Journal of the Operations Research
Society of Japan
Vol. 42, No. 2, June 1999

DEA モデルにもとづく経営資源再配分問題

伊藤竜一　　生田目崇　　山口俊和
ソニー (株)　　東京理科大学

(受理 1997 年 10 月 2 日；再受理 1998 年 9 月 25 日)

和文概要　大企業などの組織体は，一般に複数の活動主体 (支店など) をもっている．この組織体の経営活動には，二つの立場があると考えられる．一つはそれぞれの活動主体における「管理者」の立場であり，もう一つはその活動主体を統括する組織体全体の「経営者」の立場である．そして，それぞれの活動主体は人材や材料などの資源を投入して，製品やサービスを産出するシステムと考えることができる．ここで用いられる経営資源はほとんどの場合，無限に利用可能というわけではないので，これらの有限な資源を有効に利用することは重要である．組織体全体の経営者は，活動主体群全体の業績 (産出) に関心を持つであろうし，各活動主体の管理者は，各々の活動単位の業績や他の活動単位に比べてどのくらい優れた (もしくは劣った) 活動をしているかということに主なる関心をもつ．本論文では，このような組織体に対して多入力多出力のシステムの相対的効率性評価の手法である DEA の考え方を利用し，各活動主体 (DMU) の現状の活動を評価した上で，DMU 群全体でより大きな産出を得ることができるような資源再配分を行うモデルを提案する．このモデルは，規模の効率性を考慮した BCC モデルの生産可能領域をもとに，より効率のよい活動を目指すような各活動単位への資源の配分を決定する．また，同様の考えで DMU 群へ投入する資源量を抑えるモデルを提案する．

1. はじめに

Charnes, Cooper and Rhodes が提唱した DEA (Data Envelopment Analysis) [5] は多入力多出力システムの相対的な効率測定のための手法であり，提案されてから以後今日まで数多くの研究論文や著書が報告されてきた [6, 13, 21].

DEA には次に挙げる二つの大きな特徴がある．

第一に，複数の分析対象となる活動主体 (DEA ではこれを DMU; Decision Making Unit と呼ぶ) の活動に対して，相対的な効率評価をおこなう点である．DEA は複数の投入 (入力) から，複数の産出 (出力) を得るようなシステムを分析の対象としているが，DEA ではそのようなシステムの活動に対して一つの効率値を与える．その際に各入出力項目にウェイト付けすることで一元化するのであるが，分析の対象とするそれぞれの DMU に対して自由にウェイト付けできる点が DEA の大きな特徴である．

第二に，効率的でないと判定された DMU に対して効率的な活動となるための指標 (改善目標) を示すことができる点である．基本的な DEA のモデルにおいて，改善目標は入力もしくは出力のどちらかを固定し，他方について一律に縮小または拡大するように与えられる．

また，DEA は本来の効率性評価や非効率的な DMU に対する改善目標の導出以外の目的に対しても応用されるようになってきている．Sueyoshi [18, 19] は，DEA の効率的フロンティアを用いて，限界費用の測定や価格決定をおこなっている．Golany and Tamir [11] は，特に公共性の高い事業体に対する資源の配分問題を取り上げ，そこで DEA の方法論を

応用している．Andersen and Petersen [1]，Hibiki [12] は効率的と判定された DMU に対する感度分析的アプローチを展開している．これらの論文はいずれも DEA の生産可能領域と効率的フロンティアの考え方をもとにしたアプローチであり，DEA がデータ・オリエンテッドな手法である特徴を用いている．

本論文では，特に営利企業などの組織体における複数の活動主体 (支店など) に対する経営資源の再配分問題について考える．その際，現在所有している経営資源をどのように配分するのが組織体全体において効果的であるかということに着目する．

経営活動を行う上で企業などの組織体には二つの立場があると考えられる．一つは組織体全体の業績や将来性を考え，統制および調整を行う立場 (以後「経営者」と呼ぶ) であり，もう一つはそれを考慮した上で支店など実際の活動単位 (DMU) を統制する立場 (以後「管理者」と呼ぶ) である[1]．

それぞれの DMU の管理者の立場では，その DMU がいかに効率的な活動が行われているかということに関心が向けられる．それに対し，DMU 群全体をより高いレベルで総合的に管理する立場にある経営者は，それぞれの DMU の効率性の問題よりも，限られた資源 (入力) のもとでいかに DMU 群全体の産出 (出力) を得ることができるという問題に対してより多くの関心を払うべきあろう．よって，それぞれの DMU の管理者は，自身に与えられた資源を用いていかに効率的に活動するか，また効率的でないならばそれを改善することを目指す．また， DMU 群全体を統括する経営者は全社的な売上高や利益を増加させることがより重要な経営目標となると考えられる．その際には DMU 群に投入する資源をどのように配分するかということが大きな関心事となる．

本論文では，このような組織体に対して現在保有している資源をどのように配分するかという問題について，規模の収穫が可変であることを考慮した BCC モデル [2] をもとに，各DMUの環境や業績を評価した上で，DMU 群全体の産出量を大きくするような改善案を提示する方法を提案する．加えて同様の考え方で，産出量を増加させるのではなく，DMU 群全体への資源の投入量を削減するようなモデルを提案する．

2. DEA モデル

2.1. DMU の活動

DEA において活動単位である複数の DMU は同一の環境下にあり，同じ目的を持つと仮定されている．またすべての DMU は共通の m 個の入力項目と k 個の出力項目を持ち，各 DMU の入力と出力の組み合わせを活動と呼ぶ．以下に DMU の活動を表す記号を定義する．

- n : DMU 数
- m : 入力項目数
- k : 出力項目数
- a : 対象とする DMU
- X_{ij} : DMU$_j$ の i 番目の入力
- Y_{rj} : DMU$_j$ の r 番目の出力
- λ_j : DMU$_j$ の非負結合変数

ただし，入出力は非負の値であるものとする．

[1]ここに示した二つの立場については様々な言葉で述べられている．例えば杉山ら [20] は DEA による合意形成において DMU 群全体を総合評価する立場を評価者と呼んでいる．また資源配分問題に関する2階層問題において，Goedhart and Spronk [9] は central management と divisional managers，王ら [24] は事業部制組織を想定した上で本部と事業部と二つの立場を区別してその役割を分割している．

これらの記号を用いると，分析対象である DMU_a $(a = 1, 2, \ldots, n)$ の活動のとりうる範囲(生産可能領域) は次のように定義される．

$$X_{ia} \geq \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\lambda_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.1}$$

$$Y_{ra} \leq \sum_{j=1}^{n} Y_{rj}\lambda_j, \quad r = 1, 2, \ldots, k \tag{2.2}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.3}$$

$$L \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq U \tag{2.4}$$

本論文では，生産可能領域の形状を決定する (2.4) 式について $L = U = 1$ である BCC モデルを取り上げる．これは，規模の収穫が可変であることを考慮した凸包の生産可能集合を仮定したモデルである．すべての DMU の中で，小さな入力の組み合わせで大きな出力を得られるような DMU は効率的と評価される．効率的と評価された DMU で張られた超平面の凸集合を効率的フロンティア (efficiency frontier) と呼ぶ．

2.2. DMUの環境の考慮

DEAでは各DMUは同一環境下にあると仮定して分析を行っている．しかし実際には，例えば敷地面積や地域人口のように，各 DMU の意思や努力による変更 (制御) が不可能な項目を含むことも多くある．実際の問題では，すべての DMU が全く同一の環境にあるとは考えにくく，それぞれの DMU の置かれた環境を考慮することが必要となってくる．この問題に対して，Banker and Morey [3] は入出力項目を制御可能である項目と制御不能である項目とに分類して分析するモデルを提案している．

各 DMU の管理者にとって制御不能な項目には，その DMU が置かれている環境によるものと経営者から配分される経営資源によるものが考えられる．よって各 DMU の活動の効率評価をおこなう場合,「置かれている環境下で，与えられた経営資源をもとにそれに見合った産出を行っているか」どうかを評価すべきである．彼らは，こうした環境や投入された資源を制御不能項目とした上で各 DMU の効率評価をする方法を示している．

本論文では DMU 群全体に投入している資源の再配分について考えることから，入力項目についてのみ制御が可能かどうかを判断し，入力項目の集合を以下のように分ける．

I_D ： 制御可能な入力項目の添字集合

I_F ： 制御不能な入力項目の添字集合

2.3. BCC モデル

企業体などについてその支店を DMU として分析する場合，規模に対する収穫の大きさの考慮は必要不可欠であり，BCC モデルはこうした規模の変化を考慮に入れたモデルである．BCC モデルの効率的フロンティアは各 DMU の活動の規模に対して収穫可変型の凸包絡面になり，効率的な DMU が存在する領域に限定される閉じた効率的フロンティアとなる．

以下に，BCC モデルの入力項目に制御不能項目を考慮した場合の入力最小化モデルと出力最大化モデルについてそれぞれの定式化を示す．

【LPDO-BCC】(入力最小化モデル)

$$\text{最小化} \quad \theta_a - \varepsilon\left(\sum_{i \in I_D} s_{ia} + \sum_{r=1}^{k} s_{ra}\right) \tag{2.5}$$

制約条件
$$\theta_a X_{ia} - \sum_{j=1}^{n} X_{ia}\lambda_j - s_{ia} = 0, \quad i \in I_D \tag{2.6}$$
$$X_{ia} - \sum_{j=1}^{n} X_{ia}\lambda_j - s_{ia} = 0, \quad i \in I_F \tag{2.7}$$
$$\sum_{j=1}^{n} Y_{rj}\lambda_j - s_{ra} = Y_{ra}, \quad r = 1, 2, ..., k \tag{2.8}$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \tag{2.9}$$
$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{2.10}$$
$$s_{ia} \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{2.11}$$
$$s_{ra} \geq 0, \quad r = 1, 2, ..., k \tag{2.12}$$

【LPDI-BCC】(出力最大化モデル)

最大化
$$f_a + \varepsilon \left(\sum_{i \in I_D} s_{ia} + \sum_{r=1}^{k} s_{ra} \right) \tag{2.13}$$

制約条件
$$\sum_{j=1}^{n} X_{ia}\lambda_j + s_{ia} = X_{ia}, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{2.14}$$
$$f_a Y_{ra} - \sum_{j=1}^{n} Y_{rj}\lambda_j + s_{ra} = 0, \quad r = 1, 2, ..., k \tag{2.15}$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \tag{2.16}$$
$$s_{ia} \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{2.17}$$
$$s_{ra} \geq 0, \quad r = 1, 2, ..., k \tag{2.18}$$

ただし ε は無限小正数であり，実際の計算に際しては例えば 10^{-6} などの値を与えることによって解くことができる．これに対し，Cook et al. [7]，Tone [23] が ε を用いずに解く方法を提案している．また付順形式の目標計画法の解法 [8] を用いることもできる．

【LPDO-BCC】における最適解について θ_a^* の値が 1 で，かつスラック変数 s_{ia}^*, s_{ra}^* の値がすべて 0 ならば DMU_a は効率的と評価される．それ以外の場合は非効率的な DMU と評価される ($*$ は最適解を表す)．ここで非効率的と評価された DMU は他の DMU が行った活動と比較して，改善の余地が残っていることを示している．さらに非効率的な DMU に対しては，以下のような改善目標 ($\overline{X_{ia}}$, $\overline{Y_{ra}}$; $i = 1, 2, ..., m$; $r = 1, 2, ..., k$) が与えられる．改善目標は効率的フロンティア上に求められる．

$$\overline{X_{ia}} = \theta_a^* X_{ia} - s_{ia}^*, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{2.19}$$
$$\overline{Y_{ra}} = Y_{ra} + s_{ra}^*, \quad r = 1, 2, ..., k \tag{2.20}$$

図 1 では 1 入力 1 出力の例を用いて，非効率的な DMU_G の改善目標を示している．【LPDO-BCC】における改善目標は，まず現状の出力値を維持したまま各入力値を一律 θ_a^* 倍し，もしスラック変数 s_{ia}^*, s_{ra}^* が 0 でない場合にはその値を加減した入出力値を改善目標としている．

逆に出力最大化モデルの場合は，現在の入力値を維持した上で出力値を一律に拡大するようにするモデルである．ここで示した【LPDO-BCC】は出力項目には制御可能または不

能の区別をしないため[2]通常の BCC モデルとほとんど定式化は変わらない．ただし，目的関数で考慮するスラック変数が制御可能な入力項目に限る部分が異なる．このモデルの改善目標は，各出力値を一律に f_a^* 倍し，スラック変数を調整したものとなる (図1).

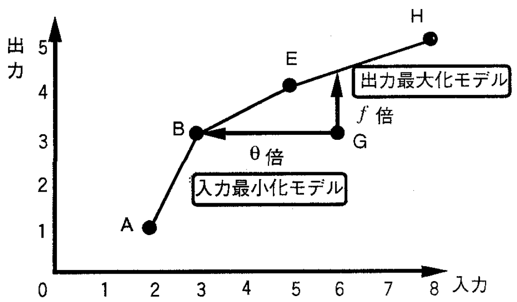

図 1: BCC モデルの改善目標

出力最大化モデルの改善目標はDMUの管理者に対して現在おこなわれている投入量に見合うだけの産出産出を望むものであり，入力最小化モデルでは現在おこなわれている産出量に見合うだけの投入しかおこなわないというものである．よって，先に述べた経営活動の二つの立場で改善目標について考えると，出力最大化モデルは各 DMU の管理者に対してより一層の努力を求めるものであり，入力最小化モデルは DMU 群全体の経営者に対して投入する資源量を抑える目標ということができる．

3. DEA モデルにもとづく資源再配分問題

通常，企業における各事業体への経営資源の配分問題は「経済性工学」(もしくは「経済性分析」) における混合案からの選択問題として扱われている [14, 15, 16, 17]．混合案からの選択問題とは，互いに独立な複数の事業体があって，そのそれぞれに複数の排反案があり，それらの中から全社的にみて最も有利な案の組み合わせを決定する問題である．横軸に投下資金，縦軸にそこから得られる利益 (リターン) をとる平面に各事業体の排反案を表して，経済的に無資格な案を排除した上で各案を線で結ぶと，原点を通る上に凸な区分線形な増加関数となる．これは (2.4) 式において $L = 0$, $U = 1$ とした DRS モデル (Decreasing Return to Scale Model: 刀根 [22] 第 4 章を参照) と一致する．このモデルは，新規に立ちあげるプロジェクトなどに対しては有効に適用される．しかし，すでに活動している事業体に関して，投入されている資源の再配分を考える場合は，それぞれの事業体の置かれている環境や，投入資源量などを考慮せねばならない．よってそれぞれの事業体に対して独立に排反案が見積もられていても，全体の構造を大きく変更するような再配分案を採択するのはその実現可能性から考えても難しい．また，ある事業体に対して資源投入量を0とするのは現実には不可能であり，その場合，既存の投入量を考慮し，ある程度範囲を限定した中で計画の効率性を考えることが重要である．そこで本論文では，このような問題に対して DEA の BCC モデルの生産可能領域の考え方を利用する． BCC モデルの場合は現状の活動の範囲に生産可能領域が限定されるので，極端な解を回避することができる．そして，現時点で各

[2]出力項目についても制御不能項目を考慮したモデルは可能であるが，入力から出力を得るという DEA のプロセスを考えると「出力を制御する」ことについてはその意味付けも含めて注意が必要である (Charnes et al. [6] 第 3 章を参照)．よって本論文では，出力項目に関する制御不能項目については考慮しなかった．

事業体が他の事業体と比較してどのような投入による活動をしているのかを考慮し，その活動をもとにした改善を考える．

また，混合案からの選択問題では各事業体の排反案を見積もり，それらの中から一つの案を選ぶが，それぞれの代替案 (投入量と産出量の関係) をどのように見積もるかということについては特に言及されていない．本論文では，DEA の効率的フロンティアがそれぞれの投入レベルに対する産出量の上限を表していることから，効率的フロンティアの点を各事業体の排反案を代替するものとして扱う．

さらに，DEA では各 DMU の入力あるいは出力を現状維持した場合に効率的となる活動を改善目標として与えている．しかしこれは，DMU 群全体で保有している経営資源を考慮したものではなく，各 DMU の管理者に対して個別に提示される目標であり，所有している資源量を考慮していない．

DEA にもとづく資源再配分に関する既存の研究として Golany and Tamir による DEA-based Resource Allocation Model (DEA-RAM) [11] がある．彼らは公共性の高い組織体に対する資源再配分問題について Effectiveness, Efficiency, Equality という 3 つの基準を取り上げており，その中で特に Effectiveness の基準に対して DEA の生産可能集合の考え方を取り入れている．しかし，彼らの方法は複数の入力に対して一つの出力の場合についてのみ考慮しており，複数の出力の場合についてはほとんどふれていない．

先に述べたように，企業の経営活動には企業全体を統制および調整する経営者と，その配分された資源をもとに各事業体の実際の管理，運営をおこなう管理者という二つの立場があると考えられる．経営者は現存の活動単位に対して何らかの基準で評価し，その評価にもとづき場合によっては統廃合を含むような資源の再配分等を行う．このような経営資源の有効な利用を考えることは重要である．また，各事業体の管理者の立場から見れば，経営者から与えられた資源をもとにいかに効率的な活動をおこなうかが重要となる．次章では企業体が保有している経営資源の再配分に注目し，DEA モデルにもとづいた方法を提案する．3.2 節から 3.4 節では産出量に着目したモデル (産出量増大モデル) について述べる．3.5 節では投入量に着目したモデル (投入量削減モデル) について述べる．

3.1. 記号の定義

定式化のために，以下のように記号の定義をおこなう．

E	:	効率的フロンティアを構成する DMU の添字集合
λ_{aj}	:	DMU_a に対する DMU_j の非負結合係数
B_i	:	入力 i に対する DMU 群全体の追加投入量
s_{ia}^{+}	:	DMU_a の入力 i の増加量
s_{ia}^{-}	:	DMU_a の入力 i の減少量
t_{ra}^{+}	:	DMU_a の出力 r の増加量
t_{ra}^{-}	:	DMU_a の出力 r の減少量

3.2. 基本モデル

基本モデルでは，各 DMU の資源の投入を再配分して，DMU 群全体の各出力の総和をどれだけ増加させうるかについて考える．全体の産出を大きくするという考え方を表 1 の 1 入力 1 出力のデータを例に説明する (図 2).

投入された経営資源をもとに各DMUが効率的な運営をした場合，DEA ではその活動は効率的フロンティア上に得られるはずであると考られる．つまり図 2 では線分 A–B–E–H 上に効率的な活動が得られる．

表 1: 1 入力 1 出力のデータ

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H
入力	2	3	3	4	5	5	6	8
出力	1	3	2	3	4	2	3	4

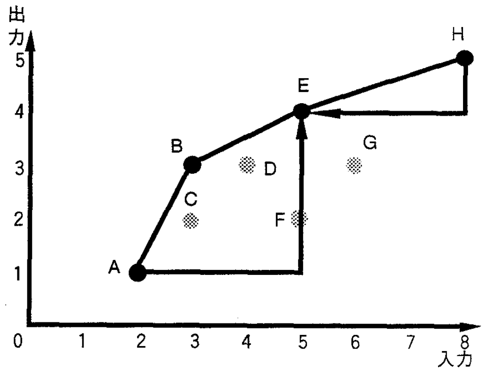

図 2: 提案するモデルの基本的な考え方

ここで DMU_A, DMU_H に注目する (他の DMU はの入力は移動できないとする). 現状では DMU_A に対しては 2 単位, DMU_H に対しては 8 単位の合計 10 単位の投入がおこなわれ, それぞれ 1 単位と 5 単位, 合計 6 単位の産出を得ている. しかしそれらの DMU が効率的な活動をすると仮定するならば, (ここでは例えばそれぞれ 3 単位までの資源投入量の移動ができると仮定すると) DMU_H の入力を 3 単位 DMU_A に移動することによって合計 8 単位の産出を得ることが出来ると考えられる. さらに現状の活動規模を考慮してなるべく入力の移動量が少ない方が良いと考えるなら, DMU_A の入力を 1 単位増やし, DMU_H の入力を 1 単位減らすことによっても同様の出力を得ることができる. このように投入に対して産出が最も大きく見込むことのできる規模に多くの投入をおこなうことで総産出量を大きくすることを目指す.

出力が 1 項目の場合には目的関数を各 DMU の出力値の和とすればよいが, 複数の出力項目がある場合には, 出力項目ごとに単位が異なることが考えられるので, 目的関数に出力値の和をそのまま用いても適切な値を求めることは出来ない. Gorany and Tamir は前述の DEA-RAM について, 複数の項目の場合は適当なウェイト付けすることにより1つの目的関数に統合すればよいと述べているが, 複数の出力について明確な判断を持ち合わせている場合以外は, これらのウェイトを一意に求めることは一般には困難である. そこで本論文では, 各出力項目ごとの総和の増加率を目的関数とし,【P1】のように定式化する. (3.6) 式は DMU 群全体に追加投入される経営資源に関する制約であり, 再配分のみを考える場合は $B_i = 0$ となる.

【P1】

$$\text{最大化} \quad \frac{\sum_{a=1}^{n}(t_{ra}^{+} - t_{ra}^{-})}{\sum_{a=1}^{n} Y_{ra}}, \quad r = 1, 2, ..., k \tag{3.1}$$

制約条件
$$\sum_{j\in E} X_{ij}\lambda_{aj} = X_{ia} - s_{ia}^- + s_{ia}^+, \quad i \in I_D; a = 1,2,...,n \tag{3.2}$$
$$\sum_{j\in E} X_{ij}\lambda_{aj} = X_{ia} - s_{ia}^-, \quad i \in I_F; a = 1,2,...,,n \tag{3.3}$$
$$\sum_{j\in E} Y_{rj}\lambda_{aj} = Y_{ra} - t_{ra}^- + t_{ra}^+, \quad r = 1,...,k; a = 1,2,...,n \tag{3.4}$$
$$\sum_{j\in E} \lambda_{aj} = 1, \quad a = 1,2,...,n \tag{3.5}$$
$$\sum_{a=1}^{n}(s_{ia}^+ - s_{ia}^-) \leq B_i, \quad i \in I_D \tag{3.6}$$
$$s_{ia}^+ \geq 0, \quad i \in I_D; a = 1,2,...,n \tag{3.7}$$
$$s_{ia}^- \geq 0, \quad i = 1,2,...,m; a = 1,2,...,n \tag{3.8}$$
$$t_{ra}^+ \geq 0, \quad r = 1,2,...,k; a = 1,2,...,n \tag{3.9}$$
$$t_{ra}^- \geq 0, \quad r = 1,2,...,k; a = 1,2,...,n \tag{3.10}$$
$$\lambda_{aj} \geq 0, \quad j \in E; a = 1,2,...,n \tag{3.11}$$

【P1】は k 個の目的関数をもつ多目的線形計画問題である．

3.3. 目的関数の統合

【P1】により，各出力項目の単位を一元化することはできるが，複数の入出力項目の中でどの項目を優先させるかというような，項目間の重要度を決定しなければならない．もちろんこのような情報が得られればそれを用いればよいのであるが，本論文ではそういった情報が直接得られない場合を考え，ミニ・マックス方式で統合することによって複数の目的関数をバランスよく達成することを考える．さらにその上で各出力の増加率の和を最大にすることで，解のパレート最適性を保証する（ε についてはBCCモデルと同様に扱うことができる）．このように【P1】の目的関数を統合すると次の【P2】になる．

【P2】

最大化
$$\alpha + \varepsilon \sum_{r=1}^{k} \beta_r \tag{3.12}$$

制約条件
$$\sum_{j\in E} X_{ij}\lambda_{aj} = X_{ia} - s_{ia}^- + s_{ia}^+, \quad i \in I_D; a = 1,2,...,n \tag{3.13}$$
$$\sum_{j\in E} X_{ij}\lambda_{aj} = X_{ia} - s_{ia}^-, \quad i \in I_F; a = 1,2,...,n \tag{3.14}$$
$$\sum_{j\in E} Y_{rj}\lambda_{aj} = Y_{ra} - t_{ra}^- + t_{ra}^+, \quad r = 1,2,...,k; a = 1,2,...,n \tag{3.15}$$
$$\sum_{j\in E} \lambda_{aj} = 1, \quad a = 1,2,...,n \tag{3.16}$$
$$\sum_{a=1}^{n}(s_{ia}^+ - s_{ia}^-) \leq B_i, \quad i \in I_D \tag{3.17}$$
$$\frac{\sum_{a=1}^{n}(t_{ra}^+ - t_{ra}^-)}{\sum_{a=1}^{n} Y_{ra}} \geq \alpha, \quad r = 1,2,...,k \tag{3.18}$$

$$\frac{\sum_{a=1}^{n}(t_{ra}^{+}-t_{ra}^{-})}{\sum_{a=1}^{n}Y_{ra}}=\beta_r,\quad r=1,2,...,k \tag{3.19}$$

$$s_{ia}^{+}\geq 0,\quad i\in I_D;a=1,2,...,n \tag{3.20}$$

$$s_{ia}^{-}\geq 0,\quad i=1,2,...,m;a=1,2,...,n \tag{3.21}$$

$$t_{ra}^{+}\geq 0,\quad r=1,2,...,k;a=1,2,...,n \tag{3.22}$$

$$t_{ra}^{-}\geq 0,\quad r=1,2,...,k;a=1,2,...,n \tag{3.23}$$

$$\lambda_{aj}\geq 0,\quad j\in E;a=1,2,...,n \tag{3.24}$$

$$\alpha,\beta_r\geq 0,\quad r=1,2,...,k \tag{3.25}$$

ただし,

α : 出力の増加率の最小値

β_r : 出力 r の増加率

である.

【P2】で得られる最適解 β_r^* (第 2 順位の目的関数項) は複数の出力全体の増加率 (α) を最大にした上で，それぞれの出力の増加率の和が最大になるような解となっている.【P2】においても【P1】と同様に，それぞれの項目の増加率に関する問題となっている.

3.4. 資源移動量の考慮

【P2】で求められる解は，もし各 DMU が効率的な運営をおこなうことができるならば，経営者が各 DMU に対して資源を最も有効に配分したときに得られる総産出量の増大率を示している.

しかし，経営者が全ての DMU が効率的な活動をしているとは考えず，実際にはこの増加率 β_r^* は望まない，もしくは望めないと判断する場合が考えられる．また,【P2】の最適解 β_r^* を満たすためには，大規模な (入力) 資源の再配分を必要とする場合もあり，その場合，実際にはそれを実行するような計画は現実的ではない．そこでこのような場合，DMU 群全体の経営者が望む増加率 β_r^{**} ($\beta_r^{**}\leq\beta_r^*$) を決定した後に，各 DMU に対して資源の移動率が少なくなるような経営資源の再配分を考える[3].

投入資源（入力）の数も出力の場合と同様に複数あるので【P2】の方法と同様に，すべての入力項目について再配分する量を抑えるために，資源の移動率を目的関数として用いる．これを定式化すると【P3】のようになる.

【P3】

最小化
$$\xi+\varepsilon\sum_{i\in I_D}\sum_{a=1}^{n}\rho_{ia} \tag{3.26}$$

制約条件
$$\sum_{j\in E}X_{ij}\lambda_{aj}=X_{ia}-s_{ia}^{-}+s_{ia}^{+},\quad i\in I_D;a=1,2,...,n \tag{3.27}$$

$$\sum_{j\in E}X_{ij}\lambda_{aj}=X_{ia}-s_{ia}^{-},\quad i\in I_F;a=1,2,...,n \tag{3.28}$$

$$\sum_{j\in E}Y_{rj}\lambda_{aj}=Y_{ra}-t_{ra}^{-}+t_{ra}^{+},\quad r=1,2,...,k;a=1,2,...,n \tag{3.29}$$

[3]【P2】で得られる β^* をそのまま用いる場合も,【P3】を解くことで資源移動量を考慮した解を得ることができる.

$$\sum_{j\in E}\lambda_{aj}=1,\quad a=1,2,...,n \tag{3.30}$$

$$\sum_{a=1}^{n}(s_{ia}^{+}-s_{ia}^{-})\le B_i,\quad i\in I_D \tag{3.31}$$

$$\frac{\sum_{a=1}^{n}(t_{ra}^{+}-t_{ra}^{-})}{\sum_{a=1}^{n}Y_{ra}}=\beta_r^{**},\quad r=1,2,...,k \tag{3.32}$$

$$\frac{s_{ia}^{-}+s_{ia}^{+}}{X_{ia}}\le\xi,\quad i\in I_D;a=1,2,...,n \tag{3.33}$$

$$\frac{s_{ia}^{-}+s_{ia}^{+}}{X_{ia}}=\rho_{ia},\quad i\in I_D;a=1,2,...,n \tag{3.34}$$

$$s_{ia}^{+}\ge 0,\quad i\in I_D;a=1,2,...,n \tag{3.35}$$

$$s_{ia}^{-}\ge 0,\quad i=1,2,...,m;a=1,2,...,n \tag{3.36}$$

$$t_{ra}^{+}\ge 0,\quad r=1,2,...,k;a=1,2,...,n \tag{3.37}$$

$$t_{ra}^{-}\ge 0,\quad r=1,2,...,k;a=1,2,...,n \tag{3.38}$$

$$\lambda_{aj}\ge 0,\quad j\in E;a=1,2,...,n \tag{3.39}$$

$$\xi,\rho_{ia}\ge 0,\quad i=1,2,...,m \tag{3.40}$$

ただし,

ξ : 移動率の最大値
ρ_{ia} : DMU_a の入力 i の移動率
β_r^{**} : 出力 r の増加率（定数）

である.

【P3】を解くことにより DMU_a の改善目標 ($\overline{X_{ia}}$, $\overline{Y_{ra}}$; $i=1,2,\ldots,m$; $r=1,2,\ldots,k$) を次のように得ることができる.

$$\overline{X_{ia}^{*}}=X_{ia}-s_{ia}^{-*}+s_{ra}^{+*},\quad i\in I_D \tag{3.41}$$

$$\overline{X_{ia}^{*}}=X_{ia}-s_{ia}^{-*},\quad i\in I_F \tag{3.42}$$

$$\overline{Y_{ra}^{*}}=Y_{ra}-t_{ra}^{-*}+t_{ra}^{+*},\quad r=1,2,...,k \tag{3.43}$$

3.5. 総投入量削減を考慮したモデル

これまでは産出 (出力) に注目した再配分問題に注目してきたが, 総産出量を増大することよりもまずコストなどの総投入量を削減することを考えなければならない場合も多い. そこで, 先に述べた産出量増大モデル (【P2】) と同様の考え方で DMU 群全体に対する投入量削減モデルを【P4】に示す.

【P4】

最大化 $$\gamma+\varepsilon\sum_{i\in I_D}\delta_i \tag{3.44}$$

制約条件 $$\sum_{j\in E}X_{ij}\lambda_{aj}=X_{ia}-s_{ia}^{-}+s_{ia}^{+},\quad i\in I_D;a=1,2,...,n \tag{3.45}$$

$$\sum_{j\in E}X_{ij}\lambda_{aj}=X_{ia}-s_{ia}^{-},\quad i\in I_F;a=1,2,...,n \tag{3.46}$$

$$\sum_{j\in E} Y_{rj}\lambda_{aj} = Y_{ra} - t_{ra}^{-} + t_{ra}^{+}, \quad r=1,2,...,k; a=1,2,...,n \tag{3.47}$$

$$\sum_{j\in E} \lambda_{aj} = 1, \quad a=1,2,...,n \tag{3.48}$$

$$\sum_{a=1}^{n} (t_{ra}^{-} - t_{ra}^{+}) \geq O_r, \quad r=1,2,...,k \tag{3.49}$$

$$\frac{\sum_{a=1}^{n}(s_{ia}^{-} - s_{ia}^{+})}{\sum_{a=1}^{n} X_{ia}} \geq \gamma, \quad i \in I_D \tag{3.50}$$

$$\frac{\sum_{a=1}^{n}(s_{ia}^{-} - s_{ia}^{+})}{\sum_{a=1}^{n} X_{ia}} = \delta_i, \quad i \in I_D \tag{3.51}$$

$$s_{ia}^{+} \geq 0, \quad i \in I_D; a=1,2,...,n \tag{3.52}$$

$$s_{ia}^{-} \geq 0, \quad i=1,2,...,m; a=1,2,...,n \tag{3.53}$$

$$t_{ra}^{+} \geq 0, \quad r=1,2,...,k; a=1,2,...,n \tag{3.54}$$

$$t_{ra}^{-} \geq 0, \quad r=1,2,...,k; a=1,2,...,n \tag{3.55}$$

$$\lambda_{aj} \geq 0, \quad j \in E; a=1,2,...,n \tag{3.56}$$

$$\gamma, \delta_i \geq 0, \quad i=1,2,...,m \tag{3.57}$$

ただし,

γ : 入力の削減率の最小値
δ_i : 入力 i の削減率
O_r : 出力 r の総産出量の増減量

である.

【P4】は現状の総産出量を維持したまま DMU 群全体の総投入量の最小化を目指した問題である. 各入力項目の総投入量の最小化をおこなうため, 出力の場合と同様, 単位を一元化するために投入量の削減率を目的関数として用いる. これにより【P4】では, まず総投入量の削減率の最小値を最大化している. この場合の資源の再配分案は【P4】を解いた後,【P3】と同様のモデルにより得られる. ただし, 経営者が望む δ_i^{**} を与えた上で (3.32) 式を (3.51) 式に書き換える.

4. 数値例

ある石油会社のサービス・ステーション (S.S.) の 11 の店舗を分析対象の DMU とする. これら 11 の店舗を統括している経営者が, 店舗全体の売上高を最も大きくするように従業員の再配置を考える.

入力項目として敷地面積, 有効通行量, 従業員数を, 出力項目として主部門及び副部門の売上高を取り上げる (表 2). 敷地面積は各 S.S. の有する面積であり, 有効通行量は各 S.S. に入ってくる可能性のある乗用車と商業車の単位時間あたりの接面道路通行量, 従業員は一日当たりの延べの従業員の数である. 主部門の売上高 (表中では「主部門」と表記) はガソリン, 軽油, 灯油, 潤滑油などの石油類の販売売上高である. 副部門の売上高 (表中では

表 2: 入出力データ

DMU	入力項目 敷地面積(百 m^2)	有効通行量(台)	従業員数(人)	出力項目 主部門(百万円)	副部門(百万円)
A	16.08	30.0	11.00	8.470	1.432
B	5.05	32.2	5.00	2.477	0.450
C	2.41	27.7	7.00	3.399	0.561
D	3.86	30.0	5.00	1.855	0.210
E	7.00	22.1	4.00	3.039	0.438
F	7.00	35.0	8.00	2.590	0.481
G	5.09	27.6	10.00	5.358	0.441
H	8.73	17.6	4.00	2.707	0.527
I	8.96	18.1	4.00	2.836	0.099
J	2.00	11.0	2.00	1.032	0.036
K	7.50	17.0	3.00	0.943	0.080
合計	73.68	268.3	63.00	34.707	5.058

「副部門」と表記) には洗車などのトータル・アクセサリー，ワックスなどのカー・アクセサリー，損害保険代行業収入などが含まれる．また各 S.S. の環境を考慮し，入力項目のうち敷地面積と有効通行量は制御不能項目とする．

ここではまず，図的に説明することも含めて出力項目が 1 つの場合について S.S. の総従業員数を維持したまま総売上高をできるだけ増大させる改善案と，総売上高を維持したまま総従業員数をできるだけ削減するような改善案について示す．そしてさらに出力項目が 2 つの場合について示す．

4.1. 出力項目が 1 つの場合

まず表 2 のすべての入力項目と出力項目として主部門の売上高を用いて分析をおこなう．ただし，従業員数と目標売上高の増減量に関しては何ら制限を加えないこととする．

【LPDI-BCC】による効率値は表 3 のようになる．

表 3: 【LPDI-BCC】による効率値 (1 出力の場合)

DMU	効率値	DMU	効率値
A	1.000	G	1.000
B	0.794	H	0.963
C	1.000	I	1.000
D	0.654	J	1.000
E	1.000	K	0.463
F	0.524		

表 2 のデータにもとづき，【LPDI-BCC】から得られる改善目標と産出量増大モデルにより得られる解は表 4 のようになる．また提案モデルから得られる各 S.S. への従業員の配置と目標売上高を図 3 に示す．ただし，制御不能項目である敷地面積と有効通行量が元データより減少しているが，制御不能項目について各 DMU の位置によってはそのままでは参照できる効率的フロンティアが求められないためである．

次に投入量削減モデル【P4】を適用して総従業員数の削減する場合について示す．ここでは入力最小化モデル【LPDO-BCC】と提案モデルとを比較する．結果を表 5 に示す．また提案モデルから得られるそれぞれの S.S. へ配置される従業員数と目標売上高の関係を図 4 に示す．

表 4: 売上高の増大を目指した改善目標 (1出力の場合)

	【LPDI-BCC】による改善目標				提案モデルによる改善目標			
DMU	敷地面積	有効通行量	従業員数	主部門	敷地面積	有効通行量	従業員数	主部門
A	16.08	30.00	11.00	8.470	16.08	30.00	11.00	8.470
B	5.05	18.70	5.00	3.120	5.05	26.31	7.23	2.477
C	2.41	27.70	7.00	3.399	2.41	19.60	4.62	3.399
D	3.86	19.68	5.00	2.837	3.86	13.51	3.19	1.855
E	7.00	22.10	4.00	3.039	7.00	21.77	6.38	3.039
F	7.00	27.30	8.00	4.946	7.00	19.20	5.62	2.590
G	5.09	27.60	10.00	5.358	5.09	27.60	7.62	4.320
H	8.29	17.60	4.00	2.810	6.89	17.60	5.13	3.616
I	8.96	18.10	4.00	2.836	7.26	18.10	5.36	3.812
J	2.00	11.00	2.00	1.032	2.00	11.00	2.00	1.032
K	4.50	16.55	3.00	2.035	6.45	17.00	4.84	3.381
合計	70.24	236.33	63.00	39.883	69.09	221.69	63.00	41.177

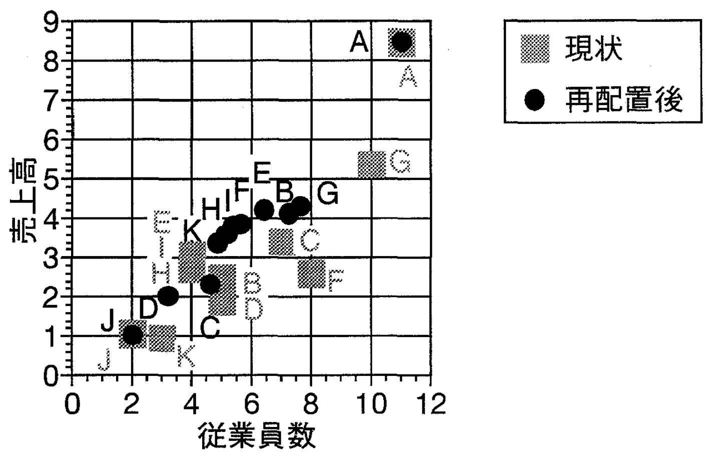

図 3: 従業員数の配置と目標売上高（産出量増大モデル）

表 5: 従業員数の削減を目指した改善目標（1出力の場合）

	【LPDO-BCC】による改善目標				提案モデルによる改善目標			
DMU	敷地面積	有効通行量	従業員数	主部門	敷地面積	有効通行量	従業員数	主部門
A	16.08	30.00	11.00	8.470	16.08	30.00	11.00	8.470
B	5.05	16.26	3.64	2.477	5.05	15.24	3.92	2.626
C	2.41	27.70	7.00	3.399	2.41	11.55	2.26	1.249
D	3.86	14.60	2.89	1.855	3.86	15.13	2.74	1.779
E	7.00	22.10	4.00	3.039	7.00	22.10	4.00	3.039
F	5.88	19.61	3.55	2.590	7.00	22.10	4.00	3.039
G	5.09	27.60	10.00	5.358	5.09	15.17	3.98	2.665
H	8.46	17.60	3.86	2.707	6.89	17.60	5.13	3.616
I	8.96	18.10	4.00	2.836	7.26	18.10	5.36	3.812
J	2.00	11.00	2.00	1.032	2.00	11.00	2.00	1.032
K	2.00	11.00	2.00	1.032	6.45	17.00	4.84	3.381
合計	66.79	215.57	53.94	34.796	69.09	194.99	49.23	34.707

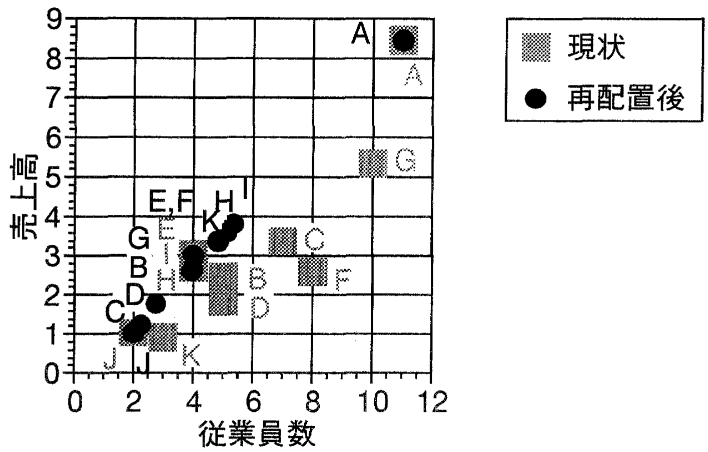

図 4: 従業員数の配置と目標売上高（投入量削減モデル）

総産出増大を目指した改善目標では，従来の BCC モデルでは DMU 群全体で 14.9% 売上を増大させる目標になるのに対して，提案モデルを用いると 18.6% 売上高目標を増大させることができる．また総従業員数を削減する場合には，従来の BCC モデルでは DMU 群全体で 14.4% の削減になるのに対して，提案モデルを用いると 21.9% 削減することができる．

4.2. 出力項目が 2 つの場合

次に主部門の売上高と副部門の売上高を出力項目として産出量増大モデルを用いて分析する．まず,【LPDO-BCC】によって効率値を求めると表 6 のようになる．

表 6: 【LPDI-BCC】による効率値（2 出力の場合）

DMU	効率値	DMU	効率値
A	1.000	G	1.000
B	0.955	H	1.000
C	1.000	I	1.000
D	0.654	J	1.000
E	1.000	K	0.463
F	0.585		

【LPDO-BCC】と産出量増大モデルにより得られる出力の改善目標を表 7 に示す.

DMU 群全体で従来の BCC モデルでは，主部門，副部門でそれぞれ 13.3 %, 8.1 % 売上を増大させる目標となるのに対して，提案したモデルではそれぞれ 20.9%, 22,8% の増大を見込むことができる．

このように，経営者が管理者に出力の増加を求めるか，投入資源を一方的に削減する従来の DEA モデルによる改善案よりも，提案モデルを用いる方が DMU 群全体にとって有効に経営資源を用いるような改善案を得ることができる．また制御不能項目を考慮した DEA モデルと同様に容易に環境条件などの制御不能項目を考慮することができる．

表 7: 2出力の場合の改善目標 (産出量増大モデル)

【LPDI-BCC】による改善目標					
DMU	敷地面積	有効通行量	従業員数	主部門	副部門
A	16.08	30.0	11.00	8.470	1.432
B	5.05	32.2	5.00	2.763	0.471
C	2.41	27.7	7.00	3.399	0.561
D	3.86	30.0	5.00	2.837	0.406
E	7.00	22.1	4.00	3.039	0.438
F	7.00	35.0	8.00	4.887	0.823
G	5.09	27.6	10.00	5.358	0.441
H	8.73	17.6	4.00	2.707	0.527
I	8.96	18.1	4.00	2.836	0.099
J	2.00	11.0	2.00	1.032	0.036
K	7.50	17.0	3.00	2.036	0.237
合計	73.68	268.3	63.00	39.363	5.470
提案モデルによる改善目標					
DMU	敷地面積	有効通行量	従業員数	主部門	副部門
A	9.91	28.7	10.44	6.723	0.876
B	5.05	22.8	4.24	2.972	0.500
C	2.41	19.5	5.73	2.915	0.363
D	3.86	22.6	3.89	2.531	0.425
E	7.00	13.2	4.81	3.696	0.625
F	7.00	13.2	4.81	3.696	0.625
G	5.09	27.6	8.72	4.810	0.564
H	8.73	17.6	6.04	4.474	0.670
I	8.96	18.1	6.16	4.554	0.673
J	2.00	11.0	3.45	1.417	0.221
K	7.50	15.6	4.70	4.186	0.667
合計	67.51	198.0	63.00	41.973	6.209

5. おわりに

本論文では，規模の変化に対して収穫可変型の生産関数を仮定した BCC モデルの効率的フロンティアを利用して，限られた資源投入量のもとで DMU 群全体の産出量を最大化するモデル，及び現状の総産出量を維持したまま DMU 群の総投入量の最小化する改善案を導出するモデルを提案した．

ここではまず，現在おこなわれている産出量の総和に対する増加量の総和という形で複数の目的関数を統合した．さらに各 DMU の改善目標を効率的フロンティア上の任意の点に求めることで，各出力の総和の増加率を最大にするようなモデルを示した．その上で DMU 群全体の各出力の総和を増加率を決定し入力値の組み合わせを求めた．

しかし，多くの制御不能項目を考慮した改善案では，制御不能項目に関しても削減する必要があるような改善目標を示すことがある．これは DEA の効率的フロンティアが実在する活動によって作られるため，制御可能項目をどのように変化させても制御不能項目を固定にしたままでは改善目標を得ることが出来ないためである．これは従来の DEA モデルにもある問題だが，例えば CFA (Constrained Facet Analysis) [4] を用いて DMU の存在する領域の外側に効率的フロンティアを延長することにより解決できるのではないかと考えられる．

混合案からの選択問題では各独立案の中に有限個の排反案を設定して，その中から案を選択するが，本論文では効率的フロンティア全体を連続した排反案としてとらえた．実際に

はいくつかの案の中から選択する方が現実的であると考えられるが，効率的フロンティア上のいくつかの点を排反案として選び，その中から良い案を選択するようなモデルを考えることも今後の課題である．

また制御不能項目とするだけでは表すことのできない，各 DMU の許容しうる入出力項目の増減量の限界について考慮することも重要であると考えられる．

参考文献

[1] P. Andersen and N.C. Petersen: A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*, **39** (1993) 1261–1264.

[2] R.D. Banker, A. Charnes and W.W. Cooper: Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, **30** (1984) 1078–1092.

[3] R.D. Banker and R.C. Morey: Efficient analysis for exogenously fixed input and output. *Operations Research*, **34** (1986) 513–521.

[4] A. Bessent, W. Bessent and J. Elam: Efficiency frontier determination by constrained facet analysis. *Operations Research Society for America*, **36** (1988) 785–796.

[5] A. Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes: Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, **2** (1978) 429–444.

[6] A. Charnes, W.W. Cooper, A.Y. Lewin and L.M. Seiford (eds.): *Data Envelopment Analysis, Theory, Methodology and Applications* (Kluwer Academic Publishers, 1994).

[7] W.D. Cook, M. Kress and L.M. Seiford: Priorization models for frontier decision units in DEA. *European Journal of Operational Research*, **59** (1992) 319–323.

[8] 伏見多美雄, 福川忠昭, 山口俊和: 経営の多目標計画 －目標計画法の考え方と応用例－ (森北出版, 1989).

[9] M.H. Goedhart and J. Spronk: An interactive heuristic for financial planning in decentralized organizations. *European Journal of Operational Research*, **86** (1995) 162–175.

[10] B. Golany, F.Y. Phillips and J.J. Rouseau: Models for improved effectiveness based on DEA efficiency results. *IIE Transactions*, **25** (1993) 2–9.

[11] B. Golany and E. Tamir: Evaluating efficiency–effectiveness–equality trade-offs: a data envelopment analysis approach. *Management Science*, **41** (1995) 1172–1184.

[12] N. Hibiki: An alternative approach to the DEA sensitivity analysis of efficient and inefficient DMUs with respect to changes in the reference set. 1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集 (日本オペレーションズ・リサーチ学会, 1997) 128–129.

[13] L.M. Seiford: A bibliography of data envelopment analysis. *Technical Report, Department of Industrial Engineering and Operations Research, University of Massachusetts* (University of Massachusetts, 1994).

[14] 千住鎮雄, 伏見多美雄: 経済性工学の基礎 (日科技連出版社, 1982).

[15] 千住鎮雄, 伏見多美雄: 経済性工学の応用 (日科技連出版社, 1983).

[16] 千住鎮雄, 伏見多美雄, 藤田精一, 山口俊和: 経済性分析 (日本規格協会, 1979).

[17] S. Senju, T. Fushimi and S. Fujita: *Profitability Analysis for Managerial and Engineering Decisions* (Asian Productivity Center, 1989).

[18] T. Sueyoshi: DEA pricing system. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **40** (1997) 220–235.

[19] 末吉俊幸: DEA に基づく限界費用価格形成: NTT 電話基本料金に関する一考察. オペレーションズ・リサーチ, **40** (1995) 701–705.

[20] 杉山学, 山田善靖: 事業体間の相互評価情報を用いた調和的な効率性評価法. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **39** (1996) 159–175.

[21] 刀根 薫: 企業体の効率性分析 －DEA 入門－ (1)-(5). オペレーションズ・リサーチ, **32** (1987) 800–803, **33** (1988) 45–48, 95–99, 150–151, 191–198.

[22] 刀根 薫: 経営効率性の測定と改善 －包絡分析法による－ (日科技連出版社, 1993).

[23] K. Tone: An ε-free DEA and new measure of efficiency. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **36** (1993) 167–174.

[24] 王志偉, 長沢啓行, 西山徳幸: 分権システムにおける 2 階層線形計画問題の一解法. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **38** (1995) 345–354.

生田目　崇
東京理科大学
工学部 経営工学科
〒 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3
E-mail: namatame@ms.kagu.sut.ac.jp

ABSTRACT

RESOURCE ALLOCATION PROBLEM BASED ON THE DEA MODEL

Ryuichi Ito — *Sony Corporation*
Takashi Namatame, Toshikazu Yamaguchi — *Science University of Tokyo*

In this paper, we propose a method for the resource allocation problems based on data envelopment analysis (DEA).

When we consider this problem for the organization such as the large corporation, we should recognize that there are two management levels in the organization, the *operator* of each section (for example, the branch office or DMU), and the *manager* of the organization. Each operator is concerned with the performance and the efficiency of his own section. On the other hand, the manager is concerned with those in all of the organization.

Generally, the management resource allocation problem with the plural sections can be treated as a selection problem from the mixed proposals in profitability analysis (the reader can be refered to, e.g., Senju et al. (1989) for its details). The management resource means, for example, manpower or material. The selection problem from the mixed proposals is to choose a plan independently from among several mutually exclusive proposals for each section so as to maximize the return of the organization. However, there are some problems in this method such as how to estimate the return of each proposal and how to consider the present activity level of the section if the manager wants to re-allocate his holding resources.

To solve these problems, we use the concept of production possibility set of DEA-BCC model. First, we measure the efficiency of the present activity of each section (DMU). Next, we reallocate our holding management resources to obtain the maximum outputs, by considering the present activity of the DMU, where we assume that the efficient frontier of DEA is the mutually exclusive proposals of each DMU.

Moreover, we propose another model by which we can save the ammount of input resources for the DMUs.