Journal of the Operations Research
Society of Japan
Vol. 42, No. 3, September 1999

投票者の許容範囲とシンプルゲームのコアの関係について

山嵜 輝　　猪原健弘　　中野文平
東京工業大学

(受理 1998 年 2 月 24 日；再受理 1999 年 3 月 15 日)

和文概要　党派が形成されるような社会集団での投票による意思決定状況は，従来，協力ゲームの特別な形であるシンプルゲームで記述され，社会選択へのゲーム理論的アプローチとして様々な研究がされてきた．本論文では，今まで考慮されてこなかった「意思決定主体の意見の柔軟性」を扱うために「投票者の許容範囲」という概念をシンプルゲームの枠組に導入し，また,「意見調整ゲーム」や「敗因分析ゲーム」という，投票状況の新たなモデルを用いることで,「意思決定主体の意見の柔軟性」が意思決定に与える影響を調べる．分析の結果，1) 従来のシンプルゲームを用いたモデルは，本論文で提案する「意見調整ゲーム」の特別な形であること，2) 直接の投票では決定が得られない場面でも，調整可能な意見が存在しうること，3) 複数の党派の意見の相違は十分な情報交換を行うことで解消できること，そして特に，4) シンプルゲームの解概念として提案されているコアと決定案の間には「シンプルゲームのコアは各意思決定主体が後悔のない許容範囲を取ったときの安定した代替案の集合である」という関係が成立すること，が明らかになる．

1. はじめに

本論文では，コアリション（提携）が形成されるような社会集団での，投票による意思決定状況を分析対象としてとりあげる．そのような社会では複数の意思決定主体が結託することで，意思決定を支配できる集団を形成していく．本論文では意思決定状況として,「問題認識」,「情報交換」,「投票」という 3 つの場面からなるものを想定し，各々の状況で以下のような意思決定主体の行動を考える．各意思決定主体は「問題認識」の場面で与えられた問題に対して自分の意見を確立する.「情報交換」の場面では複数の意思決定主体がコアリションを形成し，その中で意見の交換による話し合いをおこなう．そして「投票」の場面では，意思決定を支配できるコアリションが組織票を投じる．直接の投票によって投票結果を得られれば，コアリションを形成する必要はあまりない．問題となるのは，十分な情報交換が行われれば決定に至ることができるものの，直接の投票では採決の結果が得られないときであり，本論文ではこのような状況に焦点を当てる．つまり，情報交換において意思決定主体の意見に妥協が必要とされる状況である．本論文では，意見の柔軟性や妥協を扱うために「投票者の許容範囲」という概念を考え，意思決定主体の行動が意思決定に与える影響についての分析をおこなう．

投票の場面を記述する既存のモデルとしてはシンプルゲーム [1] がある．シンプルゲームは投票ゲームとも呼ばれ，特性関数型の協力ゲームの特別なモデルである．しかし従来のシンプルゲームでは意思決定主体の意見の柔軟性や妥協を扱うことはできず，また意思決定主体が互いに協力することが前提になっているので，コアリション内での票の調整はいつでも可能であると仮定されていると考えることができる．しかし，現実の投票の場面において票

の調整が可能かどうかは，コアリションに属する意思決定主体の意見やその柔軟性に大きく依存する．そこで本論文では,「意思決定主体の意見の柔軟性」を考慮しながら投票の場面を分析するために,「投票者の許容範囲」という概念をシンプルゲームの枠組みに導入する．この概念を用い,「意見調整ゲーム」という投票状況の新しいモデル提案し，意思決定主体の意見の柔軟性を考慮にいれた投票の場面の分析のための枠組を構築することが本論文の目的の一つである．

さらに本論文では，シンプルゲームによる従来の枠組と「意見調整ゲーム」による枠組の関係について調べていく．まずはじめに，多数決ルール，コンドルセルール，ボルダルール [1,2,7] などに代表される対称的なシンプルゲームに注目する.「意見調整ゲーム」のうち，特に，対称的なシンプルゲームから作られるものを扱い，その「意見調整ゲーム」がもとのシンプルゲームと同じになるための必要十分条件を与える命題を示す．その条件は「どのウィニングコアリションにも調整可能な意見が存在する」ということなので，この命題により，従来のシンプルゲームの枠組が本論文で提案する「意見調整ゲーム」の枠組の特別な形であるということが明らかになる．この命題を与えることが本論文のもう一つの目的である．

次に注目するのはコアの概念 [1,2,4] である．コアは，シンプルゲームの枠組でゲームの解概念として提案されているが，社会全体の決定をコアから選択するには問題も多く，票が割れてしまった投票状況を完全に解決するものではない．また現実の意思決定状況では採決の結果とコアは無関係にみえる．本論文では，コアの概念と投票の場面の関係を「意見調整ゲーム」の視点から明らかにするために,「安定な代替案」や「敗因分析ゲーム」という新しい概念を用いる．分析の結果まず示される命題は「直接の投票では採決の結果が得られないよう投票の場面でも，調整可能な意見が存在しうる」というものである．また「複数の党派の意見の相違は十分な情報交換を行えば解消できる」ということを示す命題も示される．これらの命題はそれぞれ,「安定な代替案」の存在性と一意性に関するものである．そしてさらに,「コアは各意思決定主体が後悔しない許容範囲をとったときの安定した代替案の集合である」という，コアの概念の新たな解釈を与える命題が得られる．この命題は，コア,「意見調整ゲーム」,「安定な代替案」，そして「敗因分析ゲーム」などの概念の間の関係を明らかにするものである．これらの命題を与えるのが本論文の主たる目的である．

2節以降の構成は以下の通りである．まず2節では，既存のシンプルゲームの枠組とコアの概念について紹介する．3節では,「投票者の許容範囲」の概念について述べ，これをシンプルゲームの枠組みに導入することで「意見調整ゲーム」を提案し，その基本的な性質について調べる．4節では,「意見調整ゲーム」での決定案について議論する．そのために「安定な代替案」や「敗因分析ゲーム」という概念を提案し，それによって意思決定を分析することでシンプルゲームのコアに対して新たな解釈を与える．5節では本論文をまとめた上で，本論文の内容に関連する課題について述べる．

2. シンプルゲーム

本論文での集団意思決定状況の表現は，シンプルゲームの理論 [1] をもとにした数理的なものである．本節では，既存のシンプルゲームの基本的な枠組みとコアの概念を紹介する [1,2,4].

2.1. シンプルゲームの基本的枠組み

投票者の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，可能な代替案の集合を $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ とする．投票者の集団は代替案の集合の中から，ある投票ルールによって一つを選び出そうと

している．その意思決定状況は「投票者の集合」と「投票ルール」の組みからなるシンプルゲームで表現できる．

定義 1 （シンプルゲーム）シンプルゲームとは 2 つ組 $G=(N,W)$ である．ただし，W は，

$$[S \in W \wedge T \supset S] \Rightarrow T \in W$$

を満たすコアリション（ N の非空部分集合）の集合とする．

コアリションとは投票者の提携を表現するものである．W に所属しているコアリションを特にウィニング コアリションとよぶ．ウィニング コアリションは，そこに属する投票者間で意見の調整が成功すれば，投票結果を完全に決定できるだけの力を持つようなコアリションである．従って，一つの投票ルールはウィニング コアリションの集合 W で表される．例えば，多数決ルールであれば，過半数を有している集団はすべてウィニング コアリションである．

定義 2 （真のシンプルゲーム） シンプルゲーム $G=(N,W)$ に対して

$$S \in W \Rightarrow N \setminus S \notin W$$

が成り立つとき，G は真であるという．

真のシンプルゲームにおいては，投票結果を完全に決定できるような二つのコアリションが存在する場合には，必ずその両方に属する投票者が存在する．

定義 3 （対称的なシンプルゲーム）シンプルゲーム $G=(N,W)$ に対して

$$[S \in W \wedge |T|=|S|] \Rightarrow T \in W$$

が成り立つとき，G は対称的であるという．

対称的なシンプルゲームは匿名による投票ルールを表す．例えば，どの投票者も同じ重みの一票を持っている場合がそうである．対称的なシンプルゲームでは，$q=\min\{|S| \mid S \in W\}$ とすると $S \in W \Leftrightarrow |S| \geq q$ となる [1]．代表的な投票ルールとしては多数決ルール，コンドルセルール，ボルダルール [1,2,7] などがあり，これらの投票ルールによる意思決定状況は真かつ対称的なシンプルゲームで表現できる．

例 1 （多数決）3 人の投票者による多数決では，2 人以上のコアリションがウィニング コアリションである．つまり投票者の集合を $N=\{1,2,3\}$ とすると，ウィニング コアリションの集合は $W=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},N\}$ となる．この場合のシンプルゲーム $G=(N,W)$ は真かつ対称的である．

2.2. 投票者の意見とシンプルゲームのコア

投票の場面を構成する要素のうち，投票者の集合と採決の方法は，一つのシンプルゲームを与えることで特定できる．投票の場面では，各投票者は，可能な代替案に対する自分の意見に応じて行動する．この投票者の意見を表現するために，ここでは可能な代替案に対する線形な順序を用いる．可能な代替案の集合を $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ とする．

定義 4 （線形順序）r を A 上の二項関係とする．以下の 3 つの条件を満たすとき，r は A 上の線形順序であるという．

（1） $\forall a,b \in A, arb \vee bra$

（2） $\forall a,b,c \in A, arb \wedge brc \Rightarrow arc$

（3） $\forall a,b \in A, arb \wedge bra \Rightarrow a=b$

$L(A)$ を A 上の線形順序全体の集合とする．$r \in L(A)$ とすると $r = (a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots, a_{l_m})$ と書くことができ，各 $r \in L(A)$ は各投票者が持つことが可能な意見を表現している．また，投票者 i の理想とする意見を $R_i \in L(A)$ と書くことにし，$(R_i)_{i \in N}$ を R と書く．

一つのシンプルゲーム $G = (N, W)$ に，可能な代替案の集合 A，そして投票者の意見 $R = (R_i)_{i \in N}$ を付加したものをコミッティー (committee) と呼ぶことがある [1]．ここでも，4 つ組 (N, W, A, R) (ただし (N, W) はシンプルゲーム) をコミッティーと呼び，C で表す．

定義 5 （コミッティー）コミッティーとは，4 つ組 $C = (N, W, A, R)$ である．ただし (N, W) はシンプルゲームをなし，$R = (R_i)_{i \in N}$ であるとする．

コミッティーにおいてどの代替案が選ばれるか，あるいはどの代替案が選ばれるべきかということについては様々な研究がある [1, 2, 7]．次の，代替案の間の支配関係は，選ばれるべき代替案を考える上で基本的な概念である．

定義 6 （支配関係）コミッティー $C = (N, W, A, R)$ が与えられているとき，C における支配関係 $Dom(C)$ を次で定義する．

$$\forall a, b \in A, aDom(C)b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists S \in W, \forall i \in S, [bR_i a \text{ ではない}]$$

$aDom(C)b$ であるとき，代替案 a は代替案 b を支配するという．支配関係は投票者の集団全体の代替案に対する選好関係と解釈できる [5]．

定義 7 （コア）コミッティー $C = (N, W, A, R)$ のコア $Core(C)$ は他のどの代替案にも支配されない代替案の集合である．

シンプルゲームのコアは選出されるべき代替案の集合として提案され，研究されている [1,2,4]．意思決定状況によってはシンプルゲームのコアは空であったり，複数の代替案を含んでいたりする．また，直接の投票によって採決の結果が得られるとき，コアの要素は投票結果と一致する．直接の投票によって採決の結果が得られないとき，つまり票が割れてしまったとき，コアの役割が重要になる．

例 2 （コアが存在する状況）3 人の投票者が 3 つの代替案の中から，多数決により 1 つを選び出そうとしている． 投票者の集合を $N = \{1, 2, 3\}$ ，代替案の集合を $A = \{a, b, c\}$ とし，各投票者の理想とする意見は $R_1 = (a, b, c)$ ，$R_2 = (b, c, a)$ ，$R_3 = (c, b, a)$ であるとする．

このシンプルゲームのコアは $Core(C) = \{b\}$ である．この場合は，直接 の投票では採決の結果が得られないものの，コアは唯一代替案 b をもつ．

上の例では代替案 b を全体の決定とするべきであるが，実際の意思決定においては他の代替案が選出されるかもしれない．また，コアが複数の要素を含むときは決定案を完全に絞り込むことができず，コアが空のときでも現実の状況では何らかの意思決定が下される．より現実的なゲーム理論的分析をおこなうには，どのウィニング コアリションでどのような票の調整がおこなわれ，いかなる採決の結果を得るかを考える必要がある．次節では，このような分析を行なうための枠組を構築していく．

3. 意見調整ゲーム

本節では，従来のシンプルゲームおよびコミッティーの枠組に「投票者の許容範囲」の概念を導入し,「意見調整ゲーム」という集団意思決定状況の新しいモデルを定義する．さらに,「意見調整ゲーム」を用いた意思決定状況の分析のための枠組を構築し，その基本的な性質について述べる．

3.1. 投票者の許容範囲

現実の意思決定状況において，問題の重要性の違いや選好のあいまいさなどにより，各投票者の意思決定に対する認識は様々である．自分自身の「理想とする意見」に固執する投票者もいれば,「理想とする意見」以外にもいくつかの「許容できる意見」をもつ投票者もいる．また，各投票者の意見に著しい相違がある場合でも必ず決定に至らなければならない状況では，各投票者の意見は，程度に差はあれ柔軟性を見せるだろう．ここでは，このような意見の柔軟性を「投票者の許容範囲」で表現する.「投票者の許容範囲」は，投票者の「理想とする意見」を含む「許容できる意見」からなるものとする．

定義 8 （投票者の許容範囲）投票者 i の許容範囲とは投票者 i の理想とする意見 R_i を含む $L(A)$ の部分集合 P_i である．また $(P_i)_{i \in N}$ を P と書くことにする．

各投票者の許容範囲は「問題認識」の場面で決まるものとし，投票結果がでるまで変化しないものとする．

例 3 （問題認識）5 人の投票者に 3 つの代替案が与えられたとする．投票者の集合を $N = \{1, 2, \ldots, 5\}$ とし，代替案の集合を $A = \{a, b, c\}$ とする．

各投票者は次のように考えている．投票者 1 の理想とする意見は $R_1 = (a, b, c)$ であるが，この意思決定にはあまり関心がなく，許容範囲は $P_1 = L(A)$ である．投票者 2 の理想とする意見は $R_2 = (a, c, b)$ であり，この理想の意見に固執する．したがって，許容範囲は $P_2 = \{(a, c, b)\}$ である．投票者 3 の理想とする意見は $R_3 = (b, a, c)$ であるが，自己矛盾しており，理想とは逆の意見も許容する．したがって，許容範囲は $P_3 = \{(b, a, c), (c, a, b)\}$ である．投票者 4 の理想とする意見は $R_4 = (b, c, a)$ であるが，代替案 b と代替案 c に対する選好には迷いがあり，許容範囲は $P_4 = \{(b, c, a), (c, b, a)\}$ である．投票者 5 の理想とする意見 は $R_5 = (c, a, b)$ であるが，代替案 c と代替案 a ではどちらが選出 されてもかまわないと思っている．したがって，許容範囲は $P_5 = \{(c, a, b), (a, c, b)\}$ である．

以上のような投票者の許容範囲 $(P_i)_{i \in N}$ が「問題認識」の場面で決まるものとする．

「情報交換」の場面では様々なコアリションが組まれ，その中で互いの投票者が許容範囲 P_i から意見 $r \in P_i$ を出し合うことで話し合いがおこなわれる．話し合いは駆け引きの要素もあり，各投票者は自身の持っているすべての意見を出してしまうわけではない．

例 4 （情報交換）投票者の集団 N に対して代替案の集合 $A = \{a, b, c\}$ が与えられたとし，$i, j, k \in N$ とする．投票者 i の理想とする意見は $R_i = (a, b, c)$ ，許容範囲は $P_i = \{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c)\}$ であるとす る．投票者 j の理想とする意見は $R_j = (b, a, c)$ ，許容範囲は $P_j = \{(b, a, c), (a, b, c)\}$ であるとする．投票者 k の許容範囲 は $P_k = L(A)$ であるとする．コアリション $\{i, j, k\}$ での 2 通りの 話し合いを考えてみる．

[話し合い 1] まず，投票者 i が意見 (a, c, b) を発言し，その意見に同調した投票者 k が同様の意見 (a, c, b) を発言した．代替案 b を推すのは難しいと考えた投票者 j は意見 (a, b, c) を発言し，コアリション $\{i, j, k\}$ としては代替案 a を推すことになった．

[話し合い 2] まず，投票者 j が意見 (b, a, c) を発言し，その意見に同調した投票者 i と投票者 k が同様の意見 (b, a, c) を発言した．結局，コアリション $\{i, j, k\}$ としては代替案 b を推すことになった．

「情報交換」の場面での投票者の行動が意思決定に大きな影響を与える．これは現実の意思決定状況においてしばしば見られる現象である．

3.2. 意見調整ゲームの枠組みと性質

ここで想定している意思決定状況は「投票者の集合」,「投票ルール」,「代替案の集合」,「理想とする意見」,「投票者の許容範囲」の5つ組 (N,W,A,R,P) で表現できる．本論文では,「投票者の許容範囲」が意思決定に与える影響に注目するため，この5つ組を，コミッティー $C=(N,W,A,R)$ と投票者の許容範囲 P を用いて，$C(P)$ で表すことにする．つまり，$C(P)=(N,W,A,R,P)$ である．また，考慮しているコミッティー $C=(N,W,A,R)$ が明らかな場合，(N,W) を G で表す．

前小節の例のように，各投票者は自分の許容範囲に従って意見を交換して，互いの接点を見出しながら，ある代替案を社会全体の決定にできるような集団を形成しようとする.「意見調整ゲーム」は従来のシンプルゲームおよびコミッティーの概念に各投票者の許容範囲を導入したモデルで「投票」直前の状況を記述したものである．

$\max r$ で，$r\in L(A)$ におけるトップの代替案を表すものとする．この記号を用いると，コアリション $S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}$ の中で，代替案 $a\in A$ の決定に納得できる投票者の集合を

$$S(a)\overset{\text{def}}{=}\{i\in S\mid \exists r\in P_i, \max r=a\}$$

と表すことができる．これを用いて「意見調整ゲーム」を以下のように定義する．

定義 9 （意見調整ゲーム）コミッティー $C=(N,W,A,R)$ と投票者の許容範囲 P の組，つまり $C(P)$ が一つ与えられたとする．$C(P)$ における「意見調整ゲーム」とは2つ組 $G_{C(P)}=(N,W_{C(P)})$ である．ただし，

$$W_{C(P)}\overset{\text{def}}{=}\{S\in 2^N\setminus\{\emptyset\}\mid \exists a\in A, S(a)\in W\}$$

とする．

「意見調整ゲーム」$G_{C(P)}$ では，実際に意見調整可能なウィニング コアリションが $W_{C(P)}$ の要素となっている．以降，W に所属するコアリションをシンプルゲーム G のウィニング コアリション，$W_{C(P)}$ に所属するコアリションを「意見調整ゲーム」$G_{C(P)}$ のウィニング コアリションとよぶことにする．

以下の命題で,「意見調整ゲーム」はシンプルゲームになることがわかる．

命題 1 「意見調整ゲーム」$G_{C(P)}=(N,W_{C(P)})$ は，$W_{C(P)}$ が空集合でないときにはシンプルゲームになる．すなわち，$W_{C(P)}$に対して

$$[S\in W_{C(P)}\wedge T\supset S]\Rightarrow T\in W_{C(P)}$$

が成り立つ．

証明： $C(P)=(N,W,A,R,P)$ に関する「意見調整ゲーム」$G_{C(P)}=(N,W_{C(P)})$ に対して，$S\in W_{C(P)}$ かつ $T\supset S$ とする．$S\in W_{C(P)}$ より，ある代替案 $a\in A$ が存在して $S(a)\in W$ となる．$T\supset S$ かつ $S\supseteq S(a)$ より，$T\supset S(a)$ である．よって $T\in W_{C(P)}$ となる． ∎

シンプルゲーム G のウィニング コアリションは投票ルールのみに依存していたが,「意見調整ゲーム」$G_{C(P)}$ のウィニング コアリションは各投票者の許容範囲にも依存している．つまり,「意見調整ゲーム」は投票者の許容範囲を導入することでコアリション内での協力が可能かどうかを明確にしたシンプルゲームであるといえる．シンプルゲームでは投票者の協力が仮定されていた．これは $W_{C(P)}\subseteq W$ となることからもわかる．

次の命題は，シンプルゲームが真であることと,「意見調整ゲーム」が真であることの間の関係について述べたものである．

命題 2 $C(P)=(N,W,A,R,P)$ に対して，シンプルゲーム G が真であるならば,「意見調整ゲーム」 $G_{C(P)}$ も真である．

証明: シンプルゲーム $G=(N,W)$ が真であるとし,「意見調整ゲーム」を $G_{C(P)}=(N,W_{C(P)})$ とする．$S\in W_{C(P)}$ とすると $W_{C(P)}\subseteq W$ なので $S\in W$ である．G が真であることより $N\setminus S\notin W$となる．$W_{C(P)}\subseteq W$ なので $N\setminus S\notin W_{C(P)}$ である．よって,「意見調整ゲーム」 $G_{C(P)}$ は真である． ∎

代替案のうち，それが選ばれることに投票者 i が納得できるものの集合は，

$$\max P_i \stackrel{\text{def}}{=} \{\max r\in A \mid r\in P_i\}$$

と表せ，また，代替案のうち，ウィニング コアリションを構成するだけの投票者を納得させられるものの集合，つまり，選出される可能性のある代替案の集合は，

$$A_{C(P)} \stackrel{\text{def}}{=} \{a\in A \mid N(a)\in W\}$$

と書くことができる．

例 5 例3の状況で，投票者の集団は代替案の集合の中から多数決によって1つを選び出そうとしている．各投票者が納得できる代替案の集合は $\max P_1=\{a,b,c\}$，$\max P_2=\{a\}$，$\max P_3=\{b,c\}$，$\max P_4=\{b,c\}$，$\max P_5=\{c,a\}$ となる．

シンプルゲーム G のウィニング コアリションは3人以上のコアリションである．

「意見調整ゲーム」 $G_{C(P)}$ において，コアリション $\{1,2,5\}$ は3人とも代替案 a で納得できるので，代替案 a に組織票を投じることで勝つことができる．しかしコアリション $\{1,2,3\}$ では全員の承諾を得られる代替案が存在せず，票の調整がつかないのでウィニング コアリションではない．この「意見調整ゲーム」 $G_{C(P)}$ のウィニング コアリションは $\{1,2,5\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,3,5\}$，$\{1,4,5\}$，$\{3,4,5\}$ とこれらを含むコアリションである．また，ウィニング コアリションの組み方とその中で の話し合いにより，どの代替案も決定案となりうる．よって $A_{C(P)}=\{a,b,c\}$ である．

例 6 例2と同じ意思決定状況を考える．各投票者が納得できる代替案の集合は $\max P_1=\{a\}$，$\max P_2=\{b,c\}$，$\max P_3=\{c,b\}$ であるとする．

「意見調整ゲーム」$G_{C(P)}$ のウィニング コアリションは $\{2,3\}$ と N であり，$A_{C(P)}=\{b,c\}$ である．つまりコアの要素ではない代替案 c も，ウィニング コアリション内の話し合いによっては選出される可能性がある．

以下の定理は，シンプルゲームの対称性と,「意見調整ゲーム」の対称性の間の関係について述べたものであり，従来のシンプルゲームの枠組と，本論文での「意見調整ゲーム」の枠組の関係を明らかにするものである．

定理 1 $C(P)$ において，シンプルゲーム $G=(N,W)$ が対称的であるとする．$W_{C(P)}\neq\emptyset$ とすると，$G_{C(P)}=(N,W_{C(P)})$ が対称的であるための必要十分条件は

$$(\forall S\in 2^N\setminus\{\emptyset\})(|S|=q\Rightarrow \exists a\in A, S(a)=S)$$

である．ただし， $q=\min\{|S| \mid S\in W\}$ とする．

証明：「意見調整ゲーム」$G_{C(P)}$ が対称的であるとする．定理の仮定より $W_{C(P)} \neq \emptyset$ であり，$S \in W_{C(P)}$ とすると，ある代替案 $a \in A$ が存在して $S(a) \in W$ となる．定理の仮定より $|S(a)| \geq q$ となる．S' を $|S'| = q$ となる $S(a)$ の部分集合とすると，G は対称的なので $S' = S'(a) \in W$ となり，したがって $S' \in W_{C(P)}$ である．$G_{C(P)}$ が対称的であることより，任意のコアリション $T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ に対して，$|T| = |S'| = q$ とすると $T \in W_{C(P)}$ となる．よって，ある代替案 $b \in A$ が存在して $T(b) \in W$ となる．$|T(b)| \geq q$ であり，G が対称的でありかつ $T(b) \subseteq T$ なので $T(b) = T$ となる．

逆に，任意のコアリション $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ に対して，$|S| = q$ ならば，ある代替案 $a \in A$ が存在して $S(a) = S$ となるとする．定理の仮定より $S(a)$ は G の最小メンバーのウィニング コアリションなので $S = S(a)$ は $G_{C(P)}$ の最小メンバーのウィニング コアリションである．また，命題 1 より $T \supset S$ ならば $T \in W_{C(P)}$ なので $G_{C(P)}$ は対称的である． ∎

定理 1 によって，任意の q 人での話し合いで全員の承諾を得られる代替案が必ず存在することと,「意見調整ゲーム」が対称的であることは同値であることがわかった．これは $G = G_{C(P)}$（$W = W_{C(P)}$）となるための条件を与えたことになる．つまり，任意の投票者が互いに協力可能である「意見調整ゲーム」が古典的なシンプルゲームであるといえ，従来のシンプルゲームの枠組が，本論文で与えた「意見調整ゲーム」の枠組の特別な形として位置づけられることが明らかになった．

例 7（意見調整ゲームが対称的である状況）3 人の投票者が 3 つの代替案の中から，多数決により 1 つを選び出そうとしている．投票者の集合を $N = \{1, 2, 3\}$，代替案の集合を $A = \{a, b, c\}$ とし，各投票者の理想とする意見は $R_1 = (a, b, c)$，$R_2 = (b, c, a)$，$R_3 = (c, a, b)$，決定に納得できる代替案の集合は $\max P_1 = \{a, b\}$，$\max P_2 = \{b, c\}$，$\max P_3 = \{c, a\}$ であるとする．

$W_{C(P)} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, N\}$ であり，この「意見調整ゲーム」$G_{C(P)}$ は対称的である．$A_{C(P)} = \{a, b, c\}$ で決定案はウィニング コアリションの組み方とそこでの話し合いによるので，各投票者とってはコアリション内の話し合いが非常に重要である．

4. 意見調整ゲームの投票結果とシンプルゲームのコアの関係

本節では,「意見調整ゲーム」の枠組みの中で「直接の投票では採決の結果が得られない意思決定状況で，コアリションを形成することにより如何なる代替案が選出されるか？」,「各投票者の許容範囲は意思決定にどのような影響を与えるか？」,「決定案とシンプルゲームのコアにはどのような関係があるか？」という 3 つの問題について考えてみる．当然，これらの問題は互いに関連しているので,「意見調整ゲーム」における決定案についての分析をおこなうことで，いくつかの定理を与える．

4.1. ウィニング コアリションの安定性と決定案

「意見調整ゲーム」では，あるウィニング コアリションが形成されても，その結託が崩れないという保証はない.「投票」の場面まで投票者は他者との接触を繰り返し，自分にとってより好ましいコアリションの形成を目指すであろう．しかし，意思決定状況によっては非常に強く結託したウィニング コアリションが形成される可能性がある．どのような状況でそのようなウィニング コアリションが存在するのかを以下の例でみる．

例 8（安定したウィニング コアリションが存在する状況）3 人の投票者が 3 つの代替案の中から，多数決により 1 つを選び出そうとしている．投票者の集合を $N = \{1, 2, 3\}$，代替

案の集合を $A=\{a,b,c\}$ とし，各投票者の理想とする意見は $R_1=(a,b,c)$，$R_2=(b,c,a)$，$R_3=(c,a,b)$，決定に納得できる代替案の集合は $\max P_1=\{a,b\}$，$\max P_2=\{b\}$，$\max P_3=\{c,a\}$ であるとする．

「意見調整ゲーム」$G_{C(P)}$ のウィニング コアリションは $\{1,2\}$，$\{1,3\}$，N の3つである．

ウィニング コアリション $\{1,2\}$ は代替案 b に組織票を投じるであろう．投票者2にとっては理想の代替案が選出されるので満足である．投票者1は代替案 b に納得できるものの，理想とする意見は aR_1b なので代替案 a をより好む．したがって投票者1は「できれば，代替案 a を支持してくれる投票者3とコアリションを組みたい」と思うはずである．

ウィニング コアリション $\{1,3\}$ は代替案 a に組織票を投じるであろう．投票者1にとっては理想の代替案が選出されるので満足である．投票者3は代替案 a に納得できるものの，理想とする意見は cR_3a なので代替案 c をより好む．しかし代替案 c を支持してくれる投票者は存在しないので，投票者3は「投票者1とコアリションを組む以外の策はない」と思うはずである．

ウィニング コアリション $N=\{1,2,3\}$ は話し合いの結果により代替案 a または b に組織票を投じるであろう．しかし投票者2と投票者3では意見に接点が見出せず，互いの存在が邪魔なはずである．

例8のウィニング コアリション $\{1,3\}$ に対して次のことがいえる．

1. コアリション内での話し合いは駆け引きを必要とせず，全員の了解を得られる代替案が存在する．
2. コアリションに所属する投票者はそこから離脱しようとはしない．
3. 現状のメンバーで既に勝てるので，内部の混乱を避けるために新たな投票者をコアリションに加入させようとはしない．

投票者が意思決定状況を正確に把握することができれば，このような安定したウィニング コアリションが形成され，「情報交換」が終了してしまうであろう．また，例7では投票者の許容範囲の違いにより，例8のような安定したウィニング コアリションは存在しない．

定義 10 （ウィニング コアリションの安定性）「意見調整ゲーム」 $G_{C(P)}=(N,W_{C(P)})$ のウィニング コアリション $S\in W_{C(P)}$ に対して

$$(\exists a\in A)\Big[(S(a)=S)\wedge(\forall i\in S)(\forall b\in A\setminus\{a\})(bR_ia\Rightarrow b\notin A_{C(P)})\Big]$$

が成り立つとき，S は安定であるという．

「意見調整ゲーム」 $G_{C(P)}=(N,W_{C(P)})$ の安定したウィニング コアリションの集合を

$$\bar{W}_{C(P)}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{S\in W_{C(P)}\mid S\text{ は安定である.}\}$$

とし，安定したウィニング コアリションが組織票を投じる代替案の集合を

$$\bar{A}_{C(P)}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\left\{a\in A\;\middle|\;(\exists S\in\bar{W}_{C(P)})\Big[(S(a)=S)\wedge(\forall i\in S)(\forall b\in A\setminus\{a\})(bR_ia\Rightarrow b\notin A_{C(P)})\Big]\right\}$$

とする．

次の定理は，一定の条件下での $\bar{A}_{C(P)}$ の存在性に関するものである．

定理 2 $C(P)$ に対して，$|A_{C(P)}|=1$ ならば $\bar{A}_{C(P)}=A_{C(P)}$ が成り立つ．

証明： $a \in A_{C(P)}$ とする．このとき $N(a) \in W$ である．$S = N(a)$ とおくと，$S(a) = S$ であり，また $|A_{C(P)}| = 1$ であることからどんな $b \in A \backslash \{a\}$ に対しても $b \notin A_{C(P)}$ なので，$a \in \bar{A}_{C(P)}$ である．

一方，$a \in \bar{A}_{C(P)}$ とすると，ある $S \in \bar{W}_{C(P)}$ に対して $S(a) = S$ が成り立つ．$S \in \bar{W}_{C(P)} \subseteq W_{C(P)} \subseteq W$ であり，かつ $S(a) \subseteq N(a)$ なので，$N(a) \in W$ となる．よって $a \in A_{C(P)}$ である． ∎

この定理により，「直接の投票では採決の結果が得られないよう投票の場面でも調整可能な意見が存在する場合がある」ことがわかる．

次の命題は，$\bar{A}_{C(P)}$ の一意性に関するものであり，さらに多数決ルールやボルダルールなどの投票ルールでは「いかなる安定したウィニング コアリションが形成されようと，その組織票による採決の結果は同じである」ということを示すものである．

定理 3 $C(P)$ に関して，シンプルゲーム G が真であれば，$\bar{A}_{C(P)}$ の要素は高々一つである．

証明： $a, b \in \bar{A}_{C(P)}$ かつ $a \neq b$ とする．$a \in \bar{A}_{C(P)}$ より，ある安定したウィニング コアリション $S \in \bar{W}_{C(P)}$ が存在して $S(a) = S$ かつ 任意の投票者 $i \in S$ が代替案 $b \in A \setminus \{a\}$ に対して bR_ia ならば $b \notin A_{C(P)}$ となる．同様に $b \in \bar{A}_{C(P)}$ より，ある安定したウィニング コアリション $T \in \bar{W}_{C(P)}$ が存在して $T(b) = T$ かつ 任意の投票者 $j \in T$ が代替案 $a \in A \setminus \{b\}$ に対して aR_jb ならば $a \notin A_{C(P)}$ となる．シンプルゲーム G が真なので命題2より，「意見調整ゲーム」 $G_{C(P)}$ も真となる．よって $S \in \bar{W}_{C(P)} \subseteq W_{C(P)}$ より $N \setminus S \notin W_{C(P)}$ となる．$T \in \bar{W}_{C(P)} \subseteq W_{C(P)}$ なので $S \cap T \neq \emptyset$ となる．したがって $k \in S \cap T$ とすると，投票者 k の理想とする意見は aR_kb または bR_ka である．ところが $S(a) = S \in \bar{W}_{C(P)} \subseteq W_{C(P)} \subseteq W$ かつ $N(a) \supseteq S(a)$ より $N(a) \in W$ なので $a \in A_{C(P)}$ であり，同様に $T(b) = T \in \bar{W}_{C(P)} \subseteq W_{C(P)} \subseteq W$ かつ $N(b) \supseteq T(b)$ より $N(b) \in W$ なので $b \in A_{C(P)}$ である．これは矛盾する． ∎

この定理により，「直接の投票では採決の結果が得られなくても，安定したウィニング コアリションが存在すれば，たとえそれが複数であっても，十分な情報交換により全体としての決定案を唯一にしぼることができる」ことがわかった．これにより「複数の党派の意見の相違は十分な情報交換を行えば解消できる」ということがわかる．

4.2. 敗因分析ゲームとシンプルゲームのコア

ここでは，シンプルゲームのコアと「意見調整ゲーム」の関係を調べるために，「敗因分析ゲーム」を考える．「敗因分析ゲーム」は，すでに採決の結果が得られたと想定し，各投票者がその結果をどのようにとらえるかについての考察にもとづく概念である．投票者の中には実際に得られた決定に納得できないものもいるかも知れない．「意見調整ゲーム」では各投票者の許容範囲の選択が意思決定に大きな影響を与えているので，決定に納得できない投票者は「もし許容範囲が違っていたならば，自分にとってより好ましい代替案が選出できたのではないか？」と考えるかもしれない．つまり各投票者は，実際とは異なる許容範囲を用いた仮想の「意見調整ゲーム」を分析することで実際の意思決定を振り返るのである．

「意見調整ゲーム」での採決の結果を $x \in A$ とする．すると，決定案 x よりも好ましい代替案を全体の決定にするためにはどのような話し合いにも応じるとした投票者 i の許容範囲が

$$P_i^x \stackrel{\text{def}}{=} \{r \in L(A) \mid (\max r) R_i x\}$$

と書ける．また $P^x = (P_i^x)_{i\in N}$ とする．

投票者の敗因分析は実際の意思決定状況 $C(P) = (N, W, A, R, P)$ での投票者の許容範囲 P を仮想の許容範囲 P^x に変更した5つ組 $C(P^x) = (N, W, A, R, P^x)$ を用いて行われるものとする．つまり，決定案 x を知った上での仮想の意思決定状況を考えるのである．

仮想の許容範囲 P^x を考えると，コアリション $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ の中で代替案 $a \in A$ の決定に納得できる投票者の集合は，

$$S^x(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in S \mid \exists r \in P_i^x, \max r = a\}$$

となる．

定義 11 （敗因分析ゲーム）$C(P) = (N, W, A, R, P)$ についての「意見調整ゲーム」$G_{C(P)} = (N, W_{C(P)})$ における決定案を $x \in A$ とする．決定案 x に関する「敗因分析ゲーム」とは2つ組 $G_{C(P^x)} = (N, W_{C(P^x)})$ である．ただし，

$$W_{C(P^x)} \stackrel{\text{def}}{=} \{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\} \mid \exists a \in A, S^x(a) \in W\}$$

である．

「敗因分析ゲーム」は「意見調整ゲーム」なので,「意見調整ゲーム」のときと同様に諸概念が定義できる．具体的には,

$$\max P_i^x \stackrel{\text{def}}{=} \{\max r \in A \mid r \in P_i^x\}\ ,$$

$$A_{C(P^x)} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid N^x(a) \in W\}\ ,$$

$$\bar{W}_{C(P^x)} \stackrel{\text{def}}{=} \{S \in W_{C(P^x)} \mid S \text{ は安定である.}\}\ ,$$

$$\bar{A}_{C(P^x)} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A | (\exists S \in \bar{W}_{C(P^x)})[(S^x(a) = S) \wedge (\forall i \in S)(\forall b \in A\backslash\{a\})(bR_ia \Rightarrow b \notin A_{C(P^x)})]\}$$

などである．

以下では，実際の「意見調整ゲーム」における決定案 x と,「敗因分析ゲーム」での安定したウィニング コアリションによる決定案の集合 $\bar{A}_{C(P^x)}$ の関係を調べる．

例 9 （敗因分析１）３人の投票者が３つの代替案の中から，多数決により１つを選び出そうとしている．投票者の集合を $N = \{1, 2, 3\}$ ，代替案の集合を $A = \{a, b, c\}$ とし，各投票者の理想とする意見は $R_1 = (a, b, c)$，$R_2 = (b, c, a)$，$R_3 = (c, a, b)$ であるとする．表１で３つの状況を考える．

状況１ではウィニング コアリション $\{1,3\}$ が安定であり，それによって代替案 a が選出されたとする．同様に状況２ではウィニング コアリション $\{1,2\}$ が，状況３ではウィニング コアリション $\{2,3\}$ が安定であり，それぞれの状況で安定したウィニング コアリションにより代替案が選出されたとする．

表1 実際の「意見調整ゲーム」 $G_{C(P)} = (N, W_{C(P)})$

実際の許容範囲	状況1	状況2	状況3
$\max P_1$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$
$\max P_2$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$
$\max P_3$	$\{c,a\}$	$\{c\}$	$\{c\}$
$\bar{A}_{C(P)}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$

それぞれの状況での決定案に対して敗因分析をおこなった結果が表2である．なお，各状況での決定に納得できない投票者は安定したウィニング コアリションから外れた投票者である．

表2 「敗因分析ゲーム」 $G_{C(P^x)} = (N, W_{C(P^x)})$

仮想の許容範囲	$x=a$	$x=b$	$x=c$
$\max P_1^x$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$
$\max P_2^x$	$\{b,c,a\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$
$\max P_3^x$	$\{c,a\}$	$\{c,a,b\}$	$\{c\}$
$\bar{A}_{C(P^x)}$	$\{c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$

状況1において，もし投票者2が代替案 c を許容していれば，実際の決定案 a よりも好ましい代替案 b が選出されていたかもしれない．つまり投票者2は本当の意味では納得はしないものの，最悪の結果は避けられたといえる．同様のことが状況2，3でもいえる．

例 10 （敗因分析2）4人の投票者が3つの代替案の中から，1つを選び出そうとしている．決定には3票以上が必要である．投票者の集合を $N=\{1,2,3,4\}$，代替案の集合を $A=\{a,b,c\}$ とし，各投票者の理想とする意見は $R_1=(a,b,c)$，$R_2=(b,c,a)$，$R_3=(c,a,b)$，$R_4=(a,c,b)$ であるとする．表3で3つの状況を考える．

表3 実際の「意見調整ゲーム」 $G_{C(P)} = (N, W_{C(P)})$

実際の許容範囲	状況1	状況2	状況3
$\max P_1$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$
$\max P_2$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$
$\max P_3$	$\{c,a\}$	$\{c\}$	$\{c\}$
$\max P_4$	$\{a\}$	$\{a,c,b\}$	$\{a,c\}$
$\bar{A}_{C(P)}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$

状況1ではウィニング コアリション $\{1,3,4\}$ が安定であり，それによって代替案 a が選出されたとする．同様に状況2ではウィニング コアリション $\{1,2,4\}$ が，状況3ではウィニング コアリション $\{2,3,4\}$ が安定であり，それぞれの状況で安定したウィニング コアリションにより代替案が選出されたとする．

それぞれの状況での決定案に対して敗因分析をおこなった結果が表4である．なお，各状況での決定に納得できない投票者は安定したウィニング コアリションから外れた投票者である．

表4 「敗因分析ゲーム」 $G_{C(P^x)} = (N, W_{C(P^x)})$

仮想の許容範囲	$x=a$	$x=b$	$x=c$
$\max P_1^x$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$
$\max P_2^x$	$\{b,c,a\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$
$\max P_3^x$	$\{c,a\}$	$\{c,a,b\}$	$\{c\}$
$\max P_4^x$	$\{a\}$	$\{a,c,b\}$	$\{a,c\}$
$\bar{A}_{C(P^x)}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{c\}$

状況1と3では決定に納得できない投票者がいくら許容範囲を変えたとしても決定案は変わりそうにない．

次の定理は実際の決定案とシンプルゲームのコアの関係を明らかにしている．

定理 4 $C(P) = (N, W, A, R, P)$ に対して $G = (N, W)$ が真のシンプルゲームであるとする．任意の決定案 $x \in A$ に対して

$$\bar{A}_{C(P^x)} = \{x\} \Leftrightarrow x \in Core(C)$$

が成り立つ．

証明： $\bar{A}_{C(P^x)} = \{x\}$ とする．決定案 x が他のある代替案 $a \in A \setminus \{x\}$ に支配されているとすると

$$\begin{aligned} \{i \in N \mid aR_i x\} &= \{i \in N \mid \exists R \in P_i^x, \max R = a\} \\ &= N^x(a) \in W \end{aligned}$$

となり，したがって $a \in A_{C(P^x)}$ となる．一方 $x \in \bar{A}_{C(P^x)}$ なので，ある安定したウィニング コアリション $S \in \bar{W}_{C(P^x)}$ が存在して $S^x(x) = S$ かつ 任意の投票者 $j \in S$ が代替案 $a \in A \setminus \{x\}$ に対して $aR_j x$ ならば $a \notin A_{C(P^x)}$ となる．ところが，定理の仮定よりシンプルゲーム G が真で $S \in \bar{W}_{C(P^x)} \subseteq W_{C(P^x)} \subseteq W$ なので $N \setminus S \notin W$ より $S \cap N^x(a) \neq \emptyset$ となる．よって，投票者 $k \in S \cap N^x(a)$ の理想とする意見は $aR_k x$ であるが，これは矛盾する．したがって $x \in Core(C)$ となる．

逆に，$x \in Core(C)$ とすると決定案 x は他のどの代替案にも支配されない．よって，任意の代替案 $a \in A \setminus \{x\}$ に対して

$$\begin{aligned} N^x(a) &= \{i \in N \mid \exists R \in P_i^x, \max R = a\} \\ &= \{i \in N \mid aR_i x\} \notin W \end{aligned}$$

となり，したがって $a \notin A_{C(P^x)}$ となる．また，$N^x(x) = N \in W$ より $x \in A_{C(P^x)}$ である．よって $A_{C(P^x)} = \{x\}$ となるので，定理2より $\bar{A}_{C(P^x)} = \{x\}$ である． ∎

系 1 $C(P)$ に対して，G が真のシンプルゲームであるとする．

$$Core(C) = \emptyset \Leftrightarrow \text{任意の決定案 } x \in A \text{ に対して } x \notin \bar{A}_{C(P^x)}$$

が成り立つ．

系 2 $C(P)$ が与えられたとする．任意の決定案 $x \in A$ に対して

$$x \in Core(C) \Rightarrow \bar{A}_{C(P^x)} = \{x\}$$

が成り立つ．

定理 4 より，真のシンプルゲームのコアは「投票者全員が後悔しない許容範囲を取れたとき，十分な情報交換により必然的に決定案となる代替案の集合」であると解釈できる．また系 1 より,「真のシンプルゲームのコアが空」であることと「どのような代替案が選出されようと意思決定に対して後悔している投票者が必ず存在する」ことは同値であることがわかる．与えられたシンプルゲームが真でなくても系 2 が成り立つが，系の逆は成り立たないことを次の例でみる．

例 11 （シンプルゲームが真でない状況）4 人の投票者が 4 つの代替案の中から，1 つを選び出そうとしている．決定には 2 票以上が必要である．投票者の集合を $N = \{1,2,3,4\}$，代替案の集合を $A = \{a,b,c,d\}$ とし，各投票者の理想とする意見は $R_1 = (a,b,c,d)$，$R_2 = (d,a,b,c)$，$R_3 = (b,c,a,d)$，$R_4 = (c,b,a,d)$，実際の許容範囲は $\max P_1 = \{a,b\}$，$\max P_2 = \{d,a\}$， $\max P_3 = \{b\}$，$\max P_4 = \{c\}$ であるとする．

この場合のシンプルゲーム G は真ではない．

実際の「意見調整ゲーム」 $G_{C(P)}$ では安定したウィニング コアリション $\{1,2\}$ により代替案 a が選出されたとし，この決定案 a に関する「敗因分析ゲーム」 $G_{C(P^a)}$ を考える．各投票者の仮想の許容範囲は $\max P_1^a = \{a\}$，$\max P_2^a = \{d,a\}$，$\max P_3^a = \{b,c,a\}$，$\max P_4^a = \{c,b,a\}$ となり $\bar{A}_{C(P^a)} = \{a\}$ であるが，シンプルゲームのコア $Core(C)$ は空なので，当然 $a \notin Core(C)$ である．

5. 結論

本論文では，集団意思決定の新しい数理的なモデルとして「意見調整ゲーム」を提案し，これを用いて，集団意思決定状況を分析するための新たな枠組を構築した．このモデルは,「意思決定主体の意見の柔軟性」を考慮するために,「投票者の許容範囲」という概念を従来のシンプルゲームあるいはコミッティーを用いた枠組に導入したものである．実際，定理 1 では『「意見調整ゲーム」がもとのシンプルゲームと同じになるための必要十分条件はどのウィニングコアリションにも調整可能な意見が存在することである』ということが示され，従来の枠組が「意見調整ゲーム」による枠組の特別な形であることが明らかになった．

さらに本論文では，ゲームの解概念としてのコアと「意見調整ゲーム」の間の関係を調べるために,「安定した代替案」や「敗因分析ゲーム」という概念を導入した．そして定理 2 および定理 3 として,「安定した代替案」の存在性と一意性に関する命題を与えた．これらの定理により，集団意思決定の文脈において,「直接の投票では採決の結果が得られないような状況でも，調整可能な意見が存在しうる」ことと,「複数の党派の意見の相違は十分な情報交換によって解消できる」ことを示した．さらに定理 4 では，コア,「意見調整ゲーム」「安定した代替案」そして「敗因分析ゲーム」の間の関係を与え,「コアは各意思決定主体が

後悔しないような許容範囲をとったときの安定した代替案である」という，コアの新しい解釈を与えた．この解釈が得られたことで,「コアから社会全体の決定を選出すべきである」という主張に十分な正当性を与えることができた．

本論文で得られたいくつもの命題やそれらが集団意思決定状況の文脈において示唆する意味は，本論文で構築した枠組の強力さを十分に示している．今後，集団意思決定状況の分析に本論文で構築した枠組を用いることで，従来の枠組を用いた場合よりも詳細な結果が得られることが期待できる．

最後に，本論文の内容に関連する課題について述べる．

1）本論文では，投票者の許容範囲は他者との話し合いでは変化しないものとしている．しかし現実の意思決定状況では様々な意見を聞くことで問題認識も変化する．したがって，意見調整ゲームを現実の意思決定状況により近づけるためには，投票者の許容範囲の変化の過程を表現する必要がある．

2）本論文では，投票者の意見は代替案の全体の集合の上の線形順序であった．しかし実際の投票者の意見は線形順序にならない場合が多く，実際 [1] では，弱順序を用いて理論を展開している．弱順序を用いた，本論文の枠組の一般化が望まれる．

3）実際の意思決定状況では，投票者が党派間を移動することが，本論文が想定しているほど容易ではない場合もある．本論文の枠組に，党派間の移動のしやすさの概念を導入することで，より現実の意思決定状況を表現することができる枠組を得ることができるだろう．

参考文献

[1] J. Eichberger: *Game Theory for Economists* (Academic Press, Inc., 1993).

[2] T. Inohara, S. Takahashi and B. Nakano: On conditions for a meeting not to reach a deadlock. *Applied Mathematics and Computation*, **90** (1998) 1-9.

[3] 猪原健弘, 高橋真吾, 中野文平: 集団討議の活性化に対するシステムアプローチの役割. 経営情報学会, **6**-3 (1997) 41-60.

[4] H. Moulin: *Axioms of Cooperative Decision Making* (Cambridge University Press, New York, 1988).

[5] B. Peleg: *Game Theoretic Analysis of Voting in Committees* (Cambridge University Press, New York, 1984).

[6] 佐伯胖: 「きめ方」の論理 (東京大学出版会, 1980).

[7] M. Truchon: Voting games and acyclic collective choice rules. *Mathematical Social Sciences*, **29** (1995) 165-179.

Takehiro Inohara
Department of Computational Intelligence and Systems Science
Tokyo Institute of Technology
E-mail: inohara@nkn.dis.titech.ac.jp

ABSTRACT

ON SIMPLE GAMES WITH PERMISSION OF VOTERS

Akira Yamazaki Takehiro Inohara Bunpei Nakano
Tokyo Institute of Technology

In this paper, treating flexible voters in voting situations, we examine the influences of the flexibility of voters on coalition formation and final decision making in the situations of group decision making. We employ new models of voting situations, called permission games and postulated games to deal with the voting situations with flexible voters, and show 1) that simple games can be seen as specialization of permission games, 2) that there can be an opinion that is permissible for all decision makers, even if no decision cannot be made by voting, 3) that coalitions with different opinions can agree on the same opinion through enough informaion exchange, and 4) that the core of a simple game can be interpreted as the set of all alternatives that do not cause voters any regret in terms of their flexibility.