

## ビールと清酒の需要変化—競争のある成長モデル

松山敬左  
電気通信大学

(受理 1999 年 8 月 6 日 ; 再受理 2000 年 7 月 5 日)

**和文概要** ビール及び清酒の出荷量の時間的変化を説明するモデルをたてる. まず清酒への需要の一部が時間の経過とともにビールへの需要へとシフトしていくという単純なモデルをたてそれを吟味する. このモデルは微分方程式の組からなっており, 各々の方程式は, いくつかのパラメータで決定される. ビール及び清酒の出荷量の実現値を時系列データとして整理する. それらにあてはまるような実験式を, パラメータを実験定数として定めることにより決定し, その数学的な性質を吟味する. この吟味を基により複雑なモデルをたてる. このモデルはビールの需要変化が可処分所得の変化で説明できるとするものである. その上でビール需要と清酒需要との間に一種の競争関係があると前提して, 両者の経年的な変化を記述する実験式を求めた. 得られた実験式は, ビールと清酒の時間的変化を, かなり正確に記述するものになっている.

### 0. はじめに

ビール市場において 38 年ぶりに A 社のマーケット・シェアが K 社のそれを超えたことが最近話題になった. ビール市場における競争は熾烈なものがあり, 市場に参入しているメーカーは次々と新しい製品を市場に供給している. ビール・メーカーはビール業界間での競争の他に, 他のアルコール飲料, 例えば清酒との競争を考慮しなくてはならない.

これらの事情を考慮したビールの需要分析は, これまでも多くのものが公表されている. 例えば宮川 [5] pp. 254-262 にその例が紹介されている.

戦後ビールの出荷量は, 着実に増加してきた. ビールは主に晩春から初秋にかけて飲まれるものであった. しかしビールを飲用することの季節性が薄れてきて, 食生活もビールが飲まれる機会が多くなるものに変化してきた. その結果がビールの消費量の増加になったものと思われる. その一方清酒の需要はむしろ停滞気味で, 清酒需要の一部がビール需要に変化して来たように見える. 清酒の飲用は季節性のないものから, 季節性の強い(晩秋から早春)ものに変化してきた.

需要分析という面からみると, ビール市場は比較的扱い易い.

ビール自体に, 品質の差があまりないこと, 品質による価格差がないこと, 消費者が購入してから消費するまでの時間が短いこと(つまり出荷量を近似的に消費量とみなせること), 市場に出荷され消費される量が多くて消費の動向を掴みやすいこと, などがその理由としてあげられる. なにより信頼性の高い公表されたデータが, 入手可能である. 清酒の場合は多少事情が異なる. 品種あるいは品質の差が大きく価格の差が大きい. その結果清酒需要の時間的変化はビールの場合より複雑な動きを見せると予想される.

例えば, ビール(あるいは清酒)の出荷量の時系列データを時間的経過に従うようにグラフに描く. このグラフに曲線をあてはめる. この曲線のあてはめ(curve fitting)は, ある種のパラメータを決定しあてはめ曲線を記述する方程式を求めるという形で実行される. 求め

られた方程式は実験式と呼び、実験式を決定するパラメータを実験定数と呼ぶ。このような方法は、理学・工学では普通に行われているものである。

似た方法は、統計学や計量経済学の分野でもよく行われている。確率変数を導入し説明変数と被説明変数の実現値（観測値）の組み合わせに対して回帰式を決定するという方法である。回帰式を決めるパラメータ（母数）は推定値であり、前提された確率変数の性質によりその確率的な性質が検討される。そして説明変数として導入したものが適当であったかが問題になり、求められた母数の推定値としての性質の吟味が分析の主目的となる。

それに対して、実験式を求めるのは、もっと単純な考えから出ている。まず理論的な根拠からモデルを立て、求めるべき方程式を決める。その上で管理された実験を行いデータを収集する。このデータがある順序で整理したものに、想定された方程式を前提して、それにデータがあてはまるように実験定数を決め実験式を導き出す (cf.[7] p. 6)。

このような考え方が許されるのは、理工学の分野では、1つの理論体系を前提とする限り、求めるべき実験式がほぼ唯一に決まるからである。さらに実験式の決定が、かなり複雑な数学的操作により行われるために、実験定数の推定値としての確率論的な性質がわからなくなっているためであろう。しかし実験式が数学的な式の形で求まるから、その数学的な特色が明確になり種々の定量分析が可能になる。

## 1. 基本モデルの導入

ビールの消費量と清酒の消費量の時系列的な変化を、現象の面から観察してみよう。するとビールの需要の時系列的な変化が、他のアルコール飲料の需要の変化からは影響を受けることなく、それ独自のダイナミズムにより記述されるようにみえる。それに対して、清酒の需要の変化は、ビール需要の変化の影響を受けている。例えば1970年頃より清酒需要が、減少しはじめる。それは、清酒の需要の一部がシフトして、ビール需要の一部に加わっていることの結果ではないかとも考えられる。ただしビールの消費量が清酒の需要よりはるかに大きいので、ビール需要に加わる清酒需要は、近似的に無視できる結果になる。しかし清酒需要の側からみれば、シフトする需要は清酒需要を決定する1つの要因になりうるというものである。数理生物学の分野にはLorka-Volterraの補食・被補食モデルという有名なモデルがある。このモデルの解説は、例えば上田[8]、森田[6]にある。これらを参考にして、以下のモデルを考えてみよう。

### モデル1

$B(t)$ ;  $t$  におけるビールの出荷量,  $S(t)$ ;  $t$  における清酒の出荷量

とすると

$$\frac{1}{B(t)} \cdot \frac{d}{dt} B(t) = \dot{B}(t)/B(t) = \bar{a} + \bar{b}B(t) \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{S(t)} \cdot \frac{d}{dt} S(t) = \dot{S}(t)/S(t) = \bar{\alpha} + \bar{\beta}S(t) + \bar{\gamma}B(t) \quad (1.2)$$

が成立するとする。ただしここで

$$\bar{a} > 0, \bar{b} < 0, 1 > |\bar{a}| \gg |\bar{b}|, \quad \bar{\alpha} > 0, \bar{\beta} < 0, 1 > |\bar{\alpha}| \gg |\bar{\beta}| \gg |\bar{\gamma}|$$

を仮定しておく。

上のモデルは、ビールが帰化生物、清酒が帰化生物に補食される在来種の生物とするアナロジーで考えるとわかり易い。例えば外来の帰化生物は、天敵にあたるものがないときは、在来の生物を補食しながらその個体数を増加していく。個体数がある水準以下のときは、個体数の増加を抑圧するのは、その帰化生物間の競争である。その一方帰化生物に補食される在来種の個体数の水準は、帰化生物の個体数の変化から直接的な影響を受ける。帰化生物の個体数が増大すれば、補食されてしまう機会が多くなるからである。これと同じような現象が、アルコール飲料市場で、ビールと清酒の間に起こっていると想定したものである。ビールの出荷量は、いわゆる Logistic 曲線により記述される。

$$a = \bar{a}, \quad b = -\bar{a}/\bar{b} \quad (1.3)$$

として (1.1) を解くと

$$B(t) = b/(1 + c \cdot \exp(-at)) \quad (1.4)$$

となり、これより

$$\dot{B}(t) > 0, \quad B(t) \leq b, \quad B(0) = b/(1 + c), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = b$$

が導かれる。つまりビールの需要量は年々増加していく。そしてある飽和的な水準に収束していく。Logistic 曲線のこれらの性質については、上田 [8]、森田 [6] に簡潔な解説がある。

清酒の出荷量  $S(t)$  の変化は  $\bar{\gamma} > 0$  か  $\bar{\gamma} < 0$  によって違ってくる。

$\bar{\gamma} > 0$  のとき

このとき清酒の出荷量は、ビールの出荷量が増加することに刺激を受けて増加していく。ビールの出荷量の増加がある場合の方がいない場合よりも、清酒の出荷量は増加していく。それは  $\dot{S}(t) > 0$  が成立して  $S(t)$  が単調に増加していくからである。

$\bar{\gamma} < 0$  のとき

ビールと清酒の間にある種の競争が予想される場合である。清酒に対する需要の一部が、ビールに対する需要にシフトしていく。これは次のように説明される。当初  $B(t), S(t)$  は小さいので、 $S(t)$  は増加する。しかし  $t$  が十分大きくなって、 $\bar{\alpha} + \bar{\beta}S(t) + \bar{\gamma}B(t)$  がマイナスになれば、 $S(t)$  は減少に転じる。 $B(t)$  が一定の極限值  $b$  に収束するので  $S(t)$  には極大値が存在することが期待される。

ビールと清酒の出荷量に関しては、 $\bar{\gamma} < 0$  が予想されるので、この場合を少し詳しく吟味しておこう。ここではモデル 1 の数学的な性質を、定理の形で記述しておく。

**定理 1.** ある点  $(t = t_1)$  で

$$\dot{S}(t_1) = 0, \quad S(t_1) > 0, \quad \dot{B}(t_1) > 0$$

とする。すると  $t = t_1$  で  $\gamma < 0$  ならば  $S(t)$  は極大となり、 $\gamma > 0$  ならば、極小になる。

**証明** 省略

**定理 2.**

- a)  $\gamma < 0$  とする。ある点  $t = t_1$  で  $\dot{S}(t_1) < 0$  としよう。すると  $t_1 < t_2$  となる  $t_2$  において  $\dot{B}(t_2) > 0 \Rightarrow \dot{S}(t_2) < 0$  がいえる。
- b)  $\gamma > 0$  とする。ある点  $t = t_1$  で  $\dot{S}(t_1) > 0$  としよう。すると  $t_1 < t_2$  となる  $t_2$  において  $\dot{B}(t_2) > 0 \Rightarrow \dot{S}(t_2) > 0$  がいえる。

証明 a) の場合を証明しておく.

仮に点  $t = t_2$  において  $\dot{S} > 0$  としよう.  $\dot{S}(t_1) < 0, \dot{S}(t_2) > 0$  であるから  $\dot{S}(t') = 0$  となる点  $t'$  が  $(t_1; t_2)$  の区間中に存在する. そのうちの最小のものを  $t_3$  としよう.  $t_1 < t < t_3$  に対して  $\dot{S}(t) < 0, \dot{S}(t_3) = 0$  である.  $\dot{B} > 0$  ならば  $S(t_3)$  は極大の状態になるが  $t < t_3 \Rightarrow \dot{S}(t) < 0$  が結論されて, 矛盾が生じる.

定理 3. ある  $t_0$  が存在して  $t_0 < t \Rightarrow \dot{B}(t) = 0$  がいえるとする. このとき

a)  $\gamma < 0$  のとき.  $t_0 < t_1$  となる  $t_1$  に対して  $\dot{S}(t_1) < 0$  とする. すると  $t_1 < t_2$  となる  $t_2$  に対して  $|\dot{S}(t_2)| \leq |\dot{S}(t_1)|$  が成立する.

b)  $\gamma > 0$  のとき.  $t_0 < t_1$  となる  $t_1$  に対して  $\dot{S}(t_1) > 0$  とする. すると  $t_1 < t_2$  となる  $t_2$  に対して  $0 < \dot{S}(t_2) \leq \dot{S}(t_1)$  が成立する.

証明 a) の場合を証明しておく.

$t_1 < t$  に対して  $\dot{S} < 0 \Rightarrow \bar{\alpha} + \bar{\beta}S(t) + \gamma B < 0$  である.

$$\dot{S} = S(\bar{\alpha} + \bar{\beta}S + \gamma B), \quad \frac{d^2S}{dt^2} = \dot{S}(\bar{\alpha} + \bar{\beta}S + \gamma B) + \bar{\beta}S\dot{S}$$

であるが, 仮定より

$$\dot{S} < 0, \quad \bar{\beta} < 0, \quad \bar{\alpha} + \bar{\beta}S + \gamma B < 0$$

がいえて  $(d^2S/dt^2) > 0$  がいえる. つまり,  $(dS)/(dt)$  は増加関数である.  $(dS)/(dt) < 0$  であるから, 定理が成立する.

定理 1 によれば,  $t = t_0$  で  $\dot{S}(t) = 0$  となるならば,  $S(t)$  は極大になる. そして定理 2 によれば,  $S(t)$  は  $t_0 < t$  で減少関数になる.(決して増加することはない.) しかも定理 3 によれば, 減少は段々緩やかになっていく. このことは  $S(t)$  が上方からある定常値に収束していくことを示唆する.

$S(t)$  の関数の形がわからないと,  $\dot{S}(t_0) = 0$  を満たす  $t_0$  が存在するかどうか, 存在するとしたらそれがどの範囲に存在するか, あるいは  $S(t_0)$  がどのくらいの大きさになるかわからない. これらのことを知るためには,  $S(t)$  の形を近似的なものでも知る必要がある.

## 2. 基本モデルの近似解

$B(t)$  は微分方程式 (1.1) から (1.4) のように解ける. (1.3) を (1.2) に代入すると,  $\bar{\alpha} \neq \bar{a}$  である限り, 微分方程式を解く過程で超幾何級数が出現して,  $S(t)$  を解析的に決定することはできない. この問題を回避するために, 制御工学で, 例えば Bode 線図を描くときなどでよく行われているように  $B(t)$  を以下で示す  $\bar{B}(t)$  で近似する.

定義 1.

$$\bar{B}(t) = b/(1+c) \quad ; \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (2.1)$$

$$\bar{B}(t) = b/2 + ab(t-t_2)/4; \quad t_1 \leq t \leq t_3 \quad (2.2)$$

$$\bar{B}(t) = b \quad ; \quad t_3 \leq t \quad (2.3)$$

ただし

$$t_1 = (\log(c) + \frac{2(1-c)}{1+c})/a \quad (2.4)$$

$$t_2 = \log(c)/a \quad (2.5)$$

$$t_3 = (\log(c) + 2)/a \quad (2.6)$$

である.

$\bar{B}(t)$  は  $B(t)$  を 3 本の直線で近似するものである.

まず  $t_2$  を  $\bar{B}(t_2) = B(t_2)$  が満たされるように取る. この点において

$$\frac{d}{dt}\bar{B}(t)|_{t=t_2} = \frac{d}{dt}B(t)|_{t=t_2}$$

となるように  $t = t_2$  における  $\bar{B}(t)$  の傾きを決定する. その上で

$$\bar{B}(t_1) = B(0), \quad \bar{B}(t_3) = B(\infty)$$

が満たされる  $t_1, t_3$  を定義して, 3 本の直線を求めるのである.

$B(t)$  を  $\bar{B}(t)$  で近似した場合での  $S(t)$  を  $S_2(t)$  とおく. この場合適用する手順を以下に示しておこう.

$$\alpha = \bar{\alpha}, \quad \beta = -\bar{\alpha}/\bar{\beta}, \quad \gamma = \bar{\gamma} \quad (2.7)$$

とおけば  $S_2(t)$  の方程式が

$$\frac{1}{S_2(t)} \cdot \frac{d}{dt}S_2(t) = \alpha - \frac{\alpha}{\beta} \cdot S_2(t) + \gamma \bar{B}(t)$$

となる.  $t < t_1$  については  $\bar{B}(t) = B(0)$  であるから, これを上式に代入すれば,  $S_2(t)$  が

$$S_2(t) = -\beta(1 + \frac{\gamma}{\alpha}B(0))/[1 + C_1 \cdot \exp(-(\alpha + \gamma B(0))t)] \quad (2.8)$$

のように解ける. 積分定数  $C_1$  は

$$C_1 = -\frac{\beta\gamma}{\alpha} \cdot \frac{B(0)}{S(0)} - \left(1 + \frac{\beta}{S(0)}\right) \quad (2.9)$$

を満足するように定義される.  $t_1$  においては

$$S_2(t_1) = -\beta(1 + \frac{\gamma}{\alpha}B(0))/[1 + C_1 \cdot \exp(-(\alpha + \gamma B(0))t_1)] \quad (2.10)$$

が成立する. (2.8) より,  $t < t_1$  において,  $S_2(t)$  は  $\alpha + \gamma B(0) > 0$  ならば,  $t$  の増加関数であり,  $\alpha + \gamma B(0) < 0$  ならば,  $t$  の減少関数であることがわかる.

$t_1 < t < t_3$  においては (2.2) より

$$\bar{B}(t) = abt/4 - abt_2/4 + 2b/4$$

であるから  $S_2(t)$  は (1.2) より

$$\frac{1}{S_2} \cdot \frac{dS_2}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}S_2 + \frac{1}{4}ab\gamma t + \alpha - \frac{1}{4}b\gamma(at_2 - 2)$$

を満足することになる.

$$n = ab\gamma/4 \quad (2.11)$$

$$m = \alpha - b\gamma(at_2 - 2)/4 = \alpha - b\gamma(\log(c) - 2)/4 \quad (2.12)$$

とおけば

$$\frac{1}{S_2^2} \cdot \frac{dS_2}{dt} = \frac{\alpha}{\beta} + (nt + m) \frac{1}{S_2}$$

が得られる。これは Bernoulli 型の微分方程式である。

$$w = \frac{1}{S_2}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{S_2^2} \cdot \frac{dS_2}{dt}$$

とおけば

$$\frac{dw}{dt} + (nt + m)w = -\frac{\alpha}{\beta}$$

を得る。

$$w(t) = \exp(-\frac{n}{2}t^2 - mt) \cdot h(t)$$

とおけば  $h(t)$  の解が

$$h(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \int \exp(\frac{n}{2}t^2 + mt) dt + C_2,$$

$$n > 0, \gamma > 0 \Rightarrow h(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \exp(-\frac{m^2}{2n}) \operatorname{Erfi}(\frac{nt+m}{\sqrt{2n}}) + C_2',$$

$$n < 0, \gamma < 0 \Rightarrow h(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \sqrt{-\frac{\pi}{2n}} \exp(-\frac{m^2}{2n}) \operatorname{Erf}(\frac{-nt-m}{\sqrt{-2n}}) + C_2''$$

で求められる。ここで関数  $\operatorname{Erf}(t), \operatorname{Erfi}(t)$  は

$$\operatorname{Erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \exp(-z^2) dz; \text{ if } t \geq 0, \quad \operatorname{Erf}(t) = -\operatorname{Erf}(-t); \text{ if } t < 0,$$

$$\operatorname{Erfi}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \exp(z^2) dz; \text{ if } t \geq 0, \quad \operatorname{Erfi}(t) = -\operatorname{Erfi}(-t); \text{ if } t < 0$$

で定義される関数である。つまり

$$n > 0, \gamma > 0 \Rightarrow S_2(t) = \frac{1}{w(t)} = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} (\exp((\frac{nt+m}{\sqrt{2n}})^2) / [\operatorname{Erfi}(\frac{nt+m}{\sqrt{2n}}) + C_2]) \quad (2.13)$$

$$n < 0, \gamma < 0 \Rightarrow S_2(t) = \frac{1}{w(t)} = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{-\frac{2n}{\pi}} (\exp(-(\frac{-nt-m}{\sqrt{-2n}})^2) / [\operatorname{Erf}(\frac{-nt-m}{\sqrt{-2n}}) + C_2]) \quad (2.14)$$

が求めるものである。なお以下では  $n > 0$  ( $\gamma > 0$ ) のとき (2.10), (2.13) より

$$S_2(t) = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} S_+(t) \quad (2.15)$$

$n < 0$  ( $\gamma < 0$ ) のとき (2.10), (2.14) より

$$S_2(t) = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{-2n}{\pi}} S_-(t) \quad (2.16)$$

とおくことにする。積分定数  $C_2$  は,  $n > 0$  ( $\gamma > 0$ ) のときは

$$-\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} S_+(t_1) = -\beta(1 + \frac{\gamma}{\alpha} B(0)) / [1 + C_1 \cdot \exp(-(\alpha + \gamma B(0))t_1)]$$

$n < 0$  ( $\gamma < 0$ ) のときは

$$-\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{-2n}{\pi}} S_-(t_1) = -\beta(1 + \frac{\gamma}{\alpha} B(0)) / [1 + C_1 \cdot \exp(-(\alpha + \gamma B(0))t_1)]$$

を満足するように定義される.

$t_3 < t$  では  $\bar{B}(t) = b$  であるから, これを (1.2) に代入して  $S_2(t)$  を求める. 結果は

$$S_2(t) = \frac{-\beta(1 + (\gamma/\alpha) \cdot b)}{1 + C_3 \cdot \exp(-(\alpha + b\gamma)t)} \quad (2.17)$$

である.  $t_3 < t$  において  $S_2(t)$  は,  $\alpha + b\gamma > 0$  ならば  $t$  の減少関数であり,  $\alpha + b\gamma < 0$  ならば  $t$  の増加関数であることがわかる. なお積分定数  $C_3$  は (2.15), (2.17) より  $n > 0$  ( $\gamma > 0$ ) のときは

$$-\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} S_+(t_3) = \frac{-\beta(1 + (\gamma/\alpha) \cdot b)}{1 + C_3 \cdot \exp(-(\alpha + b\gamma)t_3)} \quad (2.18)$$

$n < 0$  ( $\gamma < 0$ ) のときは (2.16), (2.17) より

$$-\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{-2n}{\pi}} S_-(t_3) = \frac{-\beta(1 + (\gamma/\alpha) \cdot b)}{1 + C_3 \cdot \exp(-(\alpha + b\gamma)t_3)} \quad (2.19)$$

を満足するように定義される.

まず  $n > 0$  ( $\gamma > 0$ ) の仮定のもとで  $S_+(t)$  を考える.

$$\dot{S}_+(t) = f_+(t) / (Erfi(\frac{nt+m}{\sqrt{2n}}) + C_2)^2 \quad (2.20)$$

$$f_+(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp((\frac{nt+m}{\sqrt{2n}})^2) \left[ \frac{nt+m}{\sqrt{2n}} (Erfi(\frac{nt+m}{\sqrt{2n}}) + C_2) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp((\frac{nt+m}{\sqrt{2n}})^2) \right] \quad (2.21)$$

である. ここで例えば,  $C_2 > 0$ ,  $m > 0$  を仮定しよう.

$$f_+(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp((\frac{m}{\sqrt{2n}})^2) \cdot \left[ \left( \frac{m}{\sqrt{2n}} Erfi(\frac{m}{\sqrt{2n}}) + C_2 \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp((\frac{m}{\sqrt{2n}})^2) \right]$$

であるから  $f_+(0) > 0$  が示される. しかも

$$f_+(t) > 0; t > 0$$

であることも簡単に示される. つまりこのとき  $S_+(t)$  は単調に増加する. 従って  $S(t)$  も単調に増加することがわかる.

次に  $n < 0$  ( $\gamma < 0$ ) のもとで,  $S_-(t)$  を考える. このときは  $m > 0$  である.

$$\dot{S}_-(t) = f_-(t) / (Erf(\frac{-nt-m}{\sqrt{-2n}}) + C_2)^2 \quad (2.22)$$

である. ただし  $f_-(t)$  は次のように定義される.

$$f_-(t) = \frac{2n}{\sqrt{-2n}} \exp(-(\frac{-nt-m}{\sqrt{-2n}})^2) \cdot \left[ \left( \frac{-nt-m}{\sqrt{-2n}} \right) \cdot (Erf(\frac{-nt-m}{\sqrt{-2n}}) + C_2) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-(\frac{-nt-m}{\sqrt{-2n}})^2) \right] \quad (2.23)$$

関数  $Erf(x)$  の性質より

$$\begin{aligned} |z| < 0.6200 &\Rightarrow z * Erf(z) - \exp(-(z)^2)/\sqrt{\pi} < 0, \\ |z| > 0.6200 &\Rightarrow z * Erf(z) - \exp(-(z)^2)/\sqrt{\pi} > 0 \end{aligned}$$

が示される.  $n < 0$  のとき  $t$  が十分大きくなれば  $f_-(t) > 0$  であることがわかる. もし  $f_-(t_1) < 0$  ならば, ある  $t^*$  が存在して

$$t < t^* \Rightarrow \dot{S}_-(t) > 0, \quad \dot{S}_-(t^*) = 0, \quad t > t^* \Rightarrow \dot{S}_-(t) < 0$$

とできる. とくに  $t_1 < t^* < t_2$  ならば  $S_-(t^*)$  が  $S_2(t)$  の最大値となる.

以上の吟味をまとめてみよう.  $S_2(t)$  は  $t < t_1$  では単調に増加する. また  $t_1 < t < t_3$  では  $\bar{\gamma} < 0$  であるから  $S_2(t)$  は (2.8) のようになる.  $t_3 < t$  では (2.17) で定義されているように, 減少関数である. これが  $S(t)$  の近似的な解である.

$S(t)$  の厳密な解を, 求めることはできない. 更に  $\dot{S}(t) = 0$  となる  $t$  の存在もわからない. しかし定理 1~定理 3 で  $S(t)$  の動きは, ある程度予想できる.

### 3. モデルのパラメータの決定

#### ビール出荷量のパラメータ (実験定数) の決定

ビールまたは清酒の需要量 (消費量) を正確に表したデータはない. しかしこれらの商品の性質上, 消費量は全メーカーが市場に出荷する量で近似できると考えられる. これらの量は, 酒税の徴収にあたって, 正確に計測されその値が政府刊行物に公表されている. ビールに関するモデルに現れたパラメータのうちのいくつかは, 最小自乗法で近似的に決められる. まずビール出荷量に関する微分方程式 (1.1) を定差方程式

$$\bar{a} + \bar{b} \cdot B_0(t) = \Delta B_0(t)/B_0(t) \quad (3.1)$$

で近似する. このような方法を探らざるを得ないのは, 公表されたデータが, 微分方程式が解ける形では与えられていないからである. ただし, 本来は (1.1) のような微分方程式を (3.1) で近似したために種々の問題が生じる. 極端な場合では May が示したようにカオスさえ生じる. 原田 [1], 山口 [9]; pp. 9-12 を参照. ただし我々の対象としている場合では後述するように, (1.1) を (3.1) で近似できる.

$\bar{a}, \bar{b}$  は正規方程式

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot (N-1) + \bar{b} \sum^* B_0(t) &= \sum^* (\Delta B_0(t)/(B_0(t))), \\ \bar{a} \sum^* B_0(t) + \bar{b} \sum^* (B_0(t))^2 &= \sum^* \Delta B_0(t) \end{aligned}$$

により決定される. ここで  $\sum^*$  は  $N$  をデータの大きさとするとき  $\sum_{t=0}^{N-2}$  のことであり,  $B_0(t)$  はビール出荷量の実現値 (原データ) であるとしておく. 結果は

$$\bar{a} = \hat{a} = 0.11138, \quad \bar{b} = -1.51983 \times 10^{-5}, \quad \hat{b} = 7328.58 \quad (3.2)$$

である. ここで  $\hat{a}, \hat{b}$  は  $a, b$  の推定値である.  $c$  の推定値  $\hat{c}$  は最小自乗法では求めることはできない. ただし曲線のあてはめが正確であるならば, (1.4) より

$$B_0(t) = b/(1 + c \cdot \exp(-at)) \Rightarrow c = \exp(at)(b/B_0(t) - 1)$$



がいえるはずである。もちろん  $B_0(t)$  を右辺が完全に追尾できるはずはないから  $c$  の推定値  $\hat{c}$  を

$$\hat{c} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \exp(\hat{a}t) \cdot \left( \frac{\hat{b}}{B_0(t)} - 1 \right)$$

により計算する。結果は  $\hat{c} = 3.74995$  である。

さらに  $B_1(t)$  を (1.4) より次のように決定する。

$$B_1(t) = B_1(t; a, b, c) = b/(1 + c \cdot \exp(-at)), \quad \hat{B}_1(t) = B_1(t; \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}). \quad (3.3)$$

また  $B_0(t)$  を追尾する関数  $\hat{B}_2(t)$  を次のルールで決定する。

$$B_2(0) = B_0(0), \quad B_2(t+1) = (1+a)B_2(t) + b(B_2(t))^2, \quad \hat{B}_2(t) = \hat{B}_2(t; \hat{a}, \hat{b}). \quad (3.4)$$

$\hat{B}_2(t)$  は初期値を原データ  $B_0(t)$  とするほかは、 $\hat{B}_2(t')$ ;  $t' = 0, 1, \dots, t-1$  により逐次的に定義される。関数  $B_1(t)$  と関数  $B_2(t)$  は別々のものであるが、これらを考えるとき、片方からもう一方を類推するという手法をとるのは以下に示す定理 4~5 を根拠としている。

#### 定理 4

a)  $B_1(t) < B_1(t+1)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} B_1(t) = b = -\bar{a}/\bar{b}$ .

b)  $\frac{d^2}{dt^2} B_1(t) |_{t=t_2} = 0 \Rightarrow B_1(t_2) = -\frac{\bar{a}}{2\bar{b}} = \frac{b}{2}$

$t < t_2 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} B_1(t) > 0, \quad t_2 < t \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} B_1(t) < 0.$

証明 この定理は Logistic 曲線の基本的な性質に関するものであるから、証明は省略する。

定理 5  $0 < a < 1$  とする。このとき、次のことがいえる。

a)  $B_2(t) < B_2(t+1)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} B_2(t) = -\bar{a}/\bar{b} = b$ .

b) ある  $t_0^*$  に対して  $B_2(t_0^*) < b/2 < B_2(t_0^* + 1)$  とする。すると次のことがいえる。

$$t < t_0^* \Rightarrow \Delta^2 B_2(t-1) > 0, \quad t < t_0^* + 1 \Rightarrow \Delta^2 B_2(t-1) < 0.$$

証明 a)  $\bar{a} = a, \bar{b} = -(a/b)$  であるから (3.4) より

$$\begin{aligned} B_2(t+1) &= (1+a)B_2(t) - (a/b) \cdot (B_2(t))^2 \\ \Rightarrow \frac{a}{b(1+a)} B_2(t+1) &= (1+a) \frac{a}{b(1+a)} B_2(t) \left( 1 - \frac{b}{b(1+a)} B_2(t) \right) \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$V(t) = [a/(b(1+a))] \cdot B_2(t)$$

とおくと

$$V(t+1) = (1+a)V(t)(1-V(t))$$

という May の方程式が得られる。この方程式から

$$0 < (1+a)/4 < 1/2 \Rightarrow 0 < a < 1$$

のとき  $V(t)$  つまり  $B_2(t)$  が単調に増加することがわかり、その極限值もわかる。May の方程式については May [3, 4], 山口 [9] 等を参照した。

b) まず次の2つの式が成立する.

$$\begin{aligned} B_2(t+1) &= (\bar{a}+1)B_2(t) + \bar{b}B_2(t)B_2(t), \\ B_2(t+2) &= (\bar{a}+1)B_2(t+1) + \bar{b}B_2(t+1)B_2(t+1). \end{aligned}$$

2番目の式から1番目の式を引くと,

$$\begin{aligned} B_2(t+2) - B_2(t+1) &= (\bar{a}+1)(B_2(t+1) - B_2(t)) + \bar{b}(B_2(t+1)B_2(t+1) \\ &\quad - B_2(t+1)B_2(t) + B_2(t+1)B_2(t) - B_2(t)B_2(t)) \end{aligned}$$

が得られる. 整理して  $\bar{a} = a, \bar{b} = -a/b$  を代入すると

$$\Delta^2 B_2(t) = \Delta B_2(t)(\bar{a} + \bar{b}(B_2(t+1) + B_2(t))) = \frac{a}{b} \Delta B_2(t)(b - (B_2(t+1) + B_2(t)))$$

が導き出せる.  $B_2(t)$  の単調増加性より

$$B_2(t) + B_2(t) \leq B_2(t) + B_2(t+1) \leq B_2(t+1) + B_2(t+1)$$

であるから  $B_2(t_0^*) \leq b/2 \leq B_2(t_0^* + 1)$  となる  $t_0^*$  に対して

$$t < t_0^* \Rightarrow \Delta^2 B_2(t) \geq 0, \quad t > t_0^* \Rightarrow \Delta^2 B_2(t) \leq 0$$

が成立することがわかる. つまり

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (B_1(t) - B_2(t)) = 0$$

である. それと同時に

$$B_1(t^*) = b/2, \quad B_2(t^{**}) \approx b/2$$

となるところがそれぞれの変曲点となっている.

さて  $B_2(t) = B_1(t) + \theta(t)$  であったとしよう. このとき  $B_2(t+1) = B_1(t+1) + \theta(t+1)$  で  $\theta(t+1)$  を定義したときの  $\theta(t+1)$  の大きさについて大体的見当をつけておく.

$$\begin{aligned} B_1(t) &= \frac{b}{1 + c \cdot \exp(-at)} = \frac{b}{1 + c'}, \\ \frac{d}{dt} B_1(t) &= \frac{abc \cdot \exp(-at)}{(1 + c \cdot \exp(-at))^2} = \frac{abc'}{(1 + c')^2}, \\ \frac{d^2}{dt^2} B_1(t) &= \frac{-a^2 bc'}{(1 + c')^3} (1 - c') \end{aligned}$$

である. ただし  $c' = c \cdot \exp(-at)$  としておく. するとある  $h$  ( $0 < h < 1$ ) に対して

$$B_1(t+1) = \frac{b}{1 + c'} + \frac{abc'}{(1 + c')^2} - \frac{a^2 bc'}{2! \cdot (1 + c')^3} (1 - c')h$$

である. 一方

$$\begin{aligned} B_2(t+1) &= (a+1) \left( \frac{b}{1 + c'} + \theta(t) \right) - \frac{a}{b} \left( \frac{b}{1 + c'} + \theta(t) \right)^2 \\ &= \frac{b(a+1)}{(1 + c')} - \frac{ab}{(1 + c')^2} + \left( a+1 - \frac{2a}{(1 + c')} - \frac{a}{b} \theta(t) \right) \theta(t) \end{aligned}$$

また

$$\frac{b}{(1+c')} + \frac{abc'}{(1+c')^2} = \frac{b(a+1)}{(1+c')} - \frac{ab}{(1+c')^2}$$

であるから,

$$\theta(t+1) = B_2(t+1) - B_1(t+1) = \left( (a+1) - \frac{2a}{1+c'} - \frac{a}{b}\theta(t) \right) \theta(t) + ha^2b \frac{c'(1-c')}{2(1+c')^3}$$

である. ここで  $a = 0.0 \sim 0.5$ ,  $b = 7000$ ,  $c = 3.5$  としよう. この条件は我々の分析の対象になっているケースに近い条件である.  $\theta(t) = 50$  のとき  $h = 0 \sim 1.0$  を代入すると

$$\max |\theta(t+1)| \approx \max |\theta(t)|, \quad |\theta(t+1)| \leq |\theta(t)|$$

がいえて

$$\left| \frac{B_2(t+1) - B_1(t+1)}{B_1(t+1)} \right| \approx \left| \frac{B_2(t) - B_1(t)}{B_1(t)} \right|$$

である. たとえば  $B_1(t) = 2000$  とすると, この値は 3% 以下ということになる. つまり  $B_1(t)$  と  $B_2(t)$  は互いに非常に近い値をとる関数であることがわかる.

計算は C++ でプログラミングした. 結果は表 2 に示してある. なお

$$\mathbf{R}[B_0(t), B_1(t)] = 0.97703, \quad \mathbf{R}[B_0(t), B_2(t)] = 0.97667 \quad (3.5)$$

が示される. ここで  $\mathbf{R}[B_0(t), B_1(t)]$  は変量  $B_0(t)$  と変量  $B_1(t)$  との間の相関係数 (つまり決定係数の平方根) である.

#### 清酒出荷量のパラメータの決定

清酒出荷量に現れたパラメータ (実験定数) の推定は, モデル 1 が一種の逐次モデルの形をしているので, 逐次最小自乗法で求める. つまり  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  は正規方程式

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \cdot (N-1) + \bar{\beta} \sum^* S_0(t) + \bar{\gamma} \sum^* \hat{B}_2(t) &= \sum^* \Delta S_0(t) / S_0(t), \\ \bar{\alpha} \sum^* S_0(t) + \bar{\beta} \sum^* (S_0(t))^2 + \bar{\gamma} \sum^* S_0(t) \hat{B}_2(t) &= \sum^* \Delta S_0(t), \\ \bar{\alpha} \sum^* \hat{B}_2(t) + \bar{\beta} \sum^* \hat{B}_2(t) S_0(t) + \bar{\gamma} \sum^* (\hat{B}_2(t))^2 &= \sum^* \hat{B}_2(t) \cdot (\Delta S_0(t) / S_0(t)) \end{aligned}$$

で求まる. ただしここで,  $S_0(t)$  は清酒出荷量の原データである. 結果は

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \hat{\alpha} = 0.235841 \\ \bar{\beta} &= -1.15936 \times 10^{-4} \Rightarrow \hat{\beta} = -2034.23 \\ \bar{\gamma} &= \hat{\gamma} = -1.52042 \times 10^{-5} \end{aligned} \quad (3.6)$$

である. まず求められたパラメータ (3.6) より, 定差方程式によるあてはめ  $\hat{S}_1(t)$  を次のルールで行う.

$$\hat{S}_1(0) = S_0(0), \quad \hat{S}_1(t+1) = (1 + \bar{\alpha})\hat{S}_1(t) + \bar{\beta}(\hat{S}_1(t))^2 + \bar{\gamma}\hat{S}_1(t)\hat{B}_2(t). \quad (3.7)$$

ここで  $S_0(0)$  は清酒出荷量の初期値であり,  $\hat{B}_2(t)$  は前述したようにビールの出荷量を逐次的に算出したものである. 得られた結果は表 3 に示してある.

表 3 に現れた  $\hat{S}_2(t)$  は次の手順で求めたものである.

まず (2.11) と (2.12) を用いて  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  より  $m, n$  を求める.

$$m = 0.22353, \quad n = -2.92109 \times 10^{-3} \quad (3.8)$$

である. また (2.4)~(2.6) より  $t_1 \sim t_3$  が求まる.

$$t_1 = 1.4113, \quad t_2 = 11.9668, \quad t_3 = 29.8231 \quad (3.9)$$

である. 積分定数は (2.10), (2.16), (2.23) より

$$C_1 = 0.67567, \quad C_2 = 1.00003, \quad C_3 = -6.45866$$

となる. 予想したように  $\hat{\gamma}$  と  $n$  はマイナスである. よって,  $S_2(t)$  は (2.10), (2.14), (2.17) より定義されることになる. この手順で計算された  $\hat{S}_2(t)$  が表 3 に示してある. 関数  $Erfi$  は台形公式 (変数のきざみは 0.00001) で計算した.

$t_3 < t$  では  $C_3 < 0$  であるから

$$\frac{d}{dt} \hat{S}_2(t) = \frac{-\hat{\beta} C_3 (\hat{\alpha} + \hat{\gamma} \hat{b})^2 \cdot \exp(-(\hat{\alpha} + \hat{\gamma} \hat{b})t)}{\hat{\alpha} (1 + C_3 \cdot \exp(-(\hat{\alpha} + \hat{\gamma} \hat{b})t))^2} < 0$$

となり,  $\hat{S}_2(t)$  が減少することが示される. また  $t_1$  において (2.23) より

$$f_-(t_1) = -0.00101792 < 0$$

が示されるから,  $\hat{S}_2(t)$  に最大値が存在することがわかる. また

$$\mathbf{R}[S_0(t), \hat{S}_1(t)] = 0.95273, \quad \mathbf{R}[S_0(t), \hat{S}_2(t)] = 0.93751 \quad (3.10)$$

が示される.

#### 4. 修正されたモデルの導入

$B_0(t)$  を  $B_1(t)$  や  $B_2(t)$  であてはめる問題については比較的追尾は成功しているようにみえる. つまりビールの需要は, 他からの影響は受けずに増大しているという予想は, ほぼ検証されたようにみえる. しかし詳しく吟味してみると, いくつかの検討課題がみられる. 実測値を結んで得られる曲線よりも, 実現値を結んで得られる曲線がある時期かなり大きいという問題である. ビールの出荷量は単純な Logistic 曲線で記述されるのではなく, いくつかの Logistic 曲線が合成されたものとして記述されるのではないかと予想される. これはビール市場でなんらかの構造的な変化が生じていることを意味しているかもしれない. ちなみにこの時期はバブル経済の全盛期にあたっている.

$S_0(t)$  を  $S_1(t)$  や  $S_2(t)$  であてはめるのはもっと困難である. それは清酒の出荷量の経年的な変化がビールのそれより複雑であることに起因しているであろう. 清酒の場合では同じ時期で, 当てはめ曲線が, 実測値を結んで得られる曲線より小さくなっている.

モデル 1 を用いてこれまで議論してきたことは, ビールと清酒の需要の変化を, 現象として追尾してきたにすぎない. より説得力のある議論にするためにはビール市場なり清酒市場の経年的な変化を我が国の一般的な経済状況に関連して議論するべきであるという考えが出てくる.

国民の消費活動レベルは、可処分所得の大きさにより決定される。ビール消費量と清酒消費量の経年的な変化を、可処分所得の変化から説明してみよう。

まず可処分所得  $G(t)$  の経年的な変化が、2つの成分  $H_1(t)$  及び  $H_2(t)$  に分割されるとしよう。このように考えるのは、 $G(t)$  の変化が単純な Logistic 曲線では記述できなくて、2つ以上の Logistic 曲線で記述しなくてはならないように見えるからである。可処分所得のこのような変化が結果としてビール消費量  $B(t)$  の変化を説明できるであろう。つまりビールの消費量  $B(t)$  は  $H_1(t)$  により説明される  $X_1(t)$  と  $H_2(t)$  により説明される  $X_2(t)$  の2つの部分からなると考えることにする。

本来は、可処分所得の項は外生変数あるいは先決変数として扱うべきであろう。しかしここでは以下のモデルを逐次モデルとして完結したものにするために、あえて可処分所得の項を内生変数として、モデルの中に組み込んだ。

## モデル 2

### 可処分所得の変化

$$\dot{H}_1(t)/H_1(t) = g_1 + h_1 H_1(t) \quad (4.1)$$

$$\dot{H}_2(t)/H_2(t) = g_2 + h_2 H_2(t) \quad (4.2)$$

$$G(t) = H_1(t) + H_2(t) \quad (4.3)$$

### ビールの出荷量

$$\dot{X}_1(t)/X_1(t) = a_1 + b_1 X_1(t) + c_1 H_1(t) \quad (4.4)$$

$$\dot{X}_2(t)/X_2(t) = a_2 + b_2 X_2(t) + c_2 H_2(t) \quad (4.5)$$

$$B(t) = X_1(t) + X_2(t) \quad (4.6)$$

### 清酒の出荷量

$$\dot{S}(t)/S(t) = \alpha + \beta S(t) + \gamma X_1(t) + \delta X_2(t) + \varepsilon X_1(t)X_2(t) + \lambda G(t) \quad (4.7)$$

$H_1(t)$  及び  $H_2(t)$  はそれぞれ単純な Logistic 曲線である。従ってビール需要に関する  $X_1(t)$  および  $X_2(t)$  はモデル 1 で議論した清酒需要に関する方程式と数式的には同じ形式で記述されている。つまり定理 1～定理 3 で議論したことにより、モデル 2 のビール消費量の変化を予想できる。また  $X_1(t)$  及び  $X_2(t)$  の近似的な解を求めることも可能である。それに反して清酒需要の微分方程式を解析的に解くことはできそうにもない。しかし  $\gamma = \delta = \varepsilon = 0$  のときは、ビール消費量の場合と、数式的には同じ形になっている。このモデルのビールの出荷量に関する方程式は北原 [2] で紹介されているモデルを参考にした。

### $H_1(t)$ , $H_2(t)$ の計測

可処分所得の経年的な変化を観察してみると、1980 年 ( $t = 17$ ) 頃までは Logistic 曲線の成長局面にあたるような成長を維持しているが、1980 年頃一度成長が緩やかになり、1985 年頃からまた成長が開始したように見える。このことが、可処分所得の変化に単純な Logistic 曲線をあてはめると、無視できない誤差が出てくる原因になっている。

まず、 $F_1(t, q)$  を

$$\begin{aligned} F_1(t, q) &= G_0(t) & ; t = 0, 1, 2, \dots, q-1 \\ F_1(t, q) &= G_0(q-1) & ; t = q, q+1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.8)$$

で定義する。  $G_0(t)$  は可処分所得  $G$  の時点  $t$  における実現値（観測値）である。ここで  $H_1(t)$  を  $F_1(t, q)$  で推定する。つまり  $\dot{F}_1/F_1 = g_q + h_q F_1$  として  $g_q$  と  $h_q$  の推定値  $\hat{g}_q$  と  $\hat{h}_q$  とを求める。

$$\hat{g}_{1,q} = \hat{g}_q, \quad \hat{h}_{1,q} = -\hat{g}_q/\hat{h}_q \quad (4.9)$$

とする。さらに  $\hat{f}_{1,q}$  を

$$\hat{f}_{1,q} = \frac{1}{N} \sum_t \left( \frac{\hat{h}_{1,q}}{F_1(t, q)} - 1 \right) \cdot \exp(\hat{g}_{1,q} t) \quad (4.10)$$

とすると  $H_1(t)$  の推定値  $\hat{H}_1(t, q)$  は

$$\hat{H}_1(t, q) = \frac{\hat{h}_{1,q}}{1 + \hat{f}_{1,q} \cdot \exp(-\hat{g}_{1,q} t)} \quad (4.11)$$

で求まる。ここで適用した手法は、モデル 1 でビール消費量に対して用いた手法と同じである。

$H_2(t)$  を推定するために  $F_2(t, q)$  を

$$F_2(t, q) = G_0(t) - \hat{H}_1(t, q) \quad ; t = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.12)$$

で定義する。  $F_2(t, q)$  が  $\dot{F}_2/F_2 = g'_q + h'_q F_2$  を満足するとして、  $g'_q$  と  $h'_q$  との推定値  $\hat{g}_{q'}$  と  $\hat{h}_{q'}$  を求める。そして

$$\hat{g}_{2,q} = \hat{g}_{q'}, \quad \hat{h}_{2,q} = -\hat{g}_{q'}/\hat{h}_{q'} \quad (4.13)$$

とし、  $\hat{f}_{2,q}$  を

$$\hat{f}_{2,q} = \frac{1}{N} \sum_t \left( \frac{\hat{h}_{2,q}}{F_2(t, q)} - 1 \right) \cdot \exp(\hat{g}_{2,q} t) \quad (4.14)$$

とすると  $\hat{H}_2(t)$  の推定値が

$$\hat{H}_2(t, q) = \frac{\hat{g}_{2,q}}{1 + \hat{f}_{2,q} \cdot \exp(-\hat{g}_{2,q} t)} \quad (4.15)$$

で与えられる。さらに  $\hat{g}_{2,q}, \hat{h}_{2,q}, \hat{f}_{2,q}$  を出発点として、後述する手法を用いて精密な解を求める。

$$\hat{H}(t, q) = \hat{H}_1(t, q) + \hat{H}_2(t, q) \quad (4.16)$$

として、以上の手順を  $q = 15, 16, 17, \dots, 23$  に対して行う。

$$\max_{15 \leq q \leq 23} \mathbf{R}[G_0(t), \hat{H}(t, q)]$$

となる  $q$  を求める。計算の結果  $q = 17$  のとき相関係数が最大になることがわかる。  $q = 17$  のとき

$$\hat{g}_i = \hat{g}_{i,q}, \quad \hat{h}_i = \hat{h}_{i,q}, \quad \hat{f}_i = \hat{f}_{i,q} \quad (4.17)$$

とおけば

$$\begin{aligned} \hat{H}_1(t) &= \hat{H}_1(t, 17), \\ \hat{H}_2(t) &= \hat{H}_2(t, 17), \\ \hat{G}_3(t) &= \hat{H}_1(t, 17) + \hat{H}_2(t, 17) = \frac{\hat{h}_1}{1 + \hat{f}_1 \cdot \exp(-\hat{g}_1 t)} + \frac{\hat{h}_2}{1 + \hat{f}_2 \cdot \exp(-\hat{g}_2 t)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

が  $G_0(t)$  の推定値ということになる。計算の結果

$$\begin{aligned}\hat{g}_1 &= 0.21273, & \hat{g}_2 &= 0.15325, & \hat{h}_1 &= 22736.64397, & \hat{h}_2 &= 30651.03999, \\ \hat{f}_1 &= 15.43298, & \hat{f}_2 &= 69.85287\end{aligned}\quad (4.19)$$

が得られる。あてはめの程度を示すために、可処分所得の原データとあてはめ曲線との相関係数を求めると、 $R[G_0(t), \hat{G}_3(t)] = 0.998447$  が示される。あてはめは、この種の問題としては、満足のいくものである。さらに

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{G}_3(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{G}_3(t) = \hat{h}_1 + \hat{h}_2$$

が示される。数値を代入すると

$$\hat{G}_3(\infty) = 53387.68396$$

である。 $\hat{G}_3(t)$  は  $t = 17$  でほぼ飽和水準に達する  $\hat{H}_1(t)$  と、 $t = 17$  以降にその大きさが顕著になる  $\hat{H}_2(t)$  との2つの部分からなる。これを  $t = 17$  頃に起こった構造的な変化とみることも可能であろう。

なお (4.14)~(4.17) で適用した精密計算は、次の手続きによった。まず

$$\varphi(t, q; g_q, h_q, f_q) = \frac{h_q}{1 + f_q \cdot \exp(-g_q t)}$$

とおこう。我々の仮定が正しいとすると

$$F_2(t; q) = \varphi(t, q; g_q, h_q, f_q)$$

がいえるはずである。前述したように、(4.13), (4.14) で求めた  $g_q, h_q, f_q$  を初期値とする。これを

$$g_{q,0} = g_q, \quad h_{q,0} = h_q, \quad f_{q,0} = f_q$$

とする。第  $n$  ステップまで手続きが進んでいたとして、第  $n$  ステップの推定値を  $g_{q,n}, h_{q,n}, f_{q,n}$  とおく。ここで Taylor 展開を考慮して

$$\varphi(t) = \varphi_g \cdot dg + \varphi_h \cdot dh + \varphi_f \cdot df$$

を仮定する。ただし

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= F_2(t, q) - \varphi(g_{q,n}, h_{q,n}, f_{q,n}), \\ \varphi_g &= \frac{\partial}{\partial g} \varphi(t, q; g_{q,n}, h_{q,n}, f_{q,n}) = \frac{h_{q,n} f_{q,n} \cdot t \cdot \exp(-g_{q,n} t)}{(1 + f_{q,n} \cdot \exp(-g_{q,n} t))^2}, \\ \varphi_h &= \frac{\partial}{\partial h} \varphi(t, q; g_{q,n}, h_{q,n}, f_{q,n}) = \frac{1}{1 + f_{q,n} \cdot \exp(-g_{q,n} t)}, \\ \varphi_f &= \frac{\partial}{\partial f} \varphi(t, q; g_{q,n}, h_{q,n}, f_{q,n}) = \frac{-h_{q,n} \cdot \exp(-g_{q,n} t)}{(1 + f_{q,n} \cdot \exp(-g_{q,n} t))^2}\end{aligned}$$

である。 $\varphi(t), \varphi_g, \varphi_h, \varphi_f$  はデータから求められるから最小自乗法が適用されて、 $da, db, dc$  を求めることができる。いま

$$\max[|ga|, |dh|, |dg|] > 0.00001$$

ならば

$$g_{q,n+1} = g_{q,n} + dg, \quad h_{q,n+1} = h_{q,n} + dh, \quad f_{q,n+1} = f_{q,n} + fc$$

として第  $n+1$  ステップに入る. そうでないときは, ここまでで得られた  $g_{q,n}, h_{q,n}, f_{q,n}$  を  $g_q, h_q, f_q$  の精密な推定値として採用する.

### $X_1(t)$ と $X_2(t)$ の計測

可処分所得の経年的な変化は,  $t = 17$  前後に飽和水準に達する成分  $H_1(t)$  と  $t = 17$  前後にその挙動がはっきりする成分  $H_2(t)$  とに分けられた. このとき用いられたのと同じ論法で  $B_0(t)$  を分割すると  $t = 20$  前後で飽和点に達する成分  $X_1(t)$  と  $t = 20$  頃から, その性質が顕著になってくる成分  $X_2(t)$  に分割されることがわかる. 従ってまず,  $J_1(t, q)$  を

$$\begin{aligned} J_1(t) &= B_0(t) & ; t = 0, 1, 2, \dots, 19 \\ J_1(t) &= B_0(20) & ; t = 20, 21, \dots, N \end{aligned} \quad (4.20)$$

で定義する.  $B_0(t)$  はビール出荷量  $B$  の時点  $t$  における実現値 (観測値) である. ここで  $X_1(t)$  を  $J_1(t)$  で推定する. つまり正規方程式

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 \cdot (N-1) + \hat{b}_1 \sum^* J_1(t) + \hat{c}_1 \sum^* \hat{H}_1(t) &= \sum^* \Delta J_1(t) / J_1(t), \\ \hat{a}_1 \sum^* J_1(t, q) + \hat{b}_1 \sum^* (J_1(t))^2 + \hat{c}_1 \sum^* J(t) \hat{H}_1(t) &= \sum^* \Delta J_1(t), \\ \hat{a}_1 \sum^* \hat{H}_1(t) + \hat{b}_1 \sum^* \hat{H}_1(t) J_1(t) + \hat{c}_1 \sum^* (\hat{H}_1(t))^2 &= \sum^* \hat{H}_1(t) \cdot (\Delta J_1(t) / J_1(t)) \end{aligned}$$

により  $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1$  を求め,  $X_1(t)$  の定差方程式によるあてはめ  $\hat{X}_1(t)$  を

$$\hat{H}_1(0) = J_1(0), \quad \hat{H}_1(t+1) = (1 + \hat{a}_1) \hat{X}_1(t) + \hat{b}_1 (\hat{X}_1(t))^2 + \hat{c}_1 J_1(t) \hat{H}_1(t)$$

により定義する. いうまでもなく逐次推定法の考えに従って, パラメータをきめているから, 正規方程式においても, 説明変数としては  $H_1(t)$  ではなくて  $\hat{H}_1(t)$  を用いている.

$X_2(t)$  を推定するために,  $J_2(t)$  を

$$J_2(t) = B_0(t) - \hat{X}_1(t); \quad t = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.21)$$

で定義する. そして正規方程式

$$\begin{aligned} \hat{a}_2 \cdot (N-1) + \hat{b}_2 \sum^* J_2(t) + \hat{c}_2 \sum^* \hat{H}_2(t) &= \sum^* \Delta J_2(t) / J_2(t), \\ \hat{a}_2 \sum^* J_2(t) + \hat{b}_2 \sum^* (J_2(t))^2 + \hat{c}_2 \sum^* J_2(t) \hat{H}_2(t) &= \sum^* \Delta J_2(t), \\ \hat{a}_2 \sum^* \hat{H}_2(t) + \hat{b}_2 \sum^* \hat{H}_2(t) J_2(t) + \hat{c}_2 \sum^* (\hat{H}_2(t))^2 &= \sum^* \hat{H}_2(t) \cdot (\Delta J_2(t) / J_2(t)) \end{aligned}$$

により  $\hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{c}_2$  を求める. そして求められたパラメータ (3.5) より, 定差方程式によるあてはめを

$$\hat{X}_2(0) = J_2(0), \quad \hat{X}_2(t+1) = (1 + \hat{a}_2) \hat{X}_2(t) + \hat{b}_2 (\hat{X}_2(t))^2 + \hat{c}_2 \hat{X}_2(t) \hat{H}_2(t)$$

というルールで行い

$$\hat{B}_3(t) = \hat{X}_1(t) + \hat{X}_2(t)$$



により  $\hat{B}_3(t)$  を定義する.

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= 0.182418, \quad \hat{a}_2 = -0.173878, \quad \hat{b}_1 = -4.28026 \times 10^{-5}, \quad \hat{b}_2 = -1.01865 \times 10^{-3}, \\ \hat{c}_1 &= 1.3080 \times 10^{-6}, \quad \hat{c}_2 = 1.2491 \times 10^{-4}, \quad \mathbf{R}[B_0(t), \hat{B}_3(t)] = 0.991813\end{aligned}\quad (4.22)$$

(4.22) を (3.5) と比較すると, ビール出荷量を説明するのに, モデル 2 のほうが, モデル 1 よりもよいことがわかる.

モデル 1 では, ビールの出荷量の経年的な変化が, Logistic 曲線で記述されるという仮定の下で, 清酒の出荷量の経年的な変化を説明した. そしてその仮定の下で, 清酒の出荷量を記述する成長曲線のパラメータを推定した.

モデル 2 では, 可処分所得が  $H_1(t)$  と  $H_2(t)$  という 2 つの成分に分割されて, それぞれが Logistic 曲線で記述されるとした. その上でビール出荷量  $B(t)$  が,  $X_1(t)$  と  $X_2(t)$  とに分割され,  $X_1(t)$  の成長率が,  $H_1(t)$  に関係し,  $X_2(t)$  の成長率が,  $H_2(t)$  に関係するとした. この 2 つの関係は, モデル 1 におけるビール出荷量と清酒出荷量との関係と, 形式的には同じである. 例えば  $X_1(t)$  を記述する近似的な解が,  $H_1(t)$  を 3 本の折れ線で近似することにより, 決定することができる. この手順は第 2 章で吟味したものである. (4.4) と (4.5) とを (1.2) と比較すると

$$\bar{\alpha} \rightarrow a_i, \quad \bar{\beta} \rightarrow b_i, \quad \bar{\gamma} \rightarrow c_i, \quad B(t) \rightarrow H_i(t), \quad S(t) \rightarrow X_i(t)$$

という置き換えを行うと, 定理 4 が適用できることがわかる. ただし  $c_i > 0$  であるから  $S_-(t)$  でなくて  $S_+(t)$  を用いなくてはならない.

$X_1(t)$  については  $a_1 > 0, b_1 < 0, c_1 > 0$  であるから (2.8), (2.9), (2.14), (2.17), (2.19), (2.23) を考慮すると  $X_1(t)$  が単調に増加しながらある極限值に収束することが示される.

$X_2(t)$  については  $a_2 < 0, b_2 < 0, c_2 > 0$  であるから (2.8), (2.9) より  $X_2(t)$  が最初は緩やかに減少することがわかる.  $t$  が十分大きくなると (2.17), (2.19) より単調に増加しながらある極限值に収束することが示される.

$X_1(t)$  が減少する範囲で  $|X_1(t)| \ll |X_2(t)|$  であることが示されるので, 結果として,  $t > 0$  において  $\dot{B}(t) > 0$  である. さらに

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{X}_i(t) = -(\hat{a}_i + \hat{c}_i \hat{h}_i) / \hat{b}_i; \quad i = 1, 2$$

及び

$$\hat{X}_1(\infty) = 4956.67, \quad \hat{X}_2(\infty) = 3587.75, \quad \hat{B}_3(\infty) = 8544.42$$

が成立することも明らかであろう.

$H_1$  がほぼ飽和状態になるのは,  $t = 17$  前後であり, それから 2~3 年遅れて  $X_1$  が飽和状態になる. これは導入したモデルからも予想されることである.

推定されたパラメータについて  $c_1 > 0, b_1 < 0, |b_1| > c_1$  がいえる.  $H_1$  が飽和状態に近づくと  $\dot{H}_1 \rightarrow 0$  となる.  $H_1$  が飽和状態になる以前に  $X_1$  が飽和状態になることはない.  $X_1$  が飽和状態になるためには  $\dot{X}_1 \rightarrow 0$  とならなくてはならない. しかし  $\dot{H}_1 > 0$  ならば  $\dot{X}_1 > 0$  となるからである.  $a_1 > 0$  であり  $t = 17$  では  $a_1 + c_1 H_1 > |b_1 X_1|$  である. 従って  $a_1 + b_1 X_1 + c_1 H_1 \rightarrow 0$  となるのは  $X_1$  が, もう少し大きくなってからということになる.

**$S(t)$ の計測**

$B(t)$  と  $S(t)$  との競争は、モデル1の場合と比較するとかなり複雑である。そのため  $S(t)$  の計測では  $B(t)$  の計測ほどには、あてはめが成功するとは予想されない。

$S(t)$  に関するパラメータは次の定差方程式に最小自乗法を適用して推定される。

$$\alpha + \beta S(t) + \gamma \hat{X}_1(t) + \delta \hat{X}_2(t) + \varepsilon \hat{X}_1(t) \hat{X}_2(t) + \lambda \hat{G}_3(t) = \Delta S(t)/S(t).$$

計算の結果は

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 0.347225, & \hat{\beta} &= -7.03191 \times 10^{-4}, & \hat{\gamma} &= 3.24701 \times 10^{-4} \\ \hat{\delta} &= 2.80891 \times 10^{-4}, & \hat{\varepsilon} &= -2.1 \times 10^{-8}, & \hat{\lambda} &= -3.4228 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

となる。これらを用いて、 $S_0(t)$  を追尾する曲線  $S_3(t)$  を

$$\begin{aligned} \hat{S}_3(0) &= S_0(0), \\ \hat{S}_3(t+1) &= (1 + \hat{\alpha})\hat{S}_3(t) + \hat{\beta}(\hat{S}_3(t))^2 + \hat{\gamma}\hat{X}_1(t)\hat{S}_3(t) + \hat{\delta}\hat{X}_2(t)\hat{S}_3(t) \\ &\quad + \hat{\varepsilon}\hat{X}_1(t)\hat{X}_2(t)\hat{S}_3(t) + \hat{\lambda}\hat{G}_3(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

により定義する。

$B_3(t)$  の場合とは異なり、 $S_3(t)$  を  $t$  の関数として表現することはできない。(4.23)を用いて、初期値から逐次的に計算される。 $S_0(t)$  と  $S_3(t)$  との間の相関係数  $R[S_0(t), S_3(t)]$  は 0.978593 である。結果は表3に示してある。

$S_3(\infty)$  は (4.22) の不動点として計算される。つまり

$$\hat{S}_3(\infty) = -(\hat{\alpha} + \hat{\gamma}\hat{b}_1 + \hat{\delta}\hat{b}_2 + \hat{\varepsilon}\hat{b}_1\hat{b}_2 + \hat{\lambda}\hat{G}_3(\infty))/\hat{\beta}$$

で求められる。ここで  $\hat{X}_1(\infty) = \hat{b}_1$ ,  $\hat{H}_2(\infty) = \hat{b}_2$  を用いた。計算の結果は

$$\hat{S}_3(\infty) = 1096.85$$

である。

モデル1とモデル2は、モデルの形としては、逐次モデルである。従って、2つのモデルでは、説明変数の値を逐次的に決定することによりビールや清酒の将来の需要量を予想することが可能になる。

モデル2で求めたビールと清酒の消費量の最終値は、モデル1で求められるものとはかなり違っている。いうまでもなくそれは前者において、ビールと清酒の消費量を説明するものとして、可処分所得の水準を導入したためである。ビールの消費量を構成する成分のうち  $X_2(t)$  が可処分所得の変化に刺激を受けているように見えるからである。モデル2では、可処分所得の値を追尾する関数を導入したが、仮に可処分所得の将来の値を、正確に予想することが何かに報告されているならば、それを利用して可処分所得を、外生変数として扱うことが可能である。いずれにしても、モデル2による予測の正確さは、可処分所得の将来値を正確に予想できるかどうかにかかっている。

表 1: 可処分所得

単位 100 億円 (at current price)

| 年    | $t$ | $G_0(t)$ | $\hat{G}_1(t)$ | $\hat{H}_1(t)$ | $\hat{H}_2(t)$ | $\hat{G}_3(t)$ |
|------|-----|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1963 | 0   | 2298.36  | 2055.28        | 1383.60        | 432.60         | 1816.20        |
| 1964 | 1   | 2617.07  | 2421.66        | 1687.25        | 503.07         | 2190.22        |
| 1965 | 2   | 2902.82  | 2848.98        | 2051.14        | 584.79         | 2635.93        |
| 1966 | 3   | 3403.55  | 3345.73        | 2484.24        | 679.49         | 3163.73        |
| 1967 | 4   | 4038.18  | 3920.96        | 2995.55        | 789.13         | 3784.68        |
| 1968 | 5   | 4713.61  | 4584.11        | 3593.43        | 915.91         | 4509.34        |
| 1969 | 6   | 5603.55  | 5344.68        | 4284.74        | 1062.34        | 5347.05        |
| 1970 | 7   | 6548.72  | 6211.87        | 5073.80        | 1231.21        | 6305.01        |
| 1971 | 8   | 7070.85  | 7193.99        | 5961.22        | 1425.62        | 7386.84        |
| 1972 | 9   | 8364.71  | 8297.84        | 6942.84        | 1649.02        | 8591.86        |
| 1973 | 10  | 10263.91 | 9527.95        | 8008.93        | 1905.14        | 9914.07        |
| 1974 | 11  | 11987.13 | 10885.77       | 9143.95        | 2198.03        | 11341.98       |
| 1975 | 12  | 13166.98 | 12368.89       | 10327.03       | 2531.97        | 12859.00       |
| 1976 | 13  | 14958.08 | 13970.39       | 11533.30       | 2911.47        | 14444.77       |
| 1977 | 14  | 16607.61 | 15678.46       | 12735.87       | 3341.08        | 16076.95       |
| 1978 | 15  | 18364.99 | 17476.30       | 13908.16       | 3825.34        | 17733.50       |
| 1979 | 16  | 19552.55 | 19342.52       | 15026.23       | 4368.56        | 19394.80       |
| 1980 | 17  | 21380.14 | 21252.00       | 16079.57       | 4974.63        | 21045.20       |
| 1981 | 18  | 22531.68 | 23177.16       | 17027.21       | 5646.70        | 22673.91       |
| 1982 | 19  | 23572.37 | 25089.49       | 17887.98       | 6386.99        | 24274.97       |
| 1983 | 20  | 24819.99 | 26961.23       | 18650.13       | 7196.40        | 25846.53       |
| 1984 | 21  | 26270.98 | 28766.96       | 19315.38       | 8074.25        | 27389.64       |
| 1985 | 22  | 28071.45 | 30484.86       | 19888.88       | 9018.02        | 28906.89       |
| 1986 | 23  | 29347.74 | 32097.67       | 20377.98       | 10023.12       | 30401.10       |
| 1987 | 24  | 30877.98 | 33593.05       | 20791.29       | 11082.85       | 31874.14       |
| 1988 | 25  | 32924.65 | 34963.60       | 21127.87       | 12188.42       | 33326.29       |
| 1989 | 26  | 35018.10 | 36206.51       | 21426.58       | 13329.16       | 34755.75       |
| 1990 | 27  | 37706.27 | 37322.66       | 21665.80       | 14492.86       | 36158.66       |
| 1991 | 28  | 39639.00 | 38316.91       | 21863.12       | 15666.26       | 37529.38       |
| 1992 | 29  | 40249.55 | 39195.26       | 22025.28       | 16835.68       | 38860.96       |
| 1993 | 30  | 40599.97 | 39966.26       | 22158.13       | 17987.61       | 40145.74       |
| 1994 | 31  | 40807.11 | 40638.60       | 22266.70       | 19109.33       | 41376.03       |
| 1995 | 32  | 41527.61 | 41222.22       | 22355.96       | 20189.49       | 42544.73       |
| 1996 | 33  | 42913.93 | 41726.42       | 22427.33       | 21218.45       | 43645.71       |

データの出所: 経済企画庁編; 国民経済計算年報 1998 年度版, 50 頁～53 頁等より引用した. なお原データは会計年度 (4 月 1 日から翌 3 月 31 日まで) に関するものである.

## 5. まとめ

まず我々は, ビールの消費量が, 時間の経過とともに, いわゆる Logistic 曲線に従って変化していると前提した. そして清酒の需要量が, ビールの需要量の変化に影響を受けていると考えた. この前提のもとで, ビール需要量の変化と清酒需要量の変化を連立微分方程式に表し, 現実のデータからその連立方程式を規定するパラメータを算出することを目指とした. 我々はまずその微分方程式を定差方程式におきかえ, パラメータを決定した. 立てられた連立微分方程式は非線形でありそれを解析的に解くことはできない. 従ってある仮定のも

表 2: ビールの出荷量 (会計年度)

|      |     | 単位 1000 kl |                |                |                |                |                |
|------|-----|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 年    | $t$ | $B_0(t)$   | $\hat{B}_1(t)$ | $\hat{B}_2(t)$ | $\hat{Y}_1(t)$ | $\hat{Y}_2(t)$ | $\hat{B}_3(t)$ |
| 1963 | 0   | 1621.43    | 1575.86        | 1621.43        | 1621.43        | 0.00           | 1621.43        |
| 1964 | 1   | 1889.64    | 1720.24        | 1764.25        | 1807.62        | 82.02          | 1889.64        |
| 1965 | 2   | 1922.63    | 1873.39        | 1915.60        | 2001.49        | 66.06          | 2067.55        |
| 1966 | 3   | 2061.56    | 2035.03        | 2075.30        | 2200.50        | 54.95          | 2255.46        |
| 1967 | 4   | 2407.33    | 2204.75        | 2243.01        | 2401.81        | 46.99          | 2448.79        |
| 1968 | 5   | 2396.38    | 2382.01        | 2418.24        | 2602.44        | 41.20          | 2643.63        |
| 1969 | 6   | 2677.03    | 2566.08        | 2600.38        | 2799.51        | 37.02          | 2836.53        |
| 1970 | 7   | 2909.61    | 2756.10        | 2788.66        | 2990.43        | 34.10          | 3024.53        |
| 1971 | 8   | 3029.93    | 2951.08        | 2982.16        | 3173.01        | 32.23          | 3205.24        |
| 1972 | 9   | 3332.46    | 3149.91        | 3179.85        | 3345.63        | 31.31          | 3376.94        |
| 1973 | 10  | 3581.77    | 3351.36        | 3380.58        | 3507.22        | 31.31          | 3538.53        |
| 1974 | 11  | 3668.61    | 3554.18        | 3583.11        | 3657.25        | 32.32          | 3689.57        |
| 1975 | 12  | 3736.31    | 3757.03        | 3786.16        | 3795.63        | 34.51          | 3830.14        |
| 1976 | 13  | 3626.84    | 3958.62        | 3988.41        | 3922.65        | 38.21          | 3960.86        |
| 1977 | 14  | 4069.55    | 4157.67        | 4188.54        | 4038.77        | 43.98          | 4082.75        |
| 1978 | 15  | 4317.55    | 4352.95        | 4385.29        | 4144.62        | 52.71          | 4197.33        |
| 1979 | 16  | 4480.01    | 4543.35        | 4577.48        | 4240.81        | 65.90          | 4306.72        |
| 1980 | 17  | 4383.36    | 4727.86        | 4763.99        | 4327.98        | 85.98          | 4413.96        |
| 1981 | 18  | 4538.67    | 4905.61        | 4943.88        | 4406.71        | 116.93         | 4523.64        |
| 1982 | 19  | 4674.77    | 5075.87        | 5116.33        | 4477.53        | 165.14         | 4642.67        |
| 1983 | 20  | 4784.49    | 5238.08        | 5280.66        | 4540.96        | 240.39         | 4731.35        |
| 1984 | 21  | 4574.09    | 5391.82        | 5436.37        | 4597.49        | 355.81         | 4953.30        |
| 1985 | 22  | 4724.84    | 5536.81        | 5583.12        | 4647.59        | 523.83         | 5171.42        |
| 1986 | 23  | 4905.84    | 5672.91        | 5720.72        | 4691.77        | 743.28         | 5435.05        |
| 1987 | 24  | 5269.78    | 5800.12        | 5849.10        | 4730.49        | 981.83         | 5712.32        |
| 1988 | 25  | 5637.02    | 5918.54        | 5968.34        | 4764.25        | 1188.32        | 5952.57        |
| 1989 | 26  | 6060.48    | 6028.52        | 6078.62        | 4793.52        | 1352.39        | 6145.91        |
| 1990 | 27  | 6463.03    | 6129.83        | 6180.20        | 4818.78        | 1505.78        | 6324.56        |
| 1991 | 28  | 6741.20    | 6223.29        | 6273.42        | 4840.47        | 1660.16        | 6500.63        |
| 1992 | 29  | 6860.96    | 6309.12        | 6358.83        | 4859.02        | 1812.62        | 6671.63        |
| 1993 | 30  | 6756.48    | 6387.73        | 6436.43        | 4874.80        | 1962.34        | 6837.14        |
| 1994 | 31  | 7056.79    | 6459.53        | 6507.12        | 4888.20        | 2107.49        | 6995.69        |
| 1995 | 32  | 6751.48    | 6524.97        | 6571.22        | 4899.52        | 2247.05        | 7146.57        |
| 1996 | 33  | 6697.08    | 6584.49        | 6629.20        | 4909.06        | 2379.58        | 7288.63        |

$B_0(t)$  の数値は、国税庁編; 国税庁統計年報書: 大蔵財務協会によった。例えば、1989 年度に  
 関しては平成元年度年報書 151 頁から、1992 年度に關しては平成 3 年度年報書 153 頁から、  
 1995 年度に關しては平成 7 年度年報書 155 頁から引用した。

とで近似的な解を求めて、それによりビール需要と清酒需要の時間的な変化を説明しようと  
 考えた。我々の目的はある程度達成されたと思われる。

最初に導入したモデルをより複雑な競争関係を表現する微分方程式に修正して、現実の  
 データの動きを説明することを試みた。得られた微分方程式を、解析的に解くことはでき  
 ないが、微分方程式にあらわれたパラメータを、現実のデータから算出することはできた。  
 このパラメータをもとの微分方程式を変形した定差方程式に代入して、初期条件から逐次的  
 に数値をもとめるという手法で、現実のデータの変化を説明してみた。我々の目標は、この

表 3: 清酒の出荷量 (会計年度)

| 単位 1000 kl |     |          |                |                |                |
|------------|-----|----------|----------------|----------------|----------------|
| 年          | $t$ | $S_0(t)$ | $\hat{S}_1(t)$ | $\hat{S}_2(t)$ | $\hat{S}_3(t)$ |
| 1963       | 0   | 1071.51  | 1071.51        | 1030.70        | 1071.51        |
| 1964       | 1   | 1152.53  | 1164.51        | 1123.51        | 1133.73        |
| 1965       | 2   | 1196.85  | 1250.86        | 1211.62        | 1226.64        |
| 1966       | 3   | 1343.91  | 1328.03        | 1290.29        | 1300.44        |
| 1967       | 4   | 1359.73  | 1394.86        | 1358.23        | 1367.98        |
| 1968       | 5   | 1400.49  | 1450.69        | 1415.07        | 1431.56        |
| 1969       | 6   | 1493.69  | 1495.49        | 1461.02        | 1489.68        |
| 1970       | 7   | 1532.06  | 1529.77        | 1496.72        | 1540.25        |
| 1971       | 8   | 1551.41  | 1554.38        | 1523.08        | 1581.53        |
| 1972       | 9   | 1613.95  | 1570.38        | 1541.18        | 1612.37        |
| 1973       | 10  | 1655.90  | 1578.91        | 1552.08        | 1632.22        |
| 1974       | 11  | 1651.90  | 1581.10        | 1556.85        | 1641.13        |
| 1975       | 12  | 1674.77  | 1578.02        | 1556.43        | 1639.72        |
| 1976       | 13  | 1619.91  | 1570.65        | 1551.70        | 1629.05        |
| 1977       | 14  | 1592.50  | 1559.82        | 1543.38        | 1610.50        |
| 1978       | 15  | 1534.10  | 1546.28        | 1532.12        | 1585.61        |
| 1979       | 16  | 1580.72  | 1530.65        | 1518.53        | 1556.01        |
| 1980       | 17  | 1504.04  | 1513.49        | 1502.90        | 1523.28        |
| 1981       | 18  | 1524.37  | 1495.24        | 1485.68        | 1489.05        |
| 1982       | 19  | 1491.25  | 1476.28        | 1467.17        | 1455.04        |
| 1983       | 20  | 1445.16  | 1456.94        | 1447.61        | 1423.33        |
| 1984       | 21  | 1324.18  | 1437.47        | 1427.22        | 1396.57        |
| 1985       | 22  | 1334.86  | 1418.11        | 1406.15        | 1378.11        |
| 1986       | 23  | 1379.58  | 1399.03        | 1384.55        | 1371.04        |
| 1987       | 24  | 1389.79  | 1380.37        | 1362.52        | 1375.19        |
| 1988       | 25  | 1408.62  | 1362.25        | 1340.15        | 1382.71        |
| 1989       | 26  | 1344.97  | 1344.77        | 1317.52        | 1380.66        |
| 1990       | 27  | 1372.79  | 1327.97        | 1294.68        | 1366.48        |
| 1991       | 28  | 1371.71  | 1311.93        | 1271.70        | 1348.81        |
| 1992       | 29  | 1368.83  | 1296.65        | 1248.94        | 1331.19        |
| 1993       | 30  | 1362.12  | 1282.17        | 1229.04        | 1313.52        |
| 1994       | 31  | 1256.85  | 1268.49        | 1212.05        | 1296.13        |
| 1995       | 32  | 1288.80  | 1255.61        | 1197.47        | 1279.10        |
| 1996       | 33  | 1213.10  | 1243.50        | 1184.92        | 1262.68        |

$S_0(t)$  の数値は,  $B_0(t)$  の数値と同じものによった.

例えば, 1990 年度に関しては平成 2 年度年報書 151 頁から,

1993 年度に関しては平成 3 年度年報書 155 頁から,

1996 年度に関しては平成 8 年度年報書 159 頁から引用した.

種の問題の解決法としては, 満足のできる程度に達成された.

#### 参考文献

- [1] 原田康平: 経済とカオス. オペレーションズ・リサーチ, **39-10** (1994) 534-540.
- [2] 北原和夫: 複雑性について—その 1. オペレーションズ・リサーチ, **40-4** (1995) 218-224.

- [3] R. M. May and W. Leonard: Nonlinear aspect of competition between tree species. *SIAM J., Appl. Math.*, **28** (1975) 243–252.
- [4] R. M. May: Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, **361** (1976) 459–467.
- [5] 宮川公男: 意志決定の経済学 (丸善株式会社, 1968).
- [6] 森田善久: 生物モデルのカオス—カオス全書 3, 第 1 章 (朝倉書店, 1996).
- [7] 日本数学会編集: 岩波数学辞典第 3 版 (岩波書店, 1985).
- [8] 上田徹: 予測手法 (2) 生態学モデル. オペレーションズ・リサーチ, **39**-7 (1994) 357–362.
- [9] 山口昌哉: カオス入門—カオス全書 1, 第 3 章 (朝倉書店, 1996).

松山敬左

電気通信大学

〒182-8585 調布市調布が丘 1-5-1

E-mail: kmatsu@se.uec.ac.jp

## ABSTRACT

**THE CHANGES IN DEMAND FOR BEER AND SAKE  
—THE DEMAND GROWTH MODELS OF COMPETITION**

Keisuke Matsuyama

*The University of Electro-Communications*

Two models are introduced which describe the secular changes of demand in beer and sake. These models, which are given by a set of differential equations, try to describe the demand shift from sake to beer. The competition to be studied in this paper is restricted to this demand shift.

The first model is simple. It assumes that the secular trend of beer-demand is expressed by the Logistic Curve. And a certain rate of sake-demand is absorbed into the beer-demand, as the time elapses. The second model, which is rather sophisticated, is obtained by examining the first model. It assumes that the changes in disposable income are explained by the changes of two components, each of which is described by the Logistic Curve. A change of beer-demand is explained by the secular changes of these components.

As each equation, which appears in these models, is determined with the given parameters, the method of curve fitting is applied to the time-series data of beer and sake demand. We are to estimate a set of parameters (empirical constants) so that the empirical formulae which explain the actual secular trend of sake and beer demands, may be determined.

The results obtained by these models can explain the actual secular trend of beer and sake demand. Moreover by examining the analytical properties of the empirical formulae obtained, the actual change of demands for beer and sake can be described.