量決定モデルの方が投資額決定モデルよりもよいモデルである可能性が高い²²。投資量決定モデルの決定変数は、経路ごとに異なる資産価格(収益率)を内包しない投資量であるのに対して、投資額決定モデルは経路ごとに資産価格(収益率)の違いに影響を受ける投資額を(経路に依存しない)決定変数としている。そのため、投資額決定モデルは資産価格の違いをすべて現金によって反映させなければならないのに対し、投資量決定モデルの方が、モデルが取り得る解の範囲が広く、そのこともよりよい最適解を導出できる要因の一つであると考えられる。

3.5. 買い持ち戦略との比較

多期間にわたる意思決定の効果を調べるために、買い持ち戦略と比較する。買い持ち戦略とは、計画期間の最初の時点でのみ投資配分の意思決定を行い、計画最終時点まで何もし

²¹0時点で危険資産にすべて投資を行い、買い持ち戦略をしない限り、現金(コール運用額)は0ではなくなる。投資量決定モデルでは買い持ち戦略は許されるが、投資額決定モデルでは買い持ち戦略は許されない。

²²図5は典型的な1つの例にしか過ぎないが、乱数の組み合わせが異なる100通りの実験も行った結果、すべてのケースにおいて投資量決定モデルの方が投資額決定モデルよりもよい結果を得た。具体的には、同じリターン(期待最終富)であれば、投資量決定モデルのリスク(LPM_1)の方が小さい値になった。ただし、各経路ごとに投資量決定モデルを用いた場合の最終富と投資額決定モデルを用いた場合の最終富を比べると、その大きさは様々であり、必ずしも投資量決定モデルによる値の方がよいということはいずれも確認しておく。また、他のリスク尺度におけるモデルの比較についても今後検討する必要がある。

ない、つまり買い持ち (buy and hold) をする戦略のことである。買い持ち戦略型の投資量決定モデルは以下のように定式化できる。

【 買い持ち戦略型投資量決定モデル 】

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (44)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \quad (45)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{\rho}_{jT} z_{j0} + \left(\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I R_T^{(i)} \right) v_0 \geq W_E \quad (46)$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} z_{j0} + R_T^{(i)} v_0 \right\} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (47)$$

$$z_{j0} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n;)$$

$$v_0 \geq 0$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I)$$

ただし、 $R_T^{(i)} = (1 + r_0) \prod_{t=1}^{T-1} (1 + r_t^{(i)})$ とする。シミュレーション型多期間確率計画モデルにおいては投資量決定モデルのみが、その特別な場合として買い持ち戦略を採用することが許される。そこで、投資量決定モデルによる数値実験例を用いて、買い持ち戦略とリバランス戦略の0時点における最適投資量を比較した結果を表7に示す²³。

リバランス戦略の方が買い持ち戦略よりもよいリスク・リターンを示している。リバランス戦略の方がケース1では同じリスク (LPM_1) で計画最終時点での期待富が大きく、ケース2～ケース7では同じ期待最終富でリスクが小さくなっている。ケース8ではリバランス戦略型モデルで問題を解いても、結果的に買い持ち戦略を採用することになっている。また、最適投資量もかなりの違いが見られる。例えば、ケース3を見てみよう。債券への0時点での投資量は、リバランス戦略 (4521.2 単位) の方が買い持ち戦略 (6521.8 単位) よりも少なく投資をする結果になっている。しかし、リバランス戦略は時間の経過とともに債券への投資量を増やしている (1時点は 5029.8 単位、2時点は 8516.0 単位と増えている)。多期間モデルではこの例のように「現時点では債券を少なく、徐々に債券を増やしていく」という計画を立てることが可能であり、このような意思決定を行うことで、買い持ち戦略に比べて、目的関数を改善することができる。リバランス戦略の方が買い持ち戦略に比べて、意思決定の自由度が大きく、結果として得られる両戦略の差が多期間にわたる意思決定効果と考えることができる。

4. シミュレーション型モデルに関連する議論

4.1. 二種類のタイプの多期間確率計画モデルの比較

資産価格 (収益率) 変動などを離散的な確率変数として取り扱う近似モデルとして、実際に確率計画問題を解くとき、

- ① (従来から提案されている) シナリオ・ツリー型多期間確率計画モデル、

²³表7のリバランス戦略の結果は、表5と同じである。

表 7: 取引戦略の違いによる最適解の比較

買い持ち戦略						
	現金	株式	債券	CB	期待最終富	LPM_1
ケース 1	7793.6	164.2	2042.2	0.0	10146.4	0.0
ケース 2	4925.4	410.3	4625.7	38.7	10165.0	5.6
ケース 3	2697.3	627.9	6521.8	153.1	10180.0	15.9
ケース 4	505.7	822.9	8327.4	344.0	10195.0	28.4
ケース 5	0.0	1087.4	6414.0	2498.6	10210.0	50.8
ケース 6	0.0	1715.1	3527.8	4757.2	10225.0	98.2
ケース 7	0.0	2507.7	710.4	6781.9	10240.0	158.2
ケース 8	0.0	10000.0	0.0	0.0	10258.3	276.5

リバランス戦略						
	現金	株式	債券	CB	期待最終富	LPM_1
ケース 1	7849.5	0.0	1383.0	767.5	10148.7	0.0
ケース 2	6128.8	0.0	2967.8	903.3	10165.0	4.5
ケース 3	3997.9	239.9	4521.2	1240.9	10180.0	14.2
ケース 4	590.5	514.2	7331.2	1564.1	10195.0	26.7
ケース 5	0.0	864.7	5227.0	3908.3	10210.0	49.3
ケース 6	0.0	984.8	2732.6	6282.6	10225.0	97.0
ケース 7	0.0	1671.8	0.0	8328.2	10240.0	157.2
ケース 8	0.0	10000.0	0.0	0.0	10258.3	276.5

② (本研究で提案した) シミュレーション型多期間確率計画モデル, の二種類のタイプのモデル化が考えられる. これらの二種類のタイプの多期間確率計画モデルを比較してみよう.

表 8: モデルの比較

要素	シナリオ・ツリー型	シミュレーション型
不確実性の記述	シナリオ・ツリー	シミュレーション経路
投資の意思決定	各時点・各状態ごと	各時点ごと

多期間にわたる資産配分問題を確率的な制御の問題として考えてみよう. この問題は, 投資家にとって最大の期待効用, もしくは好ましいリスク・リターンを得られるように, 各時点でのポートフォリオの収益の確率分布を制御する動的な資産配分 (どのように資産配分を動的に変化させていくか) を決定する問題である.

ポートフォリオの収益 (富) は, ポートフォリオの構成とポートフォリオに含まれる資産価格変動 (収益率) の確率分布によって決まる. 各資産価格変動の確率分布はあらかじめ想定された分布を用いるが, 各時点でのポートフォリオの収益分布 (富の分布) はポートフォリオの構成によって様々に変化する. 実際にこのような問題を直接的に取り扱うことによって問題を解くのは難しい.

二種類のタイプの多期間確率計画モデルは, このような問題を近似的に, しかも実際に問題を解くための近似の方法が異なるモデルである.

「投資の意思決定」の適切さを重視したモデルがシナリオ・ツリー型モデルであり、「不確実性の記述」の精細さを重視したモデルがシミュレーション型モデルである。将来のある時点(t 時点)の投資の意思決定は、 t 時点までにどのような状態が生じたかによって(t 時点の状態を前提にして生じる $t+1$ 時点以降の状態も考慮して)、決められるはずである。シナリオ・ツリー型モデルはこの考え方を忠実にモデル化している。しかし、この考え方をモデル化し、かつ、不確実性の記述を精細にしようとする問題の規模が膨大になり、実際の問題を解くことができなくなる。一方、シミュレーション型モデルは、不確実性の記述を精細にするのと引き換えに、投資の意思決定は簡便にしている。将来のある時点において、状態にかかわらずにある1つの投資比率(投資額、投資量)にリバランスをするという戦略(意思決定戦略)のもとで、その最適な投資比率(投資額、投資量)を求める方法をモデル化していると考えることができる。このことは、将来のある時点(t 時点)の投資の意思決定が、 t 時点でどのような状態が生じたかを考慮しないで(時間経過に伴う不確実性の減少を考慮しないで)決められることを前提にしたモデル化であることを意味する。

この二つのモデルはそれぞれのモデルにおいても、問題の規模を固定すれば、投資の意思決定と不確実性の記述はトレードオフ関係にあるが、モデル間においてもどちらを重視するかによってモデルの選択が行われることになる。

4.2. シミュレーションと最適化の融合

金融工学分野において、モンテカルロ・シミュレーションは非常に強力で有用な道具である。主に、以下の二つの領域の問題に適用されている。

- (1) オプション価格などのデリバティブズの評価(価格付け)
- (2) 金融機関の保有する資産(ポートフォリオ)の価値のリスク評価(Value at Riskの計算など)

資産配分問題に関連して、モンテカルロ・シミュレーションを実施するならば、それは(2)の領域に含まれる。資産ポートフォリオを運用する投資家は、その資産価値が将来どのようになるかに関心がある。もし、現在保有している(もしくは保有しようとしている)資産ポートフォリオの価値の変動を調べたい場合、将来の資産価格変動のシミュレーションを行い、その経験分布を生成することによって、そのリターンやリスクなどを調べることができる。すなわち、資産(ポートフォリオ)の価値変化を確率事象とみなし、それらの様々な組み合わせを表すサンプル試行によって、資産価値(内生変数)に対する経験分布を生成し、多期間にわたる資産価値のリスク評価を行う。

一方、リスク評価だけでなく、リスク制御を行うためにはどのようにすればよいだろうか。投資家の要求するリスク特性を持つようなポートフォリオに組み替えることによって、リスク制御を行うことができる。シミュレーション型多期間確率計画モデルはモンテカルロ・シミュレーションによるリスク評価の枠組みを直接的に使って、最適なポートフォリオ管理を行うことができる。逆の見方をすれば、このモデルを用いることによって、最適な資産ポートフォリオを組んだときの資産価値の経験分布を生成することができるので、「最適なポートフォリオ」に対して、モンテカルロ・シミュレーションによるリスク評価を直接行うことができることになる。この考え方を利用すれば、モンテカルロ・シミュレーションを適用してリスク評価モデルを構築していた問題に対して、リスク制御モデルの構築が容易に可能である。その一例として、年金や保険会社などのALMに対する多期間最適化モデルや、債券ポートフォリオの信用リスク管理モデルなどが考えられる。従来はシミュレーショ

ンによるリスク評価のみを考えていた問題に「リスク制御」を直接的に用いることができるので、本論文で提案したモデルの適用範囲は極めて広いことが分かるだろう。

5. 結論と今後の課題

本研究では、多期間にわたる最適資産配分決定のための多期間線形確率計画モデルを提案した。本研究で提案したシミュレーション型確率計画モデルは、その決定変数を投資比率と置いたときには、従来の確率制御(動的確率計画)モデルと同じタイプのモデルである。しかし、それを実務的な観点(問題の最適解を実際に導き出せる点)から考えて、モデルを修正している点に新しいモデルとしての価値がある。モデルは線形計画問題として定式化が可能であるため、大規模な問題も解くことができるのに加え、計算機上の実装もある程度容易である。確率計画モデルを用いて多期間資産配分問題を考えている実務家にとって、標準的なツールを用いて問題を解くことができるということは、実際に用いるためのモデルとして、極めて重要なことである。

資産価格の変動を確率変数として記述する場合、モンテカルロ・シミュレーションを用いて、その振る舞いを生成することが多い。本モデルは、そのシミュレーションで生成された複数のサンプル・パス(シミュレーション経路)を直接的に利用することができるので、どのような確率分布に従っている場合でも(確率分布を複雑に合成した場合でも)、シミュレーションでパスを生成することができれば、問題を解くことができるという極めて柔軟で強力なモデル化の方法である。

実際に問題を解くためのモデルとして、投資額決定モデルと投資量決定モデルを示した。この2つのモデルはその規模や取り扱いの容易さは同じであるため、その意味ではどちらのモデルを使ってもよいが、モデルの特徴や振る舞い、さらに売買コストを考慮したモデルへの拡張性などを考慮すると、投資量決定モデルを用いた方がよいと考えている。投資量決定モデルは資産価格や投資量といった実際の市場での取引を直接的に用いることができるので、モデルとしても取り扱いやすい。ただし、モデル選択についてはさらなる検討が必要である。

モデルの振る舞いを検証するために、500サンプルの簡単な数値実験も行った。リスクとリターンの間のトレードオフの関係や具体的な資産配分政策を示すことによって簡単な例ではあるが、モデルの振る舞いを見ることができた。本研究の第一の目的は、新しい枠組みのもとで長期的な資産配分決定に用いることができる多期間確率計画モデルを提案することである。サンプル数や資産数、資産価格の従う確率分布を様々に変えたときにモデルがどのような振る舞いをして、最適解を導き出すのかなど、検証する必要がある課題は様々あるが、それらは今後の課題としたい。また、シナリオ・ツリーを用いた確率計画モデルとの違いについても数値実験によって調べる必要もある。

本モデルはモンテカルロ・シミュレーションと最適化手法を融合したモデルであり、それを用いたリスク管理に対する新しい概念の提案も行った。本研究では特に具体的な形で示してはいないが、リスク評価とリスク制御を統合したリスク管理プロセスについての詳細な方法は現在研究中であり、今後の課題としたい。

参考文献

- [1] V.S. Bawa and E.B. Lindenberg: Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework. *Journal of Financial Economics*, 5 (1977) 189-200.

- [2] W.V. Harlow: Asset allocation in a downside-risk framework. *Financial Analysis Journal*, (September-October 1991) 28-40.
- [3] 枇々木規雄: 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル. 慶應義塾大学理工学部管理工学科テクニカルレポート, No.99002(1999).
- [4] 枇々木規雄: 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル. 日本金融・証券計量・工学学会 1999年冬季大会予稿集 36-55.
- [5] 枇々木規雄: 金融工学と最適化 (朝倉書店, 2001).
- [6] 本多俊毅: 投資機会が変動する場合の最適ポートフォリオについて. 現代ファイナンス, 6 (1999) 19-45.
- [7] 今野浩: 理財工学 II — 数理計画法による資産運用最適化 — (日科技連, 1998).
- [8] R.C. Merton: Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The Review of Economics and Statistics*, 51 (1969) 247-257.
- [9] J.M. Mulvey and W.T. Ziemba: Asset and liability allocation in a global environment. In R.A. Jarrow, V. Maksimovic and W.T. Ziemba (eds.): *Handbooks in OR & MS, Vol.9* (Elsevier Science, 1995), 435-463.
(翻訳) 枇々木規雄: グローバル環境における資産負債配分. 今野浩, 古川浩一編著: ファイナンスハンドブック (朝倉書店, 1997), 424-450.
- [10] J.M. Mulvey and W.T. Ziemba: Asset and liability management systems for long-term investors: Discussion of the issues. In W.T. Ziemba and J.M. Mulvey (eds.): *Worldwide Asset and Liability Modeling* (Cambridge University Press, 1998), 3-38.
- [11] P.A. Samuelson: Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *The Review of Economics and Statistics*, 51 (1969) 239-246.
- [12] 竹原均: ポートフォリオの最適化 (朝倉書店, 1997).

付 録

A. 数値実験 : その他結果

投資額決定モデルによって求められた最適投資額を用いて平均投資量および平均投資比率を計算できる. 一方, 投資量決定モデルによって求められた最適投資量を用いて平均投資額および平均投資比率を計算できる. 2つのモデルの具体的な投資政策の比較を行うために, これらの結果を示す.

A.1. 投資額決定モデル : その他結果

(1) 平均投資量 (投資基準価額)

最適投資額を用いて投資量を計算した結果を表9に示す. 投資額決定モデルにおける投資量は経路ごとに異なるので, 平均値を示す.

$$\begin{aligned} \text{現金} &: v_0^*, \quad \bar{v}_t^*, (t = 1, 2) \\ \text{危険資産} &: \frac{x_{j0}^*}{\rho_{j0}}, (j = 1, 2, 3), \quad \frac{x_{jt}^*}{\rho_{jt}}, (j = 1, 2, 3; t = 1, 2) \end{aligned}$$

表 9: 平均投資量 (投資基準価額)

	現金			株式			債券			CB		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
ケース1	7933.9	7921.2	7006.5	0.0	0.0	0.0	1269.0	1798.9	3052.9	797.1	315.2	0.0
ケース2	5991.6	6174.3	3209.5	0.0	725.9	220.5	3075.3	3127.0	6589.5	933.1	0.0	0.0
ケース3	3784.6	3813.6	1122.2	263.8	985.4	394.0	4626.9	5218.2	8486.8	1324.7	0.0	0.0
ケース4	0.0	1098.2	774.4	421.6	1148.0	536.4	7554.2	7762.2	8701.0	2024.2	0.0	0.0
ケース5	0.0	727.0	1079.6	1336.3	2652.5	827.5	4066.2	6174.3	5556.9	4597.5	454.5	2553.1
ケース6	0.0	848.9	1424.1	1712.4	4325.7	1156.1	1382.7	3171.4	1675.4	6904.9	1661.9	5764.0
ケース7	0.0	1082.6	1855.5	4296.0	8490.6	5046.9	0.0	0.0	0.0	5704.0	432.7	3124.6
ケース8	0.0	1514.7	2077.5	10000.0	8498.0	7950.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

※ 危険資産への投資量の平均値は、 $\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{x_{jt}^*}{\rho_{jt}^{(i)}}$ であるが、ここでは計算を簡単にするために $\frac{x_{jt}^*}{\bar{\rho}_{jt}}$ とする。
 また、平均資産価格 $\bar{\rho}_{jt}$ は以下のように計算できる。

$$\bar{\rho}_{jt} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \rho_{jt}^{(i)}$$

(2) 平均投資比率

最適投資額を用いて投資比率を計算した結果を表10に示す。投資比率は経路ごとに異なるので、平均値を示す。

$$\begin{aligned} \text{現金} &: \frac{v_0^*}{w_0}, \frac{\bar{v}_t^*}{\bar{w}_t}, (t = 1, 2) \\ \text{危険資産} &: \frac{x_{j0}^*}{w_0}, (j = 1, 2, 3), \frac{x_{jt}^*}{\bar{w}_t}, (j = 1, 2, 3; t = 1, 2) \end{aligned}$$

表 10: 平均投資比率

	現金			株式			債券			CB		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
ケース1	79.34%	79.21%	70.06%	0.00%	0.00%	0.00%	12.69%	18.10%	30.91%	7.97%	3.18%	0.00%
ケース2	59.92%	61.74%	32.10%	0.00%	7.32%	2.24%	30.75%	31.47%	66.72%	9.33%	0.00%	0.00%
ケース3	37.85%	38.14%	11.22%	2.64%	9.94%	4.01%	46.27%	52.51%	85.93%	13.25%	0.00%	0.00%
ケース4	0.00%	10.98%	7.74%	4.22%	11.58%	5.46%	75.54%	78.11%	88.10%	20.24%	0.00%	0.00%
ケース5	0.00%	7.27%	10.80%	13.36%	26.75%	8.42%	40.66%	62.13%	56.27%	45.97%	4.58%	25.93%
ケース6	0.00%	8.49%	14.24%	17.12%	43.62%	11.76%	13.83%	31.91%	16.96%	69.05%	16.75%	58.55%
ケース7	0.00%	10.83%	18.56%	42.96%	85.63%	51.34%	0.00%	0.00%	0.00%	57.04%	4.36%	31.74%
ケース8	0.00%	15.15%	20.78%	100.00%	85.70%	80.88%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

※ 表10の平均投資比率は表3の値を直接用いて簡便に計算した値である。各経路ごとの投資比率の平均値とほとんど変わらないので、簡便な計算法を用いる。また、平均富 $\bar{w}_t^*$ は以下のように計算できる。

$$\bar{w}_t^* = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I w_t^{(i)*}$$

A.2. 投資量決定モデル：その他結果

(1) 平均投資額

最適投資量を用いて投資額を計算した結果を表 11 に示す。投資量決定モデルにおける投資額は経路ごとに異なるので、平均値を示す。

$$\begin{aligned} \text{現金} &: v_0^*, \bar{v}_t^*, (t = 1, 2) \\ \text{危険資産} &: \rho_{j0} z_{j0}^*, (j = 1, 2, 3), \bar{\rho}_{jt} z_{jt}^*, (j = 1, 2, 3; t = 1, 2) \end{aligned}$$

表 11: 平均投資額

	現金			株式			債券			CB		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
ケース 1	7849.5	7865.2	6984.1	0.0	0.0	0.0	1383.0	1873.9	3113.8	767.5	310.1	0.0
ケース 2	6128.8	6016.5	3227.4	0.0	661.3	227.3	2967.8	3338.2	6651.3	903.3	36.7	0.0
ケース 3	3997.9	3856.0	1063.0	239.9	1010.8	430.3	4521.2	5061.2	8622.8	1240.9	129.6	0.0
ケース 4	590.5	970.2	192.6	514.2	1146.1	513.3	7331.2	7948.8	9423.1	1564.1	0.0	0.0
ケース 5	0.0	168.7	213.3	864.7	1840.7	972.9	5227.0	6582.7	7045.7	3908.3	1478.6	1908.5
ケース 6	0.0	192.9	179.2	984.8	2696.6	1306.0	2732.6	3473.8	3741.0	6282.6	3711.5	4924.1
ケース 7	0.0	186.1	210.6	1671.8	3543.0	1942.6	0.0	394.8	937.7	8328.2	5955.7	7070.0
ケース 8	0.0	0.0	0.0	10000.0	10084.7	10172.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

(2) 平均投資比率

最適投資量を用いて投資比率を計算した結果を表 12 に示す。投資比率は経路ごとに異なるので、平均値を示す。

$$\begin{aligned} \text{現金} &: \frac{v_0^*}{W_0}, \frac{\bar{v}_t^*}{\bar{W}_t}, (t = 1, 2) \\ \text{危険資産} &: \frac{\rho_{j0} z_{j0}^*}{W_0}, (j = 1, 2, 3), \frac{\bar{\rho}_{jt} z_{jt}^*}{\bar{W}_t}, (j = 1, 2, 3; t = 1, 2) \end{aligned}$$

表 12: 平均投資比率

	現金			株式			債券			CB		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
ケース 1	78.50%	78.27%	69.16%	0.00%	0.00%	0.00%	13.83%	18.65%	30.84%	7.67%	3.09%	0.00%
ケース 2	61.29%	59.85%	31.94%	0.00%	6.58%	2.25%	29.68%	33.21%	65.82%	9.03%	0.37%	0.00%
ケース 3	39.98%	38.34%	10.51%	2.40%	10.05%	4.25%	45.21%	50.32%	85.24%	12.41%	1.29%	0.00%
ケース 4	5.91%	9.64%	1.90%	5.14%	11.39%	5.07%	73.31%	78.97%	93.03%	15.64%	0.00%	0.00%
ケース 5	0.00%	1.67%	2.10%	8.65%	18.28%	9.59%	52.27%	65.37%	69.48%	39.08%	14.68%	18.82%
ケース 6	0.00%	1.91%	1.77%	9.85%	26.77%	12.87%	27.33%	34.48%	36.86%	62.83%	36.84%	48.51%
ケース 7	0.00%	1.85%	2.07%	16.72%	35.15%	19.12%	0.00%	3.92%	9.23%	83.28%	59.09%	69.58%
ケース 8	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%	100.00%	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

枇々木 規雄

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1

E-mail : hibiki@ae.keio.ac.jp

ABSTRACT

**MULTI-PERIOD STOCHASTIC PROGRAMMING MODELS
USING SIMULATED PATHS FOR STRATEGIC ASSET ALLOCATION**

Norio Hibiki
Keio University

This paper discusses optimal dynamic investment policies for investors, who make investment decisions in each of the asset categories over time. We propose linear programming models using simulated paths to solve large-scale problems in practice. Linear programming models can be formulated to adopt either fixed-value rule or fixed-amount rule instead of general fixed-proportion rule. These formulations can be simply implemented and solved very fast. Some numerical examples are tested to illustrate the characteristics of the models. These models can be used to improve trade-off between risk and expected wealth, and we can get interesting results for dynamic asset allocation policies.