

フラクタル時系列の予測手法を用いた株価予測とその応用

池田欽一 時永祥三
九州大学

(受理 1997 年 7 月 4 日 ; 再受理 1998 年 9 月 3 日)

和文概要 本論文では、まずフラクタル性をもつ時系列のインパルス応答関数をスケール関数により近似的に展開した場合に、時間軸方向にインパルス応答を伸長することにより予測が行える原理について説明し、予測誤差などについて整理する。次に、フラクタル性をもつ時系列について、フラクタル次元が未知である場合に、時系列をウェーブレット変換係数から計算できる方法を整理する。これらを現実の株価時系列へと適用して、株価予測誤差の検討、フラクタル性、その次元推定について述べる。具体的な応用例として株価のオプション取引のシミュレーションをとりあげ、本論文の予測手法とこれに基づくオプション戦略の有効性について示している。

1. はじめに

時系列や図形などの一部分を拡大、縮小した場合に同じような形状をもつ相似形が出現する性質(自己相似性)を説明するフラクタル理論が展開されている。フラクタル理論は、物理化学現象など自然現象の解明、信号処理、図形符号化など工学分野をはじめ、さまざまに応用がなされている [5][6]。しかし、現在まで、時間の伸長によってもスペクトルの性質が変わらないなどフラクタル性の説明は数多くなされているが、これを積極的に予測に応用した例はない。

本論文では、まず 2. においてフラクタル性をもつ時系列のインパルス応答関数をスケール関数により近似的に展開した場合に、時間軸方向にインパルス応答を伸長することにより予測が行える原理について説明し [7],[8],[9]、さまざまなフラクタル次元の時系列に適用した場合の誤差などについて整理する。3. では、フラクタル性をもつ時系列について、フラクタル次元が未知である場合に、時系列のウェーブレット変換係数から計算できる方法を整理する [3],[4],[10],[11]。4. では、与えられた株価時系列がフラクタル性をもっているかどうかの検証、および次元を推定の結果について述べる。5. では、具体的な応用例として日本の証券市場における日々の株価予測と株価のオプション取引のシミュレーションをとりあげ、本論文の予測手法とこれに基づく戦略の有効性について示している [1],[7]。

2. フラクタル性をもつ時系列の予測手法

2.1. スケール関数による近似

まず、入出力が同じ時系列である予測問題を考える [4],[5]。時刻 t_0 までの値を入力として用いて、時刻 t の値 ($x(t)(t > t_0)$) を出力として予測する次式を考察する。

$$\tilde{x}(t) = \int_0^{t_0} h(t, t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad t > t_0. \quad (2.1)$$

線形時変システムのインパルス応答関数 $h(t, \tau)$ がスケール関数 $\phi(t)$ を用いて次のように展開されると仮定する。

$$h(t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_{ij} \phi_{Ni}(t) \phi_{Nj}(\tau). \quad (2.2)$$

ただし,

$$\phi_{ij}(t) = \phi(2^i t - j). \quad (2.3)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.4)$$

なお, この予測式は, 後述するように時間軸を伸長することにより観測されていない値を予測するのに用いる. そのためには, 式 (2.1) に含まれるパラメーターを求めておく必要があるが, それは, すでに観測されている時系列を用いて行なう. すなわち, 全時系列が観測されていると仮定し, 時刻 t_0 までの入力を用いて式 (2.1) の予測値 $\tilde{x}(t)$ ができるだけ $x(t)$ に近くなるようにパラメーターを決定する (学習プロセス). また, このような式を一般の線形時不変予測と区別するため線形時変予測式とよんでおく.

これを, 実際の計算に用いる場合, 以下のように変形する. 以下では, 時系列のサンプリング間隔を 1 としておく. また, $N=0$ とし, j の範囲を B とする. スケール関数の性質を用いると, 式 (2.1) は次のようになる. ただし, わかりやすくするため, $t=n$ とおく.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^B \int_0^{t_0} h_{ij} \phi(n-i) \phi(n-j-\tau) x(\tau) d\tau \\ &= \sum_{j=1}^B h_{n-1j} \theta(n-j). \end{aligned} \quad (2.5)$$

ただし,

$$\theta(k) = \int_{k-1}^k x(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

$$t_0 = n - 1 \geq B. \quad (2.7)$$

いま, 式 (2.1) による予測値 $\tilde{x}(t)$ と入力時系列 $x(t)$ との差の最小 2 乗近似を考え, これを最小化するようにインパルス応答関数の係数 h_{ij} を決定する. このときの h の変更量 Δh は,

$$\Delta h_{n-1j} = -2(x(n) - \tilde{x}(n))\theta(n-j). \quad (2.8)$$

計算にあたり, 式 (2.2) で, j の範囲 (B) を $j=1 \sim 4$ に限定する. なお, このように N, j の値を選択する理由は次のようにまとめられる. あとで述べているように, 時系列は時間間隔 1 でサンプリングして用いるので, $N=0$ とすれば時系列のサンプリング間隔と式 (2.3) において関数が 1 をとる区間が一致する. $N=0$ でない場合には, サンプル値を部分的に用いるか, あるいは逆に補間をして用いることになるので, サンプル値を無駄に用いるか, 再計算が必要となり不都合である. また, $j=1 \sim 4$ としているのは, システム出力に影響する入力を現在時刻から 4 時刻さかのぼった値までに制限することにより, 予測の精度をあげることを目的としている. 一般のたたみこみ積分では, j は無限個となるが, ここでは線形予測システムを構成することが目的であり, 種々の実験の結果, $j=1 \sim 4$ が最適であったので, これを用いる. 以上のように, 式 (2.1) は線形の予測式となっており, $1 < \tau < 5$ 以外では入力は出力に影響を与えず, 簡単にいえば, 過去 4 サンプルまでを用いて時系列を予測する. 最適化の方法として最急降下法を用いているが本論文で考察する問題の範囲では誤った解への局所的な収束の問題はない. 式 (2.4) を用いて観測値と予測値の 2 乗誤差を最小化する場合のしきい値は 10^{-4} に選び, 推定値が得られるまでの繰り返し回数は平均して 20000 ステップである.

2.2. 時間軸の伸長による予測

いま, $T_s \leq t \leq T_e$ は式 (2.2) のインパルス応答の推定を行なう区間であり, $T_1 = T_e - T_s$ とする. また, $0 < t \leq T_2$ は T_1 で計算されたインパルス応答を用いて $x(t)$ を予測する区間とする.

すなわち, T_1 は自己相似となる基本図形が含まれる時間間隔であり, この区間はあらかじめ時系列が観測されており, 式 (2.1) における観測値と予測値との関係が成立するようにインパルス応答関数の計算が行われる区間である. これに対して区間 T_2 (その一部には T_1 が含まれる) では, 時系列のフラクタル的な性質により T_1 の基本図形が複数個 (例えば b 個) 含まれる区間であり, T_1 で計算したインパルス応答関数を b 倍に伸長して時系列の観測値と予測値との関係に適用できる区間である. すなわち, T_1 の中の基本図形のインパルス応答の中にも b 個分の相似形に対応するインパルス応答が含まれると仮定している.

区間 T_2 には未知のデータがあるので, インパルス応答関数により結ばれる観測値と予測値の関係を用いて値を予測することができる.

以下では, 予測値と観測値の一致を確認するため, $0 \leq t \leq T_2$ の $x(t)$ は観測されていると仮定する. 次の量を定義する.

$$b = a^D, \quad a = T_2/T_1, \quad T_2 > T_1. \quad (2.9)$$

D は時系列 $x(t)$ のフラクタル次元であり, $1 < D < 2$ である. $x(t)$ がフラクタル性を持つ場合には, その統計的自己相似性 (アフィン性) により, $0 < t \leq T_2$ において, 次の式が近似的に成立する. この理由についてはのちほど述べる.

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{b} \int_0^{bt_0} h\left(\frac{t}{b}, \frac{t-\tau}{b}\right) x(\tau) d\tau, \quad t > bt_0 \quad (2.10)$$

インパルス応答の同定の場合と同様に, 式 (2.10) を分かりやすく表現すると, 次のようになる.

$$\tilde{x}(nb) = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^B h_{n-1j} \Theta(n-j). \quad (2.11)$$

但し,

$$\Theta(n) = \int_{(n-1)b}^{nb} x(\tau) d\tau. \quad (2.12)$$

ここで分かるように, スケール伸長を用いた予測値は b ごとに得られる値となる.

計算においては, $a = \text{整数}$ となるように T_1, T_2 を選んでいる (例: $T_2 = 2T_1$). また, 非整数時点の $x(t)$ は線形補間によって求めている.

以下では, 式 (2.10) が近似的に成り立つ理由を述べている. 本手法を用いてフラクタル時系列を予測する場合, 基本的な性質としてコッホ曲線に見られる自己相似の性質を利用する. すなわち, 時系列はフラクタル的なひろがりを持っていると仮定し, 自己相似の関係にあるフラクタルの基本図形の存在する時間間隔を T_1 とし, $T_2 = aT_1$ の時間間隔には b 個数のフラクタル図形が入ることになる.

なお, 式 (2.10), (2.11) は理論式ではなく, 多くのシミュレーション実験を繰り返して得られた結果から得たものであり, 経験的に成立するものである. すなわち, フラクタル時系列においては, 時間軸を c 倍した場合に, その自己アフィン性により伸長された時間域で振幅を c^H 倍した時系列ともとの時系列とが同じ統計的な性質をもつことが知られている. しかし, この場合, c をいくつにとれば最適な拡大縮小の関係になるかは分かっていない. そこでシミュレーションによる数値実験を繰り返して推測した結果, 本論文で示しているように, a 倍の時間間隔に個数 b の縮小図形が入ると仮定した場合が, 最も良好な予測を与えることが分かった. これは, コッホ曲線に見い出される相似性次元と同じ性質であると言える.

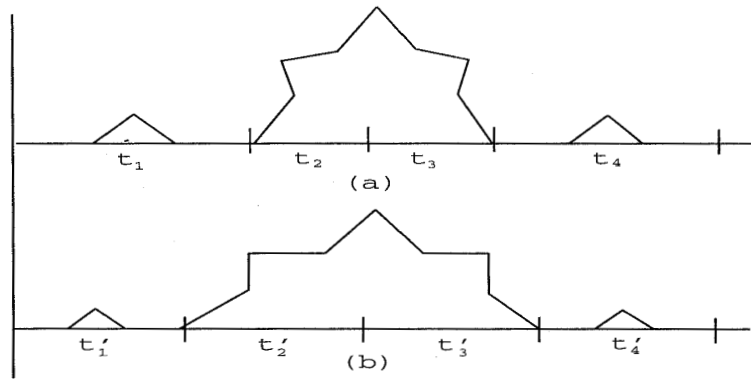


図 1: コツホ曲線

いま、図 1(a) のようなコツホ曲線を考察する。しかし、コツホ曲線はいたるところで無限に多価となっているので、厳密な時系列とはなり得ないので、理論の概念的な説明のみを与えるものである。図では、 $a = T_2/T_1 = 3, b = 4$ となっている。 T_2 の区間には区間 T_1 の図形が 4 個入っている。4 つの相似図形のはいつている時間間隔を図のように t_1, t_2, t_3, t_4 とすると、 $t_1 = t_4 = 1, t_2 = t_3 = 0.5$ となる。それぞれの相似形のなかでは、同じインパルス応答関数で時系列の関係が記述できると仮定すると、 $t_1 (= T_1)$ で計算したインパルス応答関数は t_2, t_3, t_4 でも利用できる。しかし、 t_2, t_3 の長さは t_1, t_4 の半分であり、正確には、 t_2, t_3 にインパルス応答関数を適用する場合には、 t_1 で計算したインパルス応答関数のサンプリング間隔を 2 倍にする必要がある。しかし、現実には、時刻のサンプリングを途中で変更する計算は面倒であることや、特に時系列の場合にはコツホ曲線のようなはっきりした自己相似の関係が必ずしも見られず、 $t_1 \sim t_4$ の区分があいまいとなることなどを考慮する必要がある。従って、時系列の全区間において用いる時刻のサンプリング間隔を途中で変更しないもとし、この値を、図 1(a) の $t_1 \sim t_4$ において実施するサンプリング間隔の平均とすると、変更後の $t_1 \sim t_4$ の長さは

$$t'_1 = t'_2 = t'_3 = t'_4 = 3/4 = 0.723 \tag{2.13}$$

となる。この様子を図 1(b) に示している。図 1(b) では $t'_1 \sim t'_4$ の長さを式 (2.13) のように仮定した場合の相似形の存在位置の出現位置を示している。この図は当然、図 1(a) における相似形の配置とずれているが、すでに述べたように、時系列ではこのような相互の位置関係のずれの存在が明確ではないこと、計算を簡略化する必要があることなどから、本論文では図 1(b) の相互関係を仮定している。以上のような仮定のもとでは、

$$(t'_1 + t'_2 + t'_3 + t'_4)/t'_1 = 4 = b \tag{2.14}$$

となるので、式 (2.1) に示す時系列の予測式を時間軸にそって b 倍だけ時間伸長すればよいので、式 (3.3) の近似計算の式がなりたつ。

予測を議論する場合には、通常、現在までの観測データをもとにして、1 ステップ先のサンプルの予測値を計算することが行われる。これを、以下では b 時刻先の予測とよぶ。

これに対して、式 (2.11) に従って、逐次的に予測された値を観測値と見なして、予測を継続していく場合を考え、これにより n ステップ将来の値を予測する場合を nb 時刻先の予測とよんでおく。 nb 時刻先の予測においてもインパルス応答が計算されているので、線形予測をそのまま継続して用いる場合になどと比較して、予測誤差は極めて小さいものとなる。また、現在の時刻から離れた時刻の予測値を得ることができるので、株式投資におけるオプションの設定などに利用できる。

図 2 にはブラウン運動の非整数階積分 [6] に基づき、プログラムにより発生させたフラクタル時系列 fBm (fractional Brownian motion) の予測の様子を示している。ここで、 $T_s =$

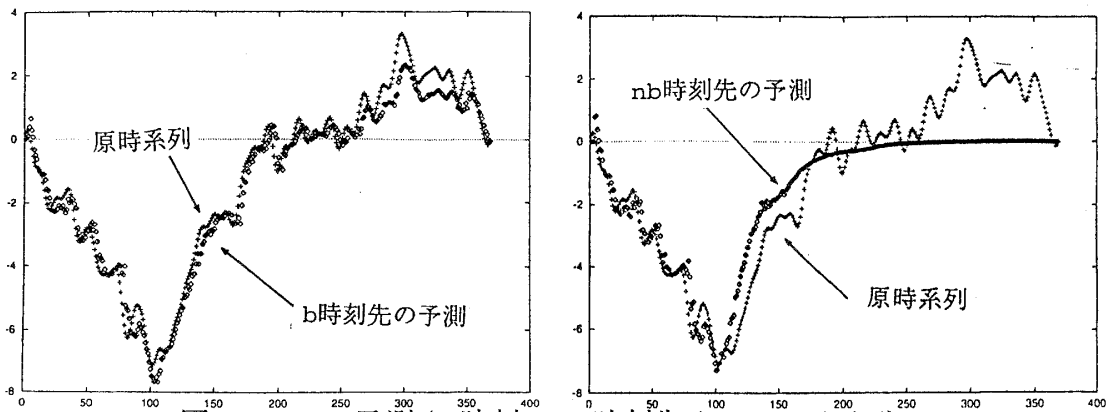


図 2: fBm の予測 (b 時刻, nb 時刻先 (step100 から先))

147, $T_e = 656$, $T_2 = 1018$, $b = 2.83$ である.

2.3. シミュレーションによる予測誤差の検討

以下では, 式 (2.11) を用いた b 時刻先の予測, nb 時刻先の予測の誤差について, シミュレーションによる検討結果をまとめておく. フラクタル時系列データは fBm として発生させておき, 時系列データのサンプル数 K は, $K = 500, 1000$ とする.

まず, 表 1 には b 時刻先の予測について, いくつかのフラクタル次元の時系列の平均予測誤差 (100 系列発生させた時系列に対する予測誤差の平均) を示している. 予測誤差の定義として, 期間内の時系列の最大値と最小値の差 (振幅) に対する予測誤差の割合 (%) をとっている. これより分かるように, $a = 2$ の場合には 0.3% 程度, $a = 3$ の場合には 0.4% 程度の数値となっている.

なお, 本手法による予測誤差の精度を比較するために, 線形時不変予測を行なった結果についても表 2 に合わせて示している. 線形時不変予測では, 予測誤差が 8% 程度となっており, 本手法による予測よりかなり大きな値となっている.

次に, 表 3 に nb 時刻先の予測について予測誤差の平均値を示している. この結果が示すように nb 時刻先の予測についても誤差は 6% 程度におさまっている.

線形時不変予測を行なった結果について表は省略しているが, 本手法による予測と比較して誤差は極めて大きく, 例えば, $nb = 45$ において平均予測誤差は 20% 程度となっている.

このシミュレーションにおいて, インパルス応答の計算区間の始点 T_s の決定には t_s を $0 \sim T_2 - T_1$ の範囲から適当に選び, その T_s から T_e までの信号 $x(t)$ の振幅を 1 に基準化したものと, $0 \sim T_2$ の間の $x(t)$ の振幅を 1 に基準化したものをを比較し, 差の 2 乗誤差がもっと小さくなる T_s を採用した.

表 1: 線形時変予測 (本手法) の b 時刻先の予測誤差

		K=500				K=1000	
a=2	次元 D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50	1.25
	予測誤差	0.32	0.19	0.13	0.25	0.19	0.17

表 2: 線形時不変予測の b 時刻先の予測誤差

		K=500				K=1000	
a=2	次元 D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50	1.25
	予測誤差	10.1	9.1	7.6	9.7	8.4	8.8

表 3: 線形時変予測 (本手法) の nb 時刻先の予測誤差

		nb=20			nb=35		
a=2	次元 D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50	1.25
K=1000	予測誤差	4.1	3.7	3.3	5.1	4.9	4.6
		nb=45			nb=60		
a=2	次元 D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50	1.25
K=1000	予測誤差	5.7	5.2	4.9	6.1	5.6	5.1

3. フラクタル性と次元の推定

3.1. フラクタル時系列のウェーブレット変換

次に、フラクタル時系列のパラメーターをウェーブレット変換を用いて推定する方法について述べる。時系列がフラクタル性をもつ場合には、そのスペクトルの時間平均が周波数のべき乗に反比例する性質を持つことが証明されている [8][9][10][11]。すなわち、時系列の分散、フラクタル次元を、それぞれ、 σ^2, D とするとスペクトルは次のようになる。

$$S(\omega) = \sigma^2 \omega^{-\gamma}, \quad (3.1)$$

$$\gamma = 5 - 2D. \quad (3.2)$$

ここで、 ω は角周波数であり、時系列に含まれる周波数を f とすると、 $\omega = 2\pi f$ で与えられる。与えられた時系列 $x(t)$ をウェーブレット変換する。

$$x(t) = \sum_n \sum_m x_n^m \psi_n^m(t). \quad (3.3)$$

$$x_n^m = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_n^m(t) dt. \quad (3.4)$$

ここで、 $\psi_n^m(t)$ は基本関数 $\psi(t)$ に対する次のスケール、シフト変換とにより構成される。

$$\psi_n^m = 2^{m/2} \psi(2^m t - n). \quad (3.5)$$

ここで、 m, n は、スケール変換、シフト変換のインデックスである。 $x(t)$ がフラクタル性をもつことから、ウェーブレット係数 x_n^m の満たすべき条件として、次の関係式が得られる。

$$\text{var} x_n^m = \sigma^2 2^{-\gamma m}. \quad (3.6)$$

この関係式は、ウェーブレット基本関数の性質などを用いると証明できる。いま、式の両辺のスペクトルをとると次のようになる。

$$S(\omega) = \sum_m P_m(\omega) |\Psi(2^{-m} \omega)|^2. \quad (3.7)$$

ここで、 $\Psi(\cdot)$ はウェーブレット基本関数のフーリエ変換であり、 $P_m(\omega)$ は、スケールインデックス m について求めたウェーブレット係数 x_n^m の集合で n を時間を表す添字とする時系列と考えた時のスペクトルである。ウェーブレット基本関数のフーリエ変換は帯域フィルタの特性をもっているため、式 (3.7) の右辺が式 (3.1) の右辺と一致するには、

$$P_m(\omega) = \sigma^2 2^{-\gamma m}. \quad (3.8)$$

となる必要があることが分かる。つまり、 $P_m(\omega)$ は、 ω に依存しない定数とならなければならない。 x_n^m から求めた分散とスペクトルとは等価であるため、式 (3.6) が成り立つ。

式 (3.6) の両変の対数をとると, m についての線形の直線となるので, 左辺により計算されるデータに対して回帰直線を当てはめ, この直線との 2 乗平方誤差 rmse の大きさによりフラクタル性を判定できる.

$$\text{rmse} = \left[\sum_m (\log(\text{var}x_n^m) - c_0 - c_1 m)^2 / M \right]^{1/2}. \quad (3.9)$$

M は添字 m の取り得る個数である.

3.2. フラクタル次元の推定

フラクタル時系列の分散とフラクタル次元を推定する方法を整理する. パラメータの尤度関数は次の形で与えられる.

$$P = \prod_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_d^2}} \exp[-(x_n^m)^2 / 2\sigma_d^2]. \quad (3.10)$$

ここで,

$$\sigma_d^2 = \sigma^2 \beta^{-m}. \quad (3.11)$$

であり, σ^2 は推定しようとしている時系列の分散であり, β は推定する未知のフラクタル次元 D と次に示す関係式で結ばれる.

$$\beta = 2^\gamma, \quad \gamma = 5 - 2D. \quad (3.12)$$

式 (3.10) の対数尤度関数を取り, 添字 m ごとの集計を取り,

$$L(\sigma^2, \beta) = -0.5 \sum_m N(m) [\sigma_m^2 / \sigma_d^2 + \ln(2\pi\sigma_d^2)]. \quad (3.13)$$

となる. ここで σ_m^2 は式 (3.4) における x_n^m についての分散であり,

$$\sigma_m^2 = \sum_n (x_n^m)^2 / N(m). \quad (3.14)$$

により計算される. ここで $N(m)$ はウェーブレット係数 x_n^m の m (スケール) についての計算数である.

式 (3.13) の尤度関数を最大にするため, 式 (3.13) を未知数について微分してゼロとおくと次の式を得る.

$$\sum_m N(m) \sigma_m^2 \beta^m - \sigma^2 \sum_m N(m) = 0, \quad (3.15)$$

$$\sum_m m N(m) \sigma_m^2 \beta^m - \sigma^2 \sum_m m N(m) = 0. \quad (3.16)$$

これらから σ^2 を消去すると, β に関する次の方程式を得る.

$$\sum_m N(m) \sigma_m^2 \beta^m \sum_m m N(m) - \sum_m m N(m) \sigma_m^2 \beta^m \sum_m N(m) = 0. \quad (3.17)$$

方程式の根のなかで, 唯一存在する正の実根より, γ を計算する.

σ^2 は次に示す式で計算される.

$$\sigma^2 = \sum_m N(m) \sigma_m^2 \beta^m / \sum_m N(m). \quad (3.18)$$

表 4: シミュレーションによる fBm の rmse
サンプル数=1000

次元 D	1.80	1.50	1.25
rmse	0.04	0.03	0.03

3.3. シミュレーションによる次元推定の検証

以下では、シミュレーションにより発生させ既知のフラクタル次元をもつ fBm の時系列について、3.2 で示した手法によりフラクタル次元の推定を行なった結果について簡単にまとめておく。

まず、フラクタル性を調べる元となる式 (3.9) の rmse の値については、100 回のシミュレーションで平均して 0.04 程度 (標準偏差 0.002) となった。理論的にはこの値はゼロになるが、離散化の効果、および計算誤差などが含まれていると考えられる。

次に、フラクタル次元の推定誤差については、相対誤差が 5% 程度となった。株価などの現実の時系列では、真の次元は分かっていないので推定誤差がどの程度であるかは不明である。しかし、すでに述べたの誤差との関連性を考慮すると、フラクタル次元の推定の相対誤差も程度の範囲におさまることが予想される。

表 5: シミュレーションによる次元推定の相対誤差 (%)
サンプル数=1000

次元 D	1.80	1.50	1.25
相対誤差	4.5	4.6	4.8

4. 株価時系列への適用

4.1. 株価のフラクタル次元の推定

以下では、現実の株価についてフラクタル性の検証と次元推定、および予測の基本的な性質を調べる。比較のために、実際の株価時系列の他に、比較のために正弦関数に雑音を加えた定常波も発生させ、結果を示している。

用いたデータは日本の株式市場における電子化された日々の株価であり、概要は次のようである。

- ファイル: 東洋経済新報社 CD 株価
- 種類: 一日の終値, 収録期間: 1970 年から 1982 年
- サンプル: 11 業種からランダムに 10 銘柄を選択
- データ長さ: 500 および 2000

結果については、平均的な値のほかに、いくつかの個別銘柄についての結果も示している。

(1) 観測期間の長さによる変化

表 6 には、フラクタル性を検査する rmse および次元 D の推定について、平均値と 5 種類の銘柄に対する結果を示している。 R_{500}, D_{500} はそれぞれサンプル数が 500 の場合の rmse と次元 D を意味し、比較のために正弦関数に雑音を加えた定常波の結果も示している。また、ウェーブレットのスケールインデックス m は、サンプル数によらず一定数に限定し、ソフトインデックス n はコンパクトサポートなウェーブレットが重ならないようにとれる最大数とする。これらの結果より分かるように、全体的に rmse は 0.2 程度となっている。この広がりについては、銘柄による差は大きくない。

観測期間による rmse の違いについては、一般的に期間が長くなるほど縮小する傾向になる。これは長い時系列には、サンプル数の増加によるシフトインデックス数 n の増加によるものと、よりフラクタル性が含まれていることの相互効果がみられることを意味している。しかし、サンプル数が 500 である場合の方が、2000 の場合より小さくなるケースも存在しており、株価の性質に依存するものがある。

しかし、全体的にサンプル数が 1000 以上であれば rmse も小さくなることがわかるので、株価の予測をする場合には、最低でも 1000 サンプルあれば十分であることが予想できる。

(2) 業種による変化

表 7 には、サンプル数が 2000 の場合の業種による rmse の値 R と次元 D の変化を示している。業種による変化については、明確には差異が現れない。やや、化学や電気ガス、金融保険でフラクタル性が強い。これは株価のフラクタル性が一般的に成立することを示している。これらのことから、業種によりフラクタル性については明確な差がないこと、従って、業種の応じて特別な株価予測の手法を取らなくてもよいことが分かる。

表 6: rmse, 次元の観測長さによる変化

銘柄	R_{500}	D_{500}	R_{2000}	D_{2000}
平均	0.17	1.49	0.14	1.51
電気機器	0.22	1.34	0.15	1.51
水産、農林業	0.29	1.37	0.17	1.50
通信	0.15	1.58	0.12	1.56
化学工業	0.20	1.51	0.13	1.57
精密機器	0.17	1.49	0.14	1.51
定常波	0.47	1.12	0.34	1.25

表 7: rmse, 次元の業種による変化

銘柄	R	D	銘柄	R	D
電気機器 A	0.14	1.47	電気機器 B	0.16	1.48
機械 A	0.14	1.49	機械 B	0.18	1.53
化学工業 A	0.11	1.52	化学工業 B	0.12	1.50
食料品 A	0.16	1.47	食料品 B	0.16	1.47
鉄鋼 A	0.16	1.44	鉄鋼 B	0.12	1.53
商業 A	0.17	1.50	商業 B	0.12	1.54
サービス業 A	0.13	1.53	サービス業 B	0.18	1.54
電気、ガス A	0.12	1.56	電気、ガス B	0.14	1.55
金融 A	0.12	1.57	金融 B	0.12	1.52

4.2. 株価予測の傾向

実際に観測された株価(終値)をフラクタル時系列としてモデル化し、本論文の手法によりその将来の値を予測して、実際に観測された時系列との比較を行う。

表 8 には、株価予測の nb 時刻先の予測誤差について、平均値と、いくつかの個別銘柄に対する結果を示している。予測誤差は期間内の最大振幅に対する誤差の割合(パーセント)としている。 $N = 2000$ の場合を考察している。予測期間については、 nb 時刻先について、 $nb = 28$ から $nb = 140$ までをとり、この場合の予測誤差を示している。 b の値は業種によって多少の差があるが、補間により、共通の nb 時刻先の予測誤差を求めている。

なお、 b 時刻先の予測誤差についての結果は省略しているが、平均して、振幅に対して0.6%程度となっている。

これらの結果より分かるように、全体的に nb 時刻先の予測誤差については銘柄により差が大きく誤差が小さい場合には0.3%程度であるが、大きい場合には14%程度まで拡大している。この平均値4%ないし6%は程度である。これらは定常波に対する予測誤差より十分に小さい。

予測誤差が84時刻先の場合には5%前後、140時刻先の予測の場合には7%前後となっており、実際に予測を用いて投資決定をするには大きな違いはないと考られる。

表 8: nb 時刻先の予測誤差 (%). 上段は 560 日目から下段は 840 日目から

銘柄	nb=28	56	84	112	140
電気機器	4.0	4.7	4.3	5.4	6.2
機械	4.4	4.1	5.5	5.6	6.6
水産、農林業	4.5	4.6	5.2	5.6	6.6
化学工業	5.9	4.6	6.7	6.2	7.0
平均	4.2	4.5	5.1	5.5	6.5
電気機器	4.1	4.3	6.5	7.4	7.6
機械	4.7	5.6	5.7	6.4	7.4
平均	4.3	5.3	5.4	5.4	6.5

5. オプション取引への応用

5.1. 投資戦略の評価

以下では、株価予測の応用として、オプション取引の決定に適用した場合を考察する。本論文で示した予測理論を株価の予測に直接用いて、売買による利益を計算することも可能であるが、株価に依存する点が大きく、また個別銘柄の理論的な予測方法はないなどの問題がある。一方、オプション価格については従来から用いられている理論式があり比較検討ができる利点がある。

ここで考察するオプション取引は次のような方法で行なわれると仮定する。いま、例としてコールオプションを購入する場合を考察する。一定の期日(時刻) τ あとの原株の取引について、オプション価格 C_m が市場に示されているとする。一方本論文で示した時系列予測の方法により、 τ 時刻あとの予測株価 \tilde{S}_T から満期日におけるオプション価格を予測し、それを現時点 t の価値に割り引いて、 t 時点のオプションの予測価値 C_f を求めておく。すなわち、

$$C_f = \frac{\max[\tilde{S}_T - K, 0]}{e^{r\tau}} \tag{5.1}$$

ここで、 K は行使価格、 r は非危険資産利率である。

オプション取引を有利にすすめるには

$$C_f > C_m \tag{5.2}$$

のときに限ってオプションを購入すればよい。これ以外のケースでは、市場でのオプション価格は、予測値より高く割りだかな投資となるからである。

オプション取引の方法は以下のようにまとめられる。

- 1) 現在を t 期としたとき、 $C_f > C_m$ である場合にのみコールオプションを購入する。
- 2) このように購入したオプションを、時刻 T 期において反対売買するすなわち取引の期日にコールオプションを売る。

3) このようなオプション購入と同時に基本となる株式基本証券の価格変動にともなうリスクをゼロにするためにデルタヘッジを行なう [2]. この場合の Black-Scholes モデルとしたコールプットのデルタは式 (5.6) のようになる.

株価の相対変化 (対数線形変換) をブラウン運動としてモデル化したコールオプション価格 (株を買い戻す権利) C , およびプットオプション価格 (株を売る権利) P の理論式 (Black-Scholes モデル) は次のように与えられる.

$$C = SN(d) - Ke^{-r\tau}N(d - \sigma\sqrt{\tau}). \quad (5.3)$$

$$P = -SN(-d) + Ke^{-r\tau}N(d - \sigma\sqrt{\tau}). \quad (5.4)$$

ただし

$$d = [\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau]/\sigma\sqrt{\tau}. \quad (5.5)$$

であり, 記号は次のようになる.

C :コールの価格, S :現在の株価, K :行使 (契約) 価格, τ :1 年を 1 とした満期までの期間, $N(d)$:正規分布の累積関数

$$\Delta_c = N(d), \Delta_p = N(d) - 1. \quad (5.6)$$

これらを整理すると時刻 T における利益は次のようになる.

$$R(T) = C_T - C_m - \Delta_c(S_T - S_t) + \rho_T(\Delta_c S_t - C_m). \quad (5.7)$$

ただし, C_T は時刻 T におけるオプションの実現値であり, 次のようになる.

$$C_T = S_T - K. \quad (5.8)$$

また, $N(d)$ は正規分布累積関数の d における値であり, ρ_T は t から T 期までの無リスク証券利子率である.

なお, 以上のオプション取引では最初にコールを買うが, コールを売る場合も同様に計算式を求めることができる. コールを売るのは, $C_f < C_m$ の場合である. このコールを, 時刻 t において売却することとし, 同様にデルタヘッジを行なう. 最終的に得られる利益は次のようになる.

$$R(T) = -(C_T - C_m) + \Delta_c(S_T - S_t) - \rho_T(\Delta_c S_t - C_m). \quad (5.9)$$

プットオプションの場合も同様に, $P_f > P_m$ の場合にはプットを購入し, $P_f < P_m$ の場合にはプットを売る. これらの場合の利益は次のようにまとめられる.

$P_f > P_m$ の場合

$$R(T) = P_T - P_m - \Delta_p(S_T - S_t) + \rho_T(\Delta_p S_t - P_m). \quad (5.10)$$

$P_f < P_m$ の場合

$$R(T) = -(P_T - P_m) + \Delta_c(S_T - S_t) - \rho_T(\Delta_p S_t - P_m). \quad (5.11)$$

5.2. シミュレーションによる評価

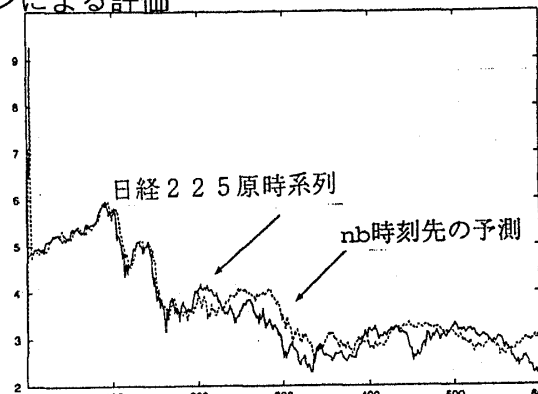


図 3. 日経 225 の nb 先の予測 (STEP100 から先)

以上のような投資戦略を、次の2つの取引にあてはめてみる。最初は日本のオプション取引である日経 225 について取引の評価であり、2 番目は fBm として発生させた仮想的な株価についてのオプション取引を、シミュレーション実験してみる。日経 225 の nb 先の予測の例を図 3 に示す。

日経 225 については、市場でオプション価格がしめされるので式 (5.7) における C_m は容易に求めることができる。これに対して、 fBm により発生された時系列に対しては、オプション価格は Black-sholes モデルに従ってオプション価格が決定されていると仮定する。

(1) 日経 225

データは 1989 年 1 月 4 日から 1996 年 7 月 1 日までの記録データを用いる。オプション取引のある期日についてオプションを購入することを仮定し 1 カ月先、2 カ月先、3 カ月先の限月のオプションを購入することにする。モデルには時系列の分散を含んでいるので、統計的な推定方法を用いて計算する。

結果について表 9 にまとめている。結果から分かるように本論文の予測手法を用いた場合には、限月が 2 カ月ないし 3 カ月先の場合 10 以上の利益となっている。これは、平均して投資を開始した時点での株価に対して約 0.05%利益をあげていることになる。

なお比較のためオプション評価の理論式である Black-Sholes モデルをオプション価格の予測値として用いた場合の結果も表 9 に合わせて示している。すなわち式 (5.1) の売買取引において予測値として式 (5.3) で計算される値を用いて投資方法を選択する。一般に Black-Sholes モデルによるオプション価格は市場で示される最高値と安値の中間に位置しているといわれる。従って理論値を用いることにより大きな損はないが大きな利益もない。しかし、この期間、株価指数は下降傾向にあるので、理論価格を用いた結果は、平均値より、ややよくなっている。(コールの売りによる。) 表より本論文の予測方式において、1 カ月先の予測は、市場の予測値とほぼ一致するが、2、3 カ月先の予測は市場の予測よりも有効であることが示されている。

表 9: 日経 225 オプション取引シミュレーションの評価

	1 カ月先	2 カ月先	3 カ月先
本論文の手法による利益	-0.08	10.14	12.59
理論価格による利益	-6.37	6.70	10.50

(2) fBm

fBm の場合には、以下を仮定する.

$$S = 100, r = 0.12, \sigma = 1.0. \quad (5.12)$$

fBm のフラクタル次元には、日経平均株価（1989.1.4~1996.6.28）から得られる推定次元と同じ値（ $D=1.43$ ）を用いた.

表 10 は、オプション取引に対する利益を示している. 株価はこの期間、約 40 から 270 の範囲を変化する. なお、fBm の場合の市場でのオプション価格としては Black-Sholes モデルの価格を採用している. 原理的には無数のオプション価格が存在してそのままでは評価を行ないにくい. 従ってここでは市場では ATM の取引が主流であることを考慮して、ATM(At The Money) についてのみを対象としている.

これより分かるように、本予測方式をとることにより、株価がフラクタル時系列に従っている場合に本論文の予測手法を用いることにより、少なくとも Black-Sholes モデルに従ってオプション価格を呈示している市場より高い利益をあげることができる.

表 10: fBm オプション取引シミュレーションの評価

	1 カ月先	2 カ月先	3 カ月先
本論文の手法の利益	0.94	2.25	3.27

参考文献

- [1] F. Black and M. Scholes: The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81** (1973) 637-659.
- [2] J. C. Cox and M. Rubinstein: *Options Markets* (Prentice-Hall Inc, Engelwood Cliffs, 1985).
- [3] I. Daubechies: Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Commun. Pure Appl. Math.*, **41** (1988) 909-996.
- [4] 池田欽一, 時永祥三: ウェーブレット変換系数を用いた株価時系列のフラクタル性の検証について. 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト, (1997) 54-55.
- [5] B. Mandelbrot and N. Van: The fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, **10** (1968) 422-436.
- [6] 高安秀樹: フラクタル (朝倉書店, 1986).
- [7] 時永祥三, 池田欽一: 時系列のフラクタル性を利用した株価の予測手法. 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト, (1997) 52-53.
- [8] 時永祥三, 森保洋, 宮崎明雄, 島津宣之: 時系列のフラクタル性質を用いた予測手法とその応用. 信学論 (A), **J79-A-11** (1996) 1793-1800.
- [9] 時永祥三, 森保洋, 宮崎明雄, 島津宣之: スケール伸長変換およびウェーブレット変換によるパラメータ推定を用いた時系列予測. 信学論 (A), **J79-A-12** (1996) 1-9.
- [10] G. W. Wornell and A. V. Oppenheim: Estimation of fractal signals from noisy measurement using Wavelets. *IEEE Trans. Signal Processing*, **40-3** (1992) 611-623.
- [11] G. W. Wornell: Wavelet-based representation for the $1/f$ family of fractal processes. *Proc. IEEE*, **81-10** (1993) 1428-1450.

時永祥三

〒 812-0053 福岡市東区箱崎 6-19-1

九州大学 経済工学科

E-mail: tokinaga@en.kyushu-u.ac.jp

ABSTRACT

EVALUATION OF STOCK OPTION PRICES BY USING
THE PREDICTION OF FRACTAL TIME-SERIES

Yoshikadu Ikeda Shozo Tokinaga
Kyushu University

This report deals with the prediction method for the time-series bearing fractal geometry. The method is applied to the forecast of stock price and option premium, and the results show better performance of investment compared to the conventional methods. At first, the time series is represented by the convolution of the impulse response expanded by a set of scaling function and the input signal. Then, by using the time scale expansion, future stock prices are estimated. An indicator showing whether the stock price is fractal is also shown.