Journal of the Operations Research
Society of Japan
Vol. 40, No. 4, December 1997

海と空からの捜索について

一森哲男
大阪工業大学

(受理 1996 年 6 月 28 日；再受理 1997 年 6 月 9 日)

和文概要　戦後，探索理論は B. O. Koopman によりまとめられたが，そこでの探索は船だけを用いるか，あるいは飛行機だけを用いるものであり，船と飛行機の両方を用いた研究にはなっていない．ところが，海難事故のような緊急を要する場合には，船と飛行機の両方を用いた探索を考えるのが妥当のようである．そこで，本論文では B. O. Koopman のモデルを船と飛行機の両方を用いた場合に拡張したモデルを考える．そして，その問題が強多項式時間で解けることを示すことにより，探索精度の向上に役立つことを期待する．

1.　はじめに

1991 年 12 月のたか号遭難事故や 1994 年 2 月のベラウ共和国のダイバー遭難事故では，捜索機や捜索船が遭難者のほんの近くまで接近しながら救助できなく，多数の犠牲者がでた．あとで判明したことであるが，遭難中，漂流している救命いかだやダイバーからは捜索中の飛行機を発見したものの，不幸なことに，捜索中の飛行機の方からは救命いかだやダイバーを発見することができなかった．海上捜索は，現場海域の潮の流れが速かったり，波が高かったりして，非常に難しいものがあるが，これらの海難事故では，もう少し捜索の精度が上がれば，犠牲者の数が減少していたと思われる．

ところで，目標物を合理的に見つける研究としては，第二次大戦中にアメリカ海軍が研究をしており，戦後 B.O. Koopman がこれをまとめて探索理論として論文に発表した [6,7,8]．しかしながら，この探索は船だけを用いる場合か，あるいは飛行機だけを用いる場合のものであり，船と飛行機の両方を用いた研究にはなっていない．ところが，上記のような捜索（以下，探索に統一する）では，緊急を要する問題だけに，船と飛行機の両方を用いた海と空からの探索を考えるのが妥当のようである．もちろん，山での遭難でも地上からの探索だけでなく，上空からの探索も行われるのが一般的である．そこで本論文では，Koopman[8] および Charnes and Cooper[3] のモデルを船と飛行機の両方を用いた場合に拡張したモデルを考えることにする．

今日では，Koopman[8] および Charnes and Cooper[3] の研究は資源配分問題という広いクラスに属すると見なされている．資源配分問題は，手持ちの資源をどのように配分あるいは投資すれば，その時の効用あるいは利益の総和が最大となるかを議論する．問題の構造の単純さ故に，応用範囲は広く，例えば，電力システムでの火力発電機の経済的負荷配分問題（ＥＬＤ）[13] やソフトウェア開発のテスト工程におけるエラーの発見 [14]，あるいは選挙制度に関する議席配分問題 [1] などは特に有名である．また，これら以外にも生産計画，ポートフォリオ選択の諸問題がその応用として挙げられる．さらに，部分問題（子問題）としても，さまざまな分野で，しばしば現れている．資源配分問題に関しては Ibaraki and Katoh[4] に詳しく述べられている．

これまで資源配分問題の研究では，ほとんど資源の種類が単一であった．ところが，自然な拡張，あるいは応用問題の必要性から，資源の種類を複数にした問題，つまり多資源配分問題が Mjelde により研究されだした [12]．しかし，その解法は Khachian の楕円体法を

用いる必要があるため，とても実用には耐え得るものではない．また，その理論的計算量も小さいとも言えない．

このような観点からすると，我々の問題は複数の資源を用いた多資源配分問題となり，効率的なアルゴリズムを作り出すのが難しそうである．しかしながら，資源の数が２に限定されていることを利用して，強多項式時間で解けることを示した．

ここでのような二つの資源を利用する多資源配分問題と関連のあるものとして，Megiddo and Ichimori[10] および一森 [5] が挙げられる．前者は，目的関数が線形のボトルネック型問題で，線形時間で解くアルゴリズムを与えている．後者は，目的関数が２次関数である問題で，強多項式時間で解くアルゴリズムを与えている．

本論文の内容は次の通りである．まず，我々のモデルを説明し，これを定式化した．次に，これの双対問題を作り，微分不可能な凹関数の最大化問題を定義した．そして，この微分不可能な凹関数の最大化が強多項式個の閉凸集合上の微分可能な関数の最大化に細分できることを示し，我々の問題が強多項式時間で解けることを示した．最後に，解の性質について議論し，ここでの手法が適用できるクラスを明記した．

２．主問題と双対問題

２．１　定式化

我々の問題を Koopman[8] および Charnes and Cooper[3] にならい以下のように定式化する．

$$(P) \qquad \max \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - e^{-a_i x_i - b_i y_i})$$

$$s.t. \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \le X, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \le Y$$

$$x_i \ge 0, \quad y_i \ge 0 \qquad (i = 1, ..., n)$$

ここで定数 $p_i > 0, \quad a_i > 0, \quad b_i > 0 \quad (i = 1, ..., n)$ とする．また，$0 < X < \infty, \quad 0 < Y < \infty$ とする．

まず，Koopman および Charnes and Cooper の定式化を簡単に説明する（詳しくは [3,8] を参照）．目標物が n 個の領域内に存在し，i 番目の領域内に目標物が存在する確率 p_i が既知とする．今，i 番目の領域に目標物があったと仮定した時，探索労力を x_i だけ用いてランダム探索を行なった時の発見確率が関数 $(1 - e^{-a_i x_i})$ で表わされるとすると，全領域での条件付発見確率は $\sum_{i=1}^{n} p_i(1 - e^{-a_i x_i})$ となる．a_i は気象条件などに作用される“見え易さ”を表す正の定数である．

我々の定式化では，船の探索労力 x_i と飛行機の探索労力 y_i の二種類を考え，上記の $a_i x_i$ を $a_i x_i + b_i y_i$ で置き換えただけである．もちろん，a_i は船にとっての見え易さで，b_i は飛行機にとっての見え易さを表している．X と Y はそれぞれ，船と飛行機の利用できる“量”を表しており，どちらも有限としている．

問題 (P) は明らかに次の最小化問題と同じである．

$$(P') \qquad \min \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i}$$

$$s.t. \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \le X, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \le Y$$

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0 \qquad (i = 1, ..., n)$$

以下問題 (P') を解くことを考えていく．

2．2　双対化

問題 (P') の双対問題を作る前に，問題 (P') が制約想定を満たす有界な凸計画問題であることに注意する．この場合，双対問題も有界となり主問題 (P') の最小値に等しい最大値を持つ．問題 (P') の資源の量の上限制約の２式に対して，ラグランジュ乗数 $\lambda \geq 0$ と $\mu \geq 0$ を対応させて，次のラグランジュ関数を作る．

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda, \mu) &= \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i} + \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - X) + \mu(\sum_{i=1}^{n} y_i - Y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i} + \lambda x_i + \mu y_i\} - X\lambda - Y\mu \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$，　$\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ である．変数 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$，λ，μを持つ，このラグランジュ関数を，$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$，　$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ で最小化すると，λ と μ の双対関数 $g(\lambda, \mu)$ が得られる．これは，よく知られているように，λと μ に関して連続な凹関数である．さて，上で述べたように，双対問題は有界なので，双対関数 $g(\lambda, \mu)$ も有限の確定値を持つ λ, μ に対してのみ定義されているとする．

$$\begin{aligned} g(\lambda, \mu) &= \min_{\substack{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}}} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda, \mu) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \min_{\substack{x_i \geq 0 \\ y_i \geq 0}} \left(p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i} + \lambda x_i + \mu y_i\right) \right\} - X\lambda - Y\mu \end{aligned}$$

ここでは，ラグランジュ関数が分離可能のため，演算 $\sum$ と min の順序が逆になっていることに注意したい．いま，

$$h_i(\lambda, \mu) = \min_{\substack{x_i \geq 0 \\ y_i \geq 0}} \left(p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i} + \lambda x_i + \mu y_i\right)$$

と置くと，$\lambda = 0$ もしくは $\mu = 0$ のとき，右辺の関数は明らかに，下界は存在するが，確定した最小値を持たないので，以下 $\lambda > 0$, $\mu > 0$ と仮定する．このとき，

$$g(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n} h_i(\lambda, \mu) - X\lambda - Y\mu$$

と書ける．すると，双対問題 (D) は次のように凹関数の最大化問題となる．

$$(D) \qquad \max_{\substack{\lambda > 0 \\ \mu > 0}} g(\lambda, \mu)$$

この問題を解くには，関数 $g(\lambda, \mu)$ の形が決まれば，つまり n 個の関数 $h_i(\lambda, \mu)$ の形が決まれば良い．そのため，$h_i(\lambda, \mu)$ の形を決定する問題を次に考える．

2．3　関数 $h_i(\lambda, \mu)$ の形の決定

ここでは $\lambda > 0$, $\mu > 0$ と仮定して，$h_i(\lambda, \mu)$ の関数形を求める，次の問題 (SP) を考える．

$$(SP) \qquad \min_{\substack{x_i \geq 0 \\ y_i \geq 0}} p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i} + \lambda x_i + \mu y_i$$

問題 (SP) は凸計画法の問題なので，問題 (SP) の実行可能解 (x_i, y_i)，つまり解 $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ が最適解となるための必要十分条件は，次の通りである．

最適性の条件　問題 (SP) の実行可能解 (x_i, y_i) が最適解となるための必要十分条件は $\lambda \geq p_i a_i e^{-a_i x_i - b_i y_i}$, $\mu \geq p_i b_i e^{-a_i x_i - b_i y_i}$, $x_i(\lambda - p_i a_i e^{-a_i x_i - b_i y_i}) = 0$, および $y_i(\mu - p_i b_i e^{-a_i x_i - b_i y_i}) = 0$
である．

この関係を用いると，問題 (SP) の最適解は容易に求められる．

定理2．1　問題 (SP) の最適解 (x_i, y_i) は
(i) $\frac{\mu}{\lambda} > \frac{b_i}{a_i}$, $0 < \lambda < p_i a_i$ ならば $x_i = \frac{1}{a_i} \log \frac{p_i a_i}{\lambda}$, $y_i = 0$,
(ii) $\frac{\mu}{\lambda} < \frac{b_i}{a_i}$, $0 < \mu < p_i b_i$ ならば $x_i = 0$, $y_i = \frac{1}{b_i} \log \frac{p_i b_i}{\mu}$,
(iii) $\lambda \geq p_i a_i$, $\mu \geq p_i b_i$ ならば $x_i = 0$, $y_i = 0$
である．

系2．2　関数 $h_i(\lambda, \mu)$ は次のように求まる．
(i) $\frac{\mu}{\lambda} > \frac{b_i}{a_i}$, $0 < \lambda < p_i a_i$ ならば $h_i(\lambda, \mu) = \frac{\lambda}{a_i}(1 + \log \frac{p_i a_i}{\lambda})$,
(ii) $\frac{\mu}{\lambda} < \frac{b_i}{a_i}$, $0 < \mu < p_i b_i$ ならば $h_i(\lambda, \mu) = \frac{\mu}{b_i}(1 + \log \frac{p_i b_i}{\mu})$,
(iii) $\lambda \geq p_i a_i$, $\mu \geq p_i b_i$ ならば $h_i(\lambda, \mu) = p_i$.

系2．3　関数 $h_i(\lambda, \mu)$ の勾配ベクトル $\nabla h_i(\lambda, \mu)$ は次のように与えられる．
(i) $\frac{\mu}{\lambda} > \frac{b_i}{a_i}$, $0 < \lambda < p_i a_i$ ならば

$$\nabla h_i(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_i} \log \frac{p_i a_i}{\lambda} \\ 0 \end{bmatrix},$$

(ii) $\frac{\mu}{\lambda} < \frac{b_i}{a_i}$, $0 < \mu < p_i b_i$ ならば

$$\nabla h_i(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{b_i} \log \frac{p_i b_i}{\mu} \end{bmatrix},$$

(iii) $\lambda \geq p_i a_i$, $\mu \geq p_i b_i$ ならば

$$\nabla h_i(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

系2．2と2．3より，勾配法により $g(\lambda, \mu)$ を容易に最大化できそうであるが，実は2つの点がネックとなる．1つ目は，関数 $h_i(\lambda, \mu)$ が正の領域全体で3つの異なる関数形を持つため，関数 $g(\lambda, \mu)$ が 3^n 個，つまり指数個の関数形を持つ恐れがあることである．2つ目は，関数 $h_i(\lambda, \mu)$ が線分 $\mu = \frac{b_i}{a_i}\lambda$ $(0 < \lambda < p_i a_i)$ 上で滑らかではないことである．以下の節では，これら2つの点について議論する．

3 凹関数の最大化と解法

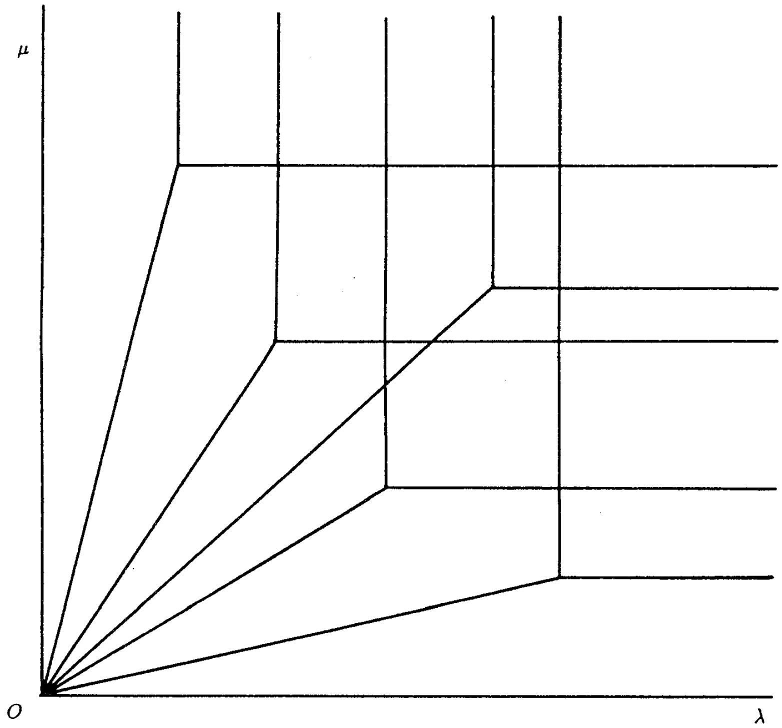

図3．1： 全部で21個のセルがある．これは $n=5$ の時の最大個数である

3．1 最大化問題の細分化

ここでは関数 $g(\lambda,\mu)$ が $O(n^2)$ 個の関数形しか持たないことを示すことにより，“滑らかでない” 関数 $g(\lambda,\mu)$ の最大化を $O(n^2)$ 個の閉凸集合での “滑らかな” 関数の最大化問題に細分する．

まず，$\lambda-\mu$平面 $(\lambda>0,\ \mu>0)$ 上で $g(\lambda,\mu)=\sum_{i=1}^{n}h_i(\lambda,\mu)-X\lambda-Y\mu$ は一体いくつの異なる関数形を持っているのかを調べてみる．次の3つの領域を定義する．

$$U_i=\{(\lambda,\mu)\mid\ \mu\geq\frac{b_i}{a_i}\lambda,\ 0<\lambda\leq p_ia_i\}$$
$$V_i=\{(\lambda,\mu)\mid\ \mu\leq\frac{b_i}{a_i}\lambda,\ 0<\mu\leq p_ib_i\}$$
$$W_i=\{(\lambda,\mu)\mid\ \lambda\geq p_ia_i,\ \mu\geq p_ib_i\}.$$

この時，境界の重なりを無視すれば（以下の議論でも無視する），$\lambda-\mu$平面の正の領域は U_i，V_i，W_i で3分割される．半直線$\mu=p_ib_i\quad(\lambda\geq p_ia_i)$ を L_i，$\lambda=p_ia_i\quad(\mu\geq p_ib_i)$ を M_i，線分$\mu=\frac{b_i}{a_i}\lambda\quad(0<\lambda\leq p_ia_i)$ を S_iとし，3つ組 (L_i,M_i,S_i) を “三つ組直線” と呼ぶ．$\lambda-\mu$ 平面の正の領域は n 個の三つ組直線によりいくつかの小領域（面積は0ではない）に分割されるが，各分割された小領域をセルと呼ぶ．次の定理は数学的帰納法により容易に示せる．

定理3．1 $\lambda-\mu$平面の正の領域は, n 個の三つ組直線 $(L_i,M_i,S_i)\quad i=1,\ldots,n$ により高々$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$個のセルに分割される．

例として $n=5$ の場合を考えてみる．$p_i,a_i,b_i\quad(i=1,\ldots,5)$ を適当に与えた結果を図3．1に示す．この図では全部で21個のセルがある．これは定理の示す $n=5$ の時の最大個数である．

系2．2より，各セル上では全ての $h_i(\lambda,\mu)$ の関数形が一意に定まるので，結局，定理3．1より関数 $g(\lambda,\mu)$ は $O(n^2)$ 個の関数形しか持たないことが分かる．次に、具体的にその形を表してみる．

任意のセル cl に対して，集合 $N=\{1,\ldots,n\}$ を次のように分割する．

$$U_{cl}=\{i \mid cl\subseteq U_i\},\ V_{cl}=\{i \mid cl\subseteq V_i\},\ W_{cl}=\{i \mid cl\subseteq W_i\}.$$

ここで U_{cl}, V_{cl}, W_{cl} は互いに素で $U_{cl}\cup V_{cl}\cup W_{cl}=N$ である．この分割は各セルに対して一義的に定まり，かつ両者の対応は1対1である．よって，各セル cl は2つの集合 U_{cl} と V_{cl} の対で表現することができる：$cl=(U_{cl},V_{cl})$.

各セル cl による集合 N の分割は単に U_i, V_i　$i=1,\ldots,n$ の定義を用いるだけであるから，表現 (U_{cl},V_{cl}) は $O(n)$ の時間で実行できる．各セル cl は最大6辺をもつ多角形であるが，表現 (U_{cl},V_{cl}) が与えられると，これの境界（の方程式）を求めることも容易で，詳細は略するが，$O(n)$ の時間で実行できる．事前にすべてのセルの表現 (U_{cl},V_{cl}) とその境界を求めておく必要はないが，仮にそうしたとしても $O(n^3)$ の時間で実行が可能である．

U_i, V_i, W_i の定義および定理2．1から点 (λ,μ) がセル cl の内点とすれば

$$U_{cl}=\{i \mid x_i>0\},\ V_{cl}=\{i \mid y_i>0\},\ W_{cl}=N-U_{cl}-V_{cl}.$$

となる．いま，$U_{cl}=\emptyset$ ならば，全ての i に対し $x_i=0$ となるが，明らかにこれは問題 (P') の最適解ではない（資源の量 $X\neq 0$ に注意）．故に，以下，$U_{cl}\neq\emptyset$ かつ $V_{cl}\neq\emptyset$ となるセルのみを考える．言い換えれば，我々の対象とするセルは有界な閉凸集合に限定される．

上記の記号を用いると，セル cl 上の $g(\lambda,\mu)$ は次のように表現できる（以下，この関数を $g_{cl}(\lambda,\mu)$ と書き，$\lambda>0$, $\mu>0$ 上全体で $g_{cl}(\lambda,\mu)$ を定義する)：

$$g_{cl}(\lambda,\mu)=\sum_{i\in U_{cl}}\frac{\lambda}{a_i}(1+\log\frac{p_ia_i}{\lambda})+\sum_{i\in V_{cl}}\frac{\mu}{b_i}(1+\log\frac{p_ib_i}{\mu})+\sum_{i\in W_{cl}}p_i-X\lambda-Y\mu. \tag{3.1}$$

もちろん，関数 $g_{cl}(\lambda,\mu)$ は $\lambda>0$, $\mu>0$ 上で滑らかである．

関数 $g(\lambda,\mu)$ の最大値を見つけるには，“理論的には”すべてのセルに対して，cl 上で $g_{cl}(\lambda,\mu)$ の最大値を見つければ良いわけであるから，結局 $g(\lambda,\mu)$ の最大化は $O(n^2)$ 個の cl 上での $g_{cl}(\lambda,\mu)$ の最大化問題：

$$(Q)\qquad \max g_{cl}(\lambda,\mu)\quad s.t.\ (\lambda,\mu)\in cl$$

に細分される．

3．2　双対関数の最大化

ここでは問題 (Q) が $O(n)$ の時間で解けることを簡単に説明し，その結果，双対ペア問題 (P'), (D) が $O(n^3)$ の時間で解けることを述べる．

明らかに $\nabla g_{cl}(\lambda,\mu)=\mathbf{0}$ の解 (λ_{cl},μ_{cl})：

$$\lambda_{cl}=\exp\left\{\frac{\sum_{i\in U_{cl}}\frac{\log p_ia_i}{a_i}-X}{\sum_{i\in U_{cl}}\frac{1}{a_i}}\right\} \tag{3.2}$$

$$\mu_{cl}=\exp\left\{\frac{\sum_{i\in V_{cl}}\frac{\log p_ib_i}{b_i}-Y}{\sum_{i\in V_{cl}}\frac{1}{b_i}}\right\} \tag{3.3}$$

が cl に属せば，問題 (Q) の最適解である（そして同時に双対問題 (D) の最適解でもある.）そうでない場合は，問題 (Q) の目的関数 $g_{cl}(\lambda,\mu)$ が凹であり，制約領域 cl が有界な閉凸集

合であるので，最適解はセルの境界上に存在する．セルは最大６辺をもつ多角形なので高々６回，各辺を構成する線分上で $g_{cl}(\lambda,\mu)$ の最大化を行なえば問題 (Q) は解ける．ただし，それらは１変数問題で，極めて簡単なのでその説明は省く．

以上のことから，対数と累乗が単位時間で計算可能とすれば（以下同じ），$O(n)$ の時間で問題 (Q) を解くことができ，しかも運が良ければ双対問題 (D) も同時に解けてしまうことが分かる．異なる問題 (Q) の数は $O(n^2)$ 個しかなかったので，仮に全てのセル上で問題 (Q) を解いたとしても全体の計算時間（つまり，双対問題 (D) を解く計算時間）は $O(n^3)$ となる．もちろん，双対問題が解けたらその最適解 (λ^*,μ^*) を定理２．１に代入すれば主問題 (P') の最適解が得られる．なお，$\frac{\mu^*}{\lambda^*}=\frac{b_j}{a_j}$ かつ $0<\lambda^*<p_j a_j$ となる j がある場合，つまり，定理２．１でどのケースにも該当しない場合は次のように処理すれば良い．まず，このような j が複数個あれば，データに（理論的に）摂動でもかけて，そのような j を１つとしてしまう．すると，(x_j,y_j) の最適値は $x_j=X-\sum_{i\neq j}x_i,\quad y_j=Y-\sum_{i\neq j}y_i$ で与えられる．

最後に，関数 $g(\lambda,\mu)$ の最大化であるが，何も全てのセル上で調べる必要はなく，適当な上昇法（最小化の降下法の意味）を用いれば効率良く計算できるものと期待される．

３．３　数値例

ここでは，簡単な数値例を考えることにより，双対関数の最大化がどのように行われるかを示す．問題のデータは得られるセルの形が図３．１のセルの形と同一になるように選んだ：$n=5$ として

$$a_1=0.22,\quad a_2=0.21,\quad a_3=0.51,\quad a_4=0.29,\quad a_5=0.06,$$

$$b_1=0.05,\quad b_2=0.13,\quad b_3=0.51,\quad b_4=0.44,\quad b_5=0.23,$$

$$p_1=0.30,\quad p_2=0.20,\quad p_3=0.10,\quad p_4=0.10,\quad p_5=0.30,$$

さらに $X=10, Y=7$ とした．最初のセルとして $cl=(\{1,2,3\},\{4,5\})$ を選ぶ．このセルの与える双対関数は次式で示される：

$$g_{cl}(\lambda,\mu)=\sum_{i=1,2,3}\frac{\lambda}{a_i}(1+\log\frac{p_i a_i}{\lambda})+\sum_{i=4,5}\frac{\mu}{b_i}(1+\log\frac{p_i b_i}{\mu})-10\lambda-7\mu. \tag{3.4}$$

この時，$\nabla g_{cl}(\lambda,\mu)=\mathbf{0}$ の解 (λ_{cl},μ_{cl}) は式 (3.2), (3.3) より

$$\lambda_{cl}=\exp\left\{\frac{\sum_{i=1,2,3}\frac{\log p_i a_i}{a_i}-10}{\sum_{i=1,2,3}\frac{1}{a_i}}\right\},$$

$$\mu_{cl}=\exp\left\{\frac{\sum_{i=4,5}\frac{\log p_i b_i}{b_i}-7}{\sum_{i=4,5}\frac{1}{b_i}}\right\}.$$

つまり $\lambda_{cl}=0.02146, \mu_{cl}=0.02054$ となる．

図３．１で，この点 $(0.02146, 0.02054)$ は線分 $\mu=\lambda$ で接する隣のセル $(\{1,2\},\{3,4,5\})$ に属するので，最初のセル $(\{1,2,3\},\{4,5\})$ 上での $g_{cl}(\lambda,\mu)$ の最大値はこのセルの境界上で得られる．実のところ，この最大値は線分 $\mu=\lambda$ 上で達せられ，その最大点は

$$\lambda=\mu=\exp\left\{\frac{\sum_{i=1,2,3}\frac{\log p_i a_i}{a_i}+\sum_{i=4,5}\frac{\log p_i b_i}{b_i}-10-7}{\sum_{i=1,2,3}\frac{1}{a_i}+\sum_{i=4,5}\frac{1}{b_i}}\right\},$$

より $(\lambda,\mu)=(0.02112, 0.02112)$ となる．

また同様の計算により，新しいセル $(\{1,2\},\{3,4,5\})$ 上での双対関数の最大値もこの点で達せられることが示せるので，点 $(0.02112, 0.02112)$ が $\lambda-\mu$ 平面の正の領域全体での双対関数 $g_{cl}(\lambda,\mu)$ の最大点である．よって，この例題の最適解は次のようになる：

$$x_1 = 5.184,\quad x_2 = 3.278,\quad x_3 = 1.538,\quad x_4 = 0.000,\quad x_5 = 0.000,$$

$$y_1 = 0.000,\quad y_2 = 0.000,\quad y_3 = 0.179,\quad y_4 = 1.670,\quad y_5 = 5.151.$$

4 おわりに

ここで，主問題の最適解の性質について少し述べる．まず，定理2．1から全ての領域が探索されるわけではない，ということである。発見確率最大化のため見捨てる領域もあるということである．しかしながら，探索領域全体があらかじめ限定されているわけで，このことはそんなに不自然ではない．また，探索する領域でも，節3．2の最後で定義した領域 j 以外では，船または飛行機の一方のみを使って探索し，両方を使うことはない，ということが理解できれる．言い換えれば，領域 j 以外では，資源の量の制約のもとで，船と飛行機の“より役に立つ”ほうを使うということである．ただし，領域 j では両方を用いる．

ところで，実際の探索ではしばしば船と飛行機の両方が複数の領域で探索を行っているようであるが，今述べた結論からすると，それは無駄と思われる．しかしながら，両者が連絡をとりながら協力すれば話は別で，例えば，上空からは見えにくい点があるのでそこを船に見てもらったりすると両者で探索するメリットがある．このような船と飛行機の相関がある場合は，我々のモデルでは解析できなく、今後の課題とする．

我々のモデルでは船と飛行機の両資源を用いると仮定したが，そのことは何も両資源を同時に用いることを要求するものではない．例えば，飛行機の方が移動が速いので，先に飛行機で探索を行い，その後，船で探索を行ってもよい．ただし，この2回の探索にわたって，目標物の存在確率 p_i がすべて一定であることを必要とする．もし，そうでなければ，これは目標物が移動したことを意味するので，これは移動目標物の探索問題となり，本論文の範囲を越えてしまう．移動目標物の探索労力配分問題については，例えば [2] で議論されている．

次に，本論文での手法が適応できる問題のクラスを述べる．Luss と Gupta は資源数が1の問題で目的関数の各項が $p_i e^{-a_i x_i}$ あるいは $-p_i \log(1+a_i x_i)$ といった，微分可能であり，しかも狭義凹かつ狭義単調減少関数となる1資源配分問題を研究した [9]．これらの2資源版を $p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i}$ あるいは $-p_i \log(1+a_i x_i + b_i y_i)$ つまり $a_i x_i$ を $a_i x_i + b_i y_i$ で置き換えたと仮定すれば，ここでの結果の一般化が可能である．実際，Mjelde は多資源配分問題の定式化においてこのような仮定を用いている [11]．詳細は略するが，このように置き換えた問題のクラスに対して，容易に本論文と同様の結果が導かれる．

本論文の目的は探索資源の種別を考慮に入れたモデルの解析である．もちろん，資源の種類を区別しないより区別したほうが探索の精度が上昇するのは明らかであるが，最適解が，あるいは準最適解が実用的な時間内に得られないのでは，実際の探索では役に立ちそうにない．そのような意味で，我々の問題が強多項式時間で解けることが示せたことは探索精度の向上に寄与するものと期待できる．

謝辞

本研究の一部は，文部省科学研究費（基盤C No.08680472）の補助を受けている．また，いくつかの貴重なコメントを下さったレフェリーの方々に感謝する．

参考文献

[1] Balinski, M.L. and Young, H.P.: *Fair Representation — Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Yale University Press, 1982.

[2] Brown, S.S.: Optimal search for a moving target in discrete time and space, *Operations Research*, Vol.28(1980), pp.1275–1289.

[3] Charnes, A. and Cooper, W.W.: The theory of search: optimal distribution of effort, *Management Science*, Vol.5(1958), pp.44–49.
[4] Ibaraki, T. and Katoh, N.: *Resource Allocation Problems — Algorithmic Approaches*, The MIT Press, 1988.
[5] 一森哲男: 2次目的関数を持つ2資源配分問題, 日本応用数理学会論文誌, Vol.3(1993), pp.199–215.
[6] Koopman, B. O.: The theory of search: part I, kinematic bases, *Operations Research*, Vol.4(1956) , pp.324–346.
[7] Koopman, B. O.: The theory of search: part II, target detection, *Operations Research*, Vol.4(1956) , pp.503–531.
[8] Koopman, B. O.: The theory of search: part III, the optimum distribution of searching effort, *Operations Research*, Vol.5(1957) , pp.613–626.
[9] Luss, H. and Gupta, S. K.: Allocation of effort resources among competitive activities, *Operations Research*, Vol.23(1975), pp.360–366.
[10] Megiddo, N. and Ichimori, T.: A two-resource allocation problem solvable in linear time, *Mathematics of Operations Research*, Vol.10(1985), pp.7–16.
[11] Mjelde, K. M.: The allocation of linear resources to concave activities—a finite algorithm with a polynomial time bound, *J. Operational Research Society*, Vol.33(1982), pp.1045–1046.
[12] Mjelde, K. M.: *Methods of the Allocation of Limited Resources*, John Wiley & Sons, 1983.
[13] 高橋 一弘: 電力システム工学, コロナ社, 1975.
[14] 山田 茂: ソフトウェア信頼性評価技術, HBJ出版局, 1989.

一森哲男
〒 573-01 枚方市北山一丁目 79 番 1 号
大阪工業大学　情報システム学科
E-mail: ichimori@is.oit.ac.jp

〒 535 大阪市旭区大宮五丁目 16 番 1 号
大阪工業大学　経営工学科
E-mail: ichimori@dim.oit.ac.jp

ABSTRACT

ON THE PROBLEM OF SEARCH WITH SHIPS AND AIRCRAFT

Tetsuo Ichimori
Osaka Institute of Technology

After World War II, B. O. Koopman published the series of three papers on *the theory of search* where the search is carried out with aircraft (or ships) only. However, in the case of emergency, it seems to be reasonable that the search is carried out not only with aircraft but also with ships. Therefore, in this paper, we extend Koopman's model and consider the problem of search with ships and aircraft. By solving the problem in polynomial time, we expect that our results will contribute to the theory of search.