

## ランダム順処理規則に従うゲート式 $M^{[X]}/G/1$ システムの待ち時間の解析

川崎紀一  
京都大学

高木英明  
筑波大学

高橋 豊  
奈良先端科学技術大学院大学

長谷川利治  
京都大学

(受理 1994 年 6 月 30 日 ; 再受理 1995 年 10 月 26 日)

**和文概要**  $M^{[X]}/G/1$  システムは  $M/G/1$  システムを拡張しメッセージが集団で到着する場合をも許すモデルであり、 $M/G/1$  システムと同様に多種のモデルに関する解析が望まれるが、未だ解析されていないモデルが少なからず存在する。そこで本稿では、サーバの休止期間であるバケーションがない場合とある場合の両方について、ランダム順処理規則 ROS (Random Order of Service) に従うゲート式  $M^{[X]}/G/1$  システムを考察した。まず、遅延サイクルの考え方をを用いて、バケーションのない ROS 型ゲート式  $M^{[X]}/G/1$  システムの待ち時間の確率分布関数のラプラス・スティルチェス変換 (LST) を導出し、その 2 次までのモーメントを得た。次に、サービスサイクルの考え方をを用いて、バケーションのある ROS 型ゲート式  $M^{[X]}/G/1$  システムの待ち時間分布の LST を導出し、その 2 次までのモーメントを得た。その結果を数値計算によりグラフに表示し、特性を考察した。

### 1. 序論

$M/G/1$  システムは、基礎的待ち行列理論の中でも特に代表的なモデルである (Kleinrock[8])。メッセージは到着率  $\lambda$  の定常ポアソン過程に従って到着し、一般的な分布関数に従うサービス時間だけ処理を受ける。サーバは 1 人である。従来より通常のモデルのみならず、ゲート式サービスやバケーションのあるモデルなどさまざまなモデルについて研究がなされ、それらの結果は高木 [10] にまとめられている (参考文献は [10] に挙げられているので本稿では省略する)。また、 $M^{[X]}/G/1$  システムは  $M/G/1$  システムを拡張しメッセージが集団で到着する場合をも許すモデルであり、 $M/G/1$  システムと同様に多種のモデルに関する解析が望まれるが、未だ解析されていないモデルが少なからず存在する。そこで本稿では、バケーションがない場合とある場合の両方について、ランダム順処理規則に従うゲート式  $M^{[X]}/G/1$  システムを考察する。

バケーションとは、ある規則および間隔でサーバが機能を停止するものである。このモデルは、処理施設が本来の処理を停止しメンテナンスを行なう場合や、データ通信のためのポーリングシステムにおいて個々の端末に着目した性能解析などに適用される。なお、本稿では、多重バケーションの場合についてのみ考察するが、単一バケーションや準備時間のある場合についても待ち時間を計算することは、同様の方法により可能である。

ゲート式サービスとは、サーバの前に待合室が 2 つあって、その間にゲートがあり、以下のような規則に従ってゲートが開閉するシステムである (図 1)。

#### バケーションのない場合

サーバが稼働中はゲートは閉じており、サービスが完了したときに 2 番目の待合室が空であればゲートが開く。ゲートが閉じている間に到着するメッセージは 1 番目の待合室に收容され、ゲートが開くと直ちにそれらのすべてのメッセージが 2 番目の待合室に移動する。またメッセージがないときはつねにゲートは開かれ、メッセージが到

着すると直ちにサービスが始まってゲートは閉じる。

#### バケーションのある場合

サーバがサービス中あるいはバケーション中には、ゲートは閉じている。サーバがバケーションから戻ってきた瞬間、ゲートが開き、1番目の待合室にいたメッセージすべてが2番目の待合室に移動する。そしてゲートが閉じ、2番目の待合室にいる中からランダムに選ばれたメッセージがサービスを受ける。2番目の待合室にメッセージがなくなるとサーバはバケーションをとる。もしバケーションから戻ってきた時に1番目の待合室にメッセージがない場合には、もう1度バケーションをとる。以下これを繰り返す。

ランダム順処理規則 ROS (Random Order of Service) とは、到着順に関係なくサービス開始時点で存在するメッセージのうち1つが等確率で選ばれサービスされる処理規則である。すなわち、サービス開始時点でメッセージが  $n$  個あるときそれぞれのメッセージが  $1/n$  の確率で選び出される。この処理規則に該当するものには、1本の通信回線を多くの端末が共有し多重通信を行なうランダムアクセス方式の代表的プロトコルである CSMA (Carrier Sense Multiple Access), さらにより高速な通信を目指した FDDI (Fiber Distributed Data Interface), DQDB (Distributed Queue Dual Bus), CRMA [1] (Cyclic Reservation Multiple Access) 等がある。例えば CSMA においては、送信するメッセージを保有する端末は同時送信の結果生じる回線上での複数のメッセージの干渉が生起する確率をできるだけ小さくなるように、自律分散的に回線上へ送出するタイミングを決定するために、ネットワーク全体を観察したときに複数のメッセージが存在する場合に、これらが送信される順序はそれぞれの発生時点にはほとんど依存しない。従って通信回線をサーバとして、このシステム全体を待ち行列モデルとして記述するとき処理規則はランダムと見なすことができる。CRMA は、リング状の回線に端末が継っており、送信に先立ち、ヘッドエンドと呼ばれる送信端から送出される予約用のスロットに送りたいメッセージ数を全端末が書き込み、その結果に従って必要な空のスロットが生成され、送信端に近い端末から予約した数だけメッセージを送信するネットワークである。送信が継続中に到着したメッセージは、次の予約スロットまで送信が抑制される。従ってこの予約スロットを回線上に送出するのは、本稿で考察するモデルではゲートを開放することに相当する。またメッセージは発生順にスロットが確保できるのではなく、どの端末に発生するか、その端末のヘッドエンドからの位置に大きく依存するので、ゲートが開放されたときに存在するメッセージは、発生時点に依らず、ランダムに送信される。本稿で考察する待ち行列モデルは以上述べたように、近年の高速 LAN (Local Area Network), MAN (Metropolitan Area Network) などの1本の通信媒体を共有する通信システムのモデル化に適用可能と思われる。

また、集団到着のある場合にはそのサービス規則について2種類考えられる。ひとつは各々の集団を1つのスーパーメッセージとみなし、スーパーメッセージ単位でランダム順サービスを行ない、集団内では各々のメッセージのサービス順は、例えば、先頭から、あるいは最後尾からと予め決まっているものである。同じスーパーメッセージに属するメッセージは同時に到着するので、待ち時間分布に関しては、先頭から、最後尾から、あるいはランダ

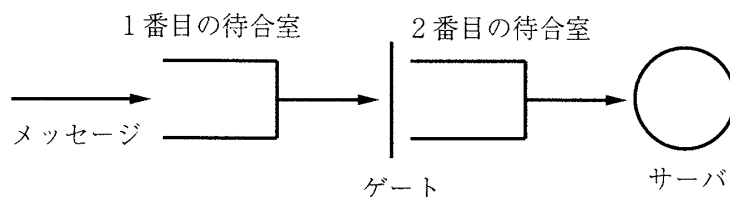


Figure 1. ゲート式サービスのモデル

ム順のいずれの規則で処理しても同じになる。従って以下では、ランダム順に処理すると仮定して議論を進める。もうひとつは、スーパーメッセージに無関係にすべてのメッセージからランダムに選ぶものである。後者の場合に関して、まだ研究されていないが、本稿では前者の場合に関して考察を加える。

これまで集団到着のある場合について解析されているものとしては、Burke[2]、Chaudhry and Templeton([3] の 172 ページ)、Cooper([6] の 5.10 節)、Kleinrock([8] の 235 ページ)、高木([10] の 44 ページ) などがあるが、いずれも ROS は扱っていない。また、これまで ROS 規則に従う非ゲート式  $M/G/1$  システムは、Cohen([4] の III.3.3 節)、Conolly([5] の 5.3.5 節)、Kingman[7]、Takács[9]、高木([10] の 40 ページ) において解析されている。また、ゲート式サービスについては、集団到着がなく後着順サービスの場合を Cooper([6] の 267 ページ)、高木([10] の 205 ページ) が取り挙げている。

本稿の構成は、次のとおりである。2章では遅延サイクルの考え方をを用いて、バケーションのない ROS 型ゲート式  $M^{[X]}/G/1$  システムの待ち時間の確率分布関数のラプラス・ステイルチェス変換 (LST) を導出し、その 2 次までのモーメントを計算する。3章ではサービスサイクルの考え方をを用いて、バケーションのある ROS 型ゲート式  $M^{[X]}/G/1$  システムの待ち時間分布の LST を導出し、その 2 次までのモーメントを得る。4章では 2、3章での結果に基づいてそれらのモデルでの待ち時間の平均および変動係数の数値計算を行い、その結果について考察する。

以下において、メッセージのサービス時間分布関数、その LST、平均、 $i$  次モーメントをそれぞれ  $B(x)$ 、 $B^*(s)$ 、 $b$ 、 $b^{(i)}$  と表す。また、集団のサイズ  $G$  が  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) である確率を  $g_k$ 、その母関数を  $G(z)$ 、その平均を  $g$ 、 $i$  次階乗モーメントを  $g^{(i)}$  とする。システムが安定であるための必要十分条件として、トラフィック密度 (サーバの稼働率)  $\rho \triangleq \lambda gb$  は 1 より小さいと仮定する。

## 2. バケーションのない ROS 型ゲート式 $M^{[X]}/G/1$ システムの待ち時間の解析

この章では、遅延サイクルを用いて、バケーションのない ROS 型ゲート式サービスの場合の待ち時間分布の LST を導出し、その 2 次までのモーメントを求める。まず、2.1 節で遅延サイクルについて説明し、そのモーメントを与え [8]、2.2 節で集団到着のない場合について待ち時間分布の LST を導出する。さらにそれを用いて 2.3 節で集団到着のある場合について待ち時間分布の LST を導出し、モーメントを計算する。

### 2.1. 遅延サイクル

バケーションのないシステムでは、サーバが休止 (アイドル) 中に集団メッセージが到着すると直ちにサービスが開始される。図 2 のように、サーバが休止中に到着した集団メッセージのサービス時間の合計を  $\theta_0$ 、その集団メッセージのサービスが終了してゲートが開いたときに 1 番目の待合室から 2 番目の待合室に移動したメッセージすべてのサービス時間の合計を  $\theta_1$  とする。 $\theta_1$  の間に到着したメッセージすべてのサービス時間の合計を  $\theta_2$  とする。以下同様にして  $\theta_m$  を定義する。図 2 では  $\theta_n$  の間にメッセージは到着していないが、このときサーバは休止する。 $\theta_0$  のはじめから  $\theta_n$  の終わりまでを遅延サイクルと呼ぶ。

$\theta_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) の確率分布関数、およびその LST をそれぞれ  $\theta_m(x)$ 、 $\theta_m^*(s)$  とする。 $\theta_{m+1}$  は  $\theta_m$  に依存し、その長さは  $\theta_m$  の間に到着したメッセージのサービスに要する時間の和となる。従って、集団到着のない場合では次式が成り立つ ([8] の 5.10 節)。

$$(2.1a) \quad \theta_0^*(s) = B^*(s)$$

$$(2.1b) \quad \theta_{m+1}^*(s) = \theta_m^*[\lambda - \lambda B^*(s)] \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(2.1) をそれぞれ微分し、 $s = 0$  を代入すると、次式を得る。

$$(2.2a) \quad E[\theta_0] = b$$

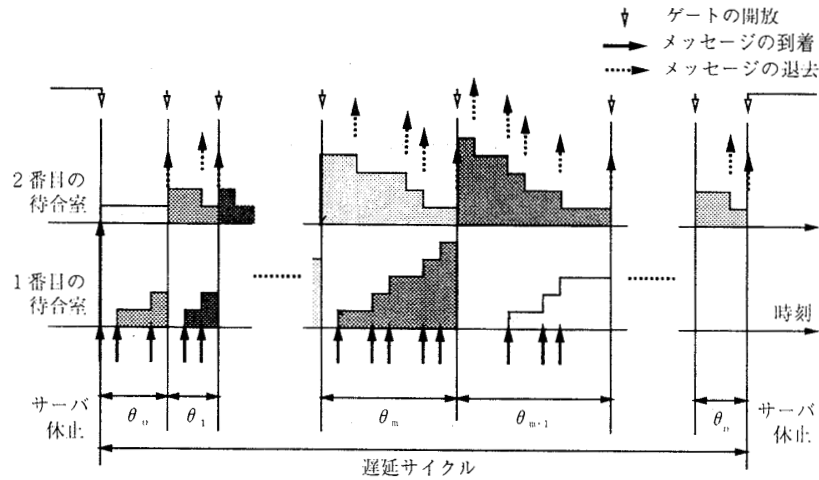


Figure 2. 遅延サイクル

$$(2.2b) \quad E[\theta_{m+1}] = \rho E[\theta_m] \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ここで、 $\rho = \lambda b$  である。 $\rho < 1$  を仮定しているので、(2.2) より、次式を得る。

$$(2.3a) \quad \sum_{m=0}^{\infty} E[\theta_m] = \frac{b}{1-\rho}$$

同様にして、2次および3次モーメントの和が次式のように得られる。

$$(2.3b) \quad \sum_{m=0}^{\infty} E[\theta_m^2] = \frac{b^{(2)}}{(1-\rho)(1-\rho^2)}$$

$$(2.3c) \quad \sum_{m=0}^{\infty} E[\theta_m^3] = \frac{b^{(3)}}{(1-\rho)(1-\rho^3)} + \frac{3\lambda\rho(b^{(2)})^2}{(1-\rho)(1-\rho^2)(1-\rho^3)}$$

また、集団到着のある場合には以下ようになる。

$$(2.4a) \quad \theta_{g,0}^*(s) = G[B^*(s)]$$

$$(2.4b) \quad \theta_{g,m+1}^*(s) = \theta_{g,m}^*[\lambda - \lambda G[B^*(s)]] \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

したがって、集団到着のある場合において(2.3)に対応するものは、(2.3)において $\rho = \lambda gb$ とし、 $b$ のかわりに $gb$ を、 $b^{(2)}$ のかわりに $gb^{(2)} + g^{(2)}b^2$ を、 $b^{(3)}$ のかわりに $gb^{(3)} + 3g^{(2)}bb^{(2)} + g^{(3)}b^3$ を用いた式で与えられる。

## 2.2. 集団到着のない場合

集団到着のない場合、トラヒック密度は $\rho = \lambda b$ である。メッセージの待ち時間を $W$ 、その確率分布関数のLSTを $W^*(s)$ とする。サーバが休止しているときと稼働しているときに分けて考える。サーバの休止中にメッセージが到着した場合、その待ち時間は0、そのLSTは1である。従って次式が成り立つ。

$$(2.5) \quad W^*(s) = 1 - \rho + \rho E[e^{-sW} | \text{busy}]$$

次にサーバの稼働時にメッセージが到着した場合を考える。任意のメッセージ $M$ に注目し、その待ち時間を考える。 $M$ が到着した $\theta_m$ の長さを $t$ 、 $\theta_m$ の残余時間 $Y$ の長さを $y$ 、 $\theta_m$ の

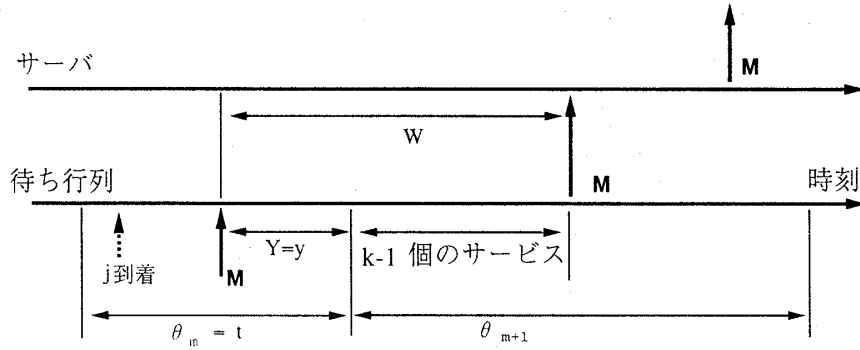


Figure 3.  $\theta_m$ に到着したメッセージ  $M$ の待ち時間

間に到着するメッセージが  $M$ 以外に  $j$ 個という条件を付けて考えると (図 3)、 $\theta_{m+1}$ のなかで  $M$ が  $k$ 番目にサービスされるときの待ち時間分布の LST は、次式のように表すことができる。

$$E[e^{-sW} | \theta_m = t, Y = y, j \text{ arrivals}, k\text{th service}] = e^{-sy} [B^*(s)]^{k-1}$$

$M$ が  $k$ 番目にサービスされる確率は  $1/(j+1)$  なので、 $k$ の条件を外すと、

$$\begin{aligned} E[e^{-sW} | \theta_m = t, Y = y, j \text{ arrivals}] &= \sum_{k=1}^{j+1} e^{-sy} [B^*(s)]^{k-1} \cdot \frac{1}{j+1} \\ &= \frac{e^{-sy}}{j+1} \cdot \frac{1 - [B^*(s)]^{j+1}}{1 - B^*(s)} \end{aligned}$$

$\theta_m = t$ の間に到着するメッセージ数はポアソン分布に従うので、 $j$ の条件を外すと、

$$\begin{aligned} E[e^{-sW} | \theta_m = t, Y = y] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-sy}}{j+1} \cdot \frac{1 - [B^*(s)]^{j+1}}{1 - B^*(s)} \cdot \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{e^{-sy-\lambda t}}{[1 - B^*(s)]\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{(\lambda t)^{j+1}}{(j+1)!} - \frac{(\lambda t B^*(s))^{j+1}}{(j+1)!} \right] \\ &= \frac{e^{-sy}(1 - e^{-\lambda t[1-B^*(s)]})}{\lambda t[1 - B^*(s)]} \end{aligned}$$

残余時間  $Y$ は  $[0, t]$ で一様分布する。すなわち、 $\text{Prob}[y < Y \leq y + dy] = dy/t$ なので ([8]の 5.2 節)、 $y$ の条件を外すと、

$$\begin{aligned} E[e^{-sW} | \theta_m = t] &= \int_0^t \frac{e^{-sy}(1 - e^{-\lambda t[1-B^*(s)]})}{\lambda t[1 - B^*(s)]} \cdot \frac{dy}{t} \\ &= \frac{(1 - e^{-st})(1 - e^{-\lambda t[1-B^*(s)]})}{\lambda t^2[1 - B^*(s)]s} \end{aligned}$$

$\theta_m$ の長さが  $[t, t + dt]$ である確率は、 $\text{Prob}[t < \theta_m \leq t + dt] = t d\theta_m(t)/E[\theta_m]$ なので ([8]の 5.2 節)、 $t$ の条件を外すと、

$$\begin{aligned} E[e^{-sW} | \text{arrival at } \theta_m] &= \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-st})(1 - e^{-\lambda t[1-B^*(s)]})}{\lambda t^2[1 - B^*(s)]s} \cdot \frac{t d\theta_m(t)}{E[\theta_m]} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-st})(1 - e^{-\lambda t[1-B^*(s)]})}{\lambda s[1 - B^*(s)]E[\theta_m]t} d\theta_m(t) \end{aligned}$$

$M$ が $\theta_m$ に到着する確率は、 $\text{Prob}[\text{arrival at } \theta_m] = E[\theta_m] / \sum_{n=0}^{\infty} E[\theta_n]$  なので ([8] の 5.10 節)、 $m$  の条件を外し、(2.3a) を用いると、

$$(2.6) \quad E[e^{-sW} | \text{busy}] = \sum_{m=0}^{\infty} E[e^{-sW} | \text{arrival at } \theta_m] \cdot \frac{E[\theta_m]}{\sum_{n=0}^{\infty} E[\theta_n]} \\ = \frac{1-\rho}{\rho} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(1-e^{-st})(1-e^{-\lambda t[1-B^*(s)]})}{s[1-B^*(s)]t} d\theta_m(t)$$

(2.5) に (2.6) を代入すると、次式が得られる。

$$(2.7) \quad W^*(s) = (1-\rho) \left\{ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(1-e^{-st})(1-e^{-\lambda t[1-B^*(s)]})}{s[1-B^*(s)]t} d\theta_m(t) \right\}$$

$W$  のモーメントは  $W^*(s)$  を  $s$  について級数展開することにより求められる。まず、

$$(2.8) \quad 1 - e^{-st} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-st)^i}{i!}$$

$$(2.9) \quad 1 - e^{-\lambda t[1-B^*(s)]} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-\lambda t[1-B^*(s)])^j}{j!}$$

と級数展開すると、

$$(2.10) \quad \frac{(1-e^{-st})(1-e^{-\lambda t[1-B^*(s)]})}{s[1-B^*(s)]t} = \lambda t \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-st)^{i-1}}{i!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-\lambda t[1-B^*(s)])^{j-1}}{j!}$$

さらに

$$(2.11) \quad 1 - B^*(s) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{(k)}(-s)^k}{k!}$$

を (2.10) に代入して整理すると、

$$(2.12) \quad \frac{(1-e^{-st})(1-e^{-\lambda t[1-B^*(s)]})}{s[1-B^*(s)]t} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-s)^{i-1} \lambda^{j-1}}{i! j!} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{(k)}(-s)^k}{k!} \right]^{j-1} \cdot t^{i+j-1}$$

(2.12) を (2.7) に代入して整理すると、

$$(2.13) \quad W^*(s) = (1-\rho) \left\{ 1 + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-s)^{i-1} \lambda^{j-1}}{i! j!} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{(k)}(-s)^k}{k!} \right]^{j-1} \cdot E[\theta_m^{i+j-1}] \right] \right\}$$

$W$  のモーメントを 2 次まで得るために、(2.13) において  $s$  の 3 次以上の項を省略し、(2.3) を用いると、次式のようになる。

$$(2.14) \quad W^*(s) = (1-\rho) \left\{ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda \left[ E[\theta_m] + \frac{\lambda}{2!} [-bs + \frac{b^{(2)}}{2} s^2] E[\theta_m^2] + \frac{\lambda^2 b^2 s^2}{3!} E[\theta_m^3] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{-s}{2!} \left( E[\theta_m^2] + \frac{\lambda}{2!} (-bs) E[\theta_m^3] \right) + \frac{(-s)^2}{3!} E[\theta_m^3] + o(s^2) \right] \right\} \\ = (1-\rho) \left\{ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda \left[ E[\theta_m] - s \left( \frac{(1+\rho) E[\theta_m^2]}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + s^2 \left( \frac{\lambda b^{(2)} E[\theta_m^2]}{4} + \frac{(2 + 3\rho + 2\rho^2) E[\theta_m^3]}{12} \right) + o(s^2) \right\} \\
 = & 1 - s \cdot \frac{b}{1 - \rho} \\
 & + \frac{s^2}{2} \left[ \frac{(2 + 3\rho + 2\rho^2) \lambda b^{(3)}}{6(1 - \rho^3)} + \frac{(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \rho^3) [\lambda b^{(2)}]^2}{2(1 - \rho^2)(1 - \rho^3)} \right] + o(s^2)
 \end{aligned}$$

(2.14) より  $W$  の 2 次までのモーメントは次式のように得られる。

$$(2.15a) \quad E[W] = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1 - \rho)}$$

$$(2.15b) \quad E[W^2] = \frac{(2 + 3\rho + 2\rho^2) \lambda b^{(3)}}{6(1 - \rho^3)} + \frac{(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \rho^3) [\lambda b^{(2)}]^2}{2(1 - \rho^2)(1 - \rho^3)}$$

(2.15a) は非ゲート式 M/G/1 システム の場合 (よく知られた Pollaczek-Khinchin の平均値公式 [10] の 1 章の (1.46a)) と一致するが、これは本システムのようにサービス規則が待っているメッセージのサービス時間についての情報を利用しないシステムでは 待ち行列長がサービス規則に依存しないということ ([10] の 3 ページ) と、Little の公式 ([8] の 5.5 節) から明らかである。また、(2.15b) は先着順サービスの場合 ([10] の 1 章の (1.46b)) より大きく、ゲート式サービスの後着順サービスの場合 ([10] の 1 章の (3.11b)) より小さい。また、ROS 型 非ゲート式サービスの待ち時間の 2 次モーメント ([10] の 1 章の (3.38b)) と比べても小さい。

### 2.3. 集団到着のある場合

注目するメッセージを  $M$  とすれば、 $M$  の属するスーパーメッセージがサービスされ始めるまでの待ち時間分布関数の LST を  $W_g^*(s)$ 、それから  $M$  がサービスされるまでの待ち時間分布関数の LST を  $D^*(s)$  とすれば、求める待ち時間分布関数の LST は次式のように表すことができる。

$$W^*(s) = W_g^*(s) D^*(s)$$

まず、 $W_g^*(s)$  を求める。各々のスーパーメッセージのサービス時間分布関数の LST を  $B_g^*(s)$  とすると、

$$B_g^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} [B^*(s)]^k g_k = G[B^*(s)]$$

(2.7) において、 $B^*(s)$  のかわりに  $B_g^*(s)$  を用いることにより、次式を得る。

$$(2.16) \quad W_g^*(s) = (1 - \rho) \left\{ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-st})(1 - e^{-\lambda t \{1 - G[B^*(s)]\}})}{s \{1 - G[B^*(s)]\} t} d\theta_{g,m}(t) \right\}$$

ここで、 $\theta_{g,m}(x)$  は 集団到着のある場合の遅延サイクルにおける、 $\theta_m$  の確率分布関数である。

(2.16) のモーメントは、(2.15) において、 $b^{(2)}$  のかわりに  $gb^{(2)} + g^{(2)}b^2$  を、 $b^{(3)}$  のかわりに  $gb^{(3)} + 3g^{(2)}bb^{(2)} + g^{(3)}b^3$  を用いた 次式で与えられる。

$$(2.17a) \quad E[W_g] = \frac{\lambda [gb^{(2)} + g^{(2)}b^2]}{2(1 - \rho)}$$

$$(2.17b) \quad E[W_g^2] = \frac{(2 + 3\rho + 2\rho^2) \lambda [gb^{(3)} + 3g^{(2)}bb^{(2)} + g^{(3)}b^3]}{6(1 - \rho^3)} + \frac{(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \rho^3) (\lambda [gb^{(2)} + g^{(2)}b^2])^2}{2(1 - \rho^2)(1 - \rho^3)}$$

次に、 $D^*(s)$  を求める ([6] の 2.1 節、[10] の 1.4 節)。 $M$  が属する集団のサイズ  $G$  が  $j$  である確率は、次式で与えられる。

$$\frac{jg_j}{g} \quad j = 1, 2, \dots$$

$M$  が集団の中で占める位置の確率は各々  $1/j$  なので、 $M$  の前にあるメッセージの数を  $G_-$  とすれば、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{Prob}[G_- = k] &= \sum_{j=1}^{\infty} \text{Prob}[G_- = k | G = j] \text{Prob}[G = j] \\ &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{g_j}{g} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

したがって、 $G_-$  の母関数  $G_-(z)$  は次式のように得られる。

$$\begin{aligned} G_-(z) &= \frac{1}{g} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=k+1}^{\infty} g_j \\ &= \frac{1 - G(z)}{g(1 - z)} \end{aligned}$$

$D^*(s)$  は、 $M$  の前にあるメッセージがサービスされる時間の合計であるから、次式を得る。

$$\begin{aligned} (2.18) \quad D^*(s) &= G_-[B^*(s)] \\ &= \frac{1 - G[B^*(s)]}{g[1 - B^*(s)]} \end{aligned}$$

(2.18) より、 $D$  の 2 次までのモーメントが以下のように得られる。

$$(2.19a) \quad E[D] = \frac{g^{(2)}b}{2g}$$

$$(2.19b) \quad E[D^2] = \frac{g^{(3)}b^2}{3g} + \frac{g^{(2)}b^{(2)}}{2g}$$

(2.17) (2.19) より、 $W$  の 2 次までのモーメントは次式のように得られる。

$$\begin{aligned} (2.20a) \quad E[W] &= E[W_g] + E[D] \\ &= \frac{\lambda g b^{(2)}}{2(1 - \rho)} + \frac{g^{(2)}b}{2g(1 - \rho)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.20b) \quad E[W^2] &= E[W_g^2] + E[D^2] + 2E[W_g]E[D] \\ &= \frac{(2 + 3\rho + 2\rho^2)\lambda g b^{(3)}}{6(1 - \rho^3)} + \frac{(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \rho^3)(\lambda g b^{(2)})^2}{2(1 - \rho^2)(1 - \rho^3)} \\ &\quad + \frac{(2 + 2\rho + 3\rho^2)g^{(3)}b^2}{6g(1 - \rho^3)} + \frac{(1 + 3\rho + 5\rho^2 + 3\rho^3 + 2\rho^4)g^{(2)}b^{(2)}}{2g(1 - \rho^2)(1 - \rho^3)} \\ &\quad + \frac{(1 + 2\rho + 2\rho^2 + 2\rho^3)\lambda g^{(2)}b^3}{2g(1 - \rho^2)(1 - \rho^3)} \end{aligned}$$

(2.20) についても、(2.15) のときと同じような諸関係が成り立つ。



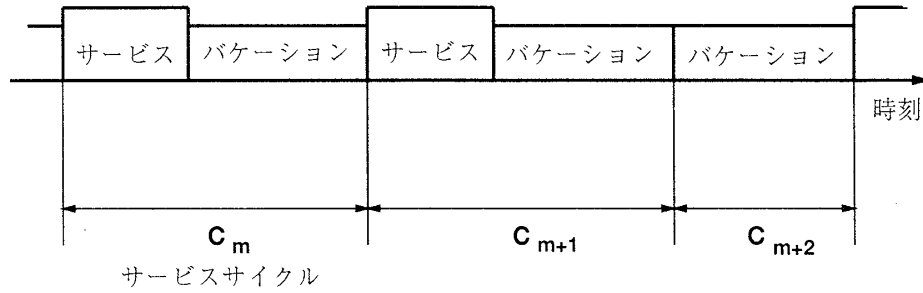


Figure 4. サービスサイクル

3. バケーションのある ROS 型 ゲート式  $M^{[X]}/G/1$  システムの待ち時間の解析

この章では、サービスサイクルを用いて、バケーションのあるゲート式サービスの待ち時間分布の LST を導出し、その 2 次までのモーメントを求める。まず 3.1 節でサービスサイクルについて説明し、そのモーメントを与え [10]、3.2 節で集団到着のない場合について待ち時間分布の LST を導出する。さらにそれを用いて 3.3 節で集団到着のある場合について待ち時間分布の LST を導出し、モーメントを計算する。

3.1. サービスサイクル

1 つのバケーションの長さの確率分布関数とその LST をそれぞれ  $V(x)$ 、 $V^*(s)$  とする。図 4 のように、1 つのバケーションの終わりから次のバケーションの終わりまでをサービスサイクルと呼ぶ ([10] の 109 ページの図 2.1)。

いま、 $m$  番目のサービスサイクルの長さを表す確率変数を  $C_m$  とする ( $C_0$  は適当に定める)。このとき、 $C_{m+1}$  は、 $C_m$  中に到着したメッセージをサービスするのに要する時間とバケーションの長さの和となる。すなわち、 $\{C_m, m = 0, 1, \dots\}$  はマルコフ過程であり、集団到着のない場合における  $C_m$  の長さの確率分布関数の LST を  $C_m^*(s)$  とすると次の式が成り立つ。

$$(3.1) \quad C_{m+1}^*(s) = C_m^*[\lambda - \lambda B^*(s)]V^*(s)$$

したがって、 $C_m$  の定常状態における 確率分布関数の LST を

$$(3.2) \quad C^*(s) \triangleq \lim_{m \rightarrow \infty} C_m^*(s)$$

とすると、定常状態では、次の式が成り立つ。

$$(3.3) \quad C^*(s) = C^*[\lambda - \lambda B^*(s)]V^*(s)$$

(3.3) を微分し、 $s = 0$  を代入すると、次式を得る。

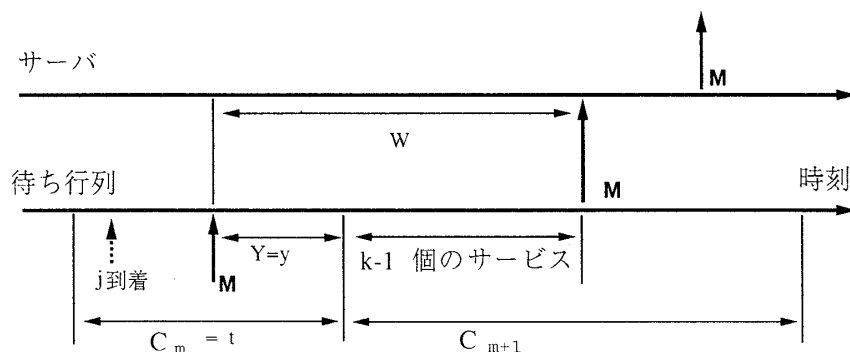
$$(3.4a) \quad E[C] = \frac{E[V]}{1 - \rho}$$

同様にして、 $C$  の 2 次および 3 次のモーメントが以下のように得られる。<sup>1</sup>

$$(3.4b) \quad E[C^2] = \frac{(1 - \rho)E[V^2] + \lambda b^{(2)}E[V] + 2\rho(E[V])^2}{(1 - \rho)(1 - \rho^2)}$$

$$(3.4c) \quad E[C^3] = \frac{6(\rho E[V])^3 + 3\rho(\lambda b^{(2)})^2 E[V] + 3\lambda b^{(2)}(1 + 2\rho^2)(E[V])^2}{(1 - \rho)(1 - \rho^2)(1 - \rho^3)} + \frac{3\rho(1 + 2\rho)E[V]E[V^2] + 3\rho\lambda b^{(2)}E[V^2]}{(1 - \rho^2)(1 - \rho^3)} + \frac{\lambda b^{(3)}E[V]}{(1 - \rho)(1 - \rho^3)} + \frac{E[V^3]}{1 - \rho^3}$$

<sup>1</sup>(3.4c) は、高木 [10] の 208 ページの  $Q^{(3)}(1)$  に対する式 (5.22b) の誤植を訂正した結果と一致する。

Figure 5.  $C_m$ に到着したメッセージ  $M$ の待ち時間

集団到着のある場合も同様にして次式を得る。

$$(3.5) \quad C_g^*(s) = C_g^*[\lambda - \lambda G[B^*(s)]]V^*(s)$$

ここで、 $C_g^*(s)$  は、集団到着のある場合における、サービスサイクルの長さの確率分布関数の LST である。

### 3.2. 集団到着のない場合

集団到着のない場合には、図5のように、注目するメッセージ  $M$  が到着した  $C_m$  の長さを  $t$ 、 $C_m$  の残余時間  $Y$  の長さを  $y$ 、 $C_m$  の間に到着するメッセージが  $M$  以外に  $j$  個という条件を付けて考えると、 $C_{m+1}$  のなかで  $M$  が  $k$  番目にサービスされるとき待ち時間分布関数の LST は、次式で与えられる。

$$E[e^{-sW} | C_m = t, Y = y, j \text{ arrivals, } k\text{th service}] = e^{-sy} [B^*(s)]^{k-1}$$

2.2節と同じようにして順次条件を外していくと次式を得る。

$$(3.6) \quad \begin{aligned} W^*(s) &= \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-st})(1 - e^{-\lambda t[1 - B^*(s)]})}{\lambda t^2 [1 - B^*(s)] s} \cdot \frac{t dC(t)}{E[C]} \\ &= \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-st})(1 - e^{-\lambda t[1 - B^*(s)]})}{\lambda s [1 - B^*(s)] E[C] t} dC(t) \\ &= \frac{1 - \rho}{\lambda E[V]} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-st})(1 - e^{-\lambda t[1 - B^*(s)]})}{s [1 - B^*(s)] t} dC(t) \end{aligned}$$

ここで、2.2節と同様に (3.6) に (2.8)(2.9)(2.11) を代入して整理すると次式を得る。

$$(3.7) \quad W^*(s) = \frac{1 - \rho}{E[V]} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-s)^{i-1} \lambda^{j-1}}{i! j!} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{(k)} (-s)^k}{k!} \right]^{j-1} \cdot E[C^{i+j-1}]$$

次に (3.7) から  $W$  のモーメントを求める。(3.7) は次式のように書き直すことができる。

$$(3.8) \quad \begin{aligned} W^*(s) &= \frac{1 - \rho}{E[V]} \left\{ E[C] + \frac{\lambda}{2!} \left( -bs + \frac{b^{(2)}}{2} s^2 \right) E[C^2] + \frac{\lambda^2 b^2 s^2}{3!} E[C^3] \right. \\ &\quad \left. + \frac{-s}{2!} \left( E[C^2] + \frac{\lambda}{2!} (-bs) E[C^3] \right) + \frac{(-s)^2}{3!} E[C^3] + o(s^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1-\rho}{E[V]} \left\{ E[C] - s \left( \frac{(1+\rho)E[C^2]}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + s^2 \left( \frac{\lambda b^{(2)}E[C^2]}{4} + \frac{(2+3\rho+2\rho^2)E[C^3]}{12} \right) + o(s^2) \right\} \\
 &= 1 - s \cdot \frac{(1-\rho^2)E[C^2]}{2E[V]} \\
 &\quad + \frac{s^2}{2} \cdot \frac{1-\rho}{E[V]} \left[ \frac{\lambda b^{(2)}E[C^2]}{2} + \frac{(2+3\rho+2\rho^2)E[C^3]}{6} \right] + o(s^2)
 \end{aligned}$$

(3.8) と (3.4) を用いて  $W$  の 2 次までのモーメントは次式のように得られる。

$$(3.9a) \quad E[W] = \frac{(1-\rho^2)E[C^2]}{2E[V]}$$

$$= \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{\rho E[V]}{1-\rho} + \frac{E[V^2]}{2E[V]}$$

$$(3.9b) \quad E[W^2] = \frac{1-\rho}{E[V]} \left[ \frac{\lambda b^{(2)}E[C^2]}{2} + \frac{(2+3\rho+2\rho^2)E[C^3]}{6} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2+3\rho+2\rho^2)\lambda b^{(3)}}{6(1-\rho^3)} + \frac{(1+2\rho+3\rho^2+\rho^3)[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1-\rho^2)(1-\rho^3)} \\
 &\quad + \frac{(2+5\rho+6\rho^2+6\rho^3+2\rho^4)\lambda b^{(2)}E[V]}{2(1-\rho^2)(1-\rho^3)} + \frac{\rho^3(2+3\rho+2\rho^2)(E[V])^2}{(1-\rho^2)(1-\rho^3)} \\
 &\quad + \frac{\rho(1+2\rho)(2+3\rho+2\rho^2)E[V^2]}{2(1+\rho)(1-\rho^3)} \\
 &\quad + \frac{(1+2\rho+3\rho^2+\rho^3)\lambda b^{(2)}E[V^2]}{2(1+\rho)(1-\rho^3)E[V]} + \frac{(2+3\rho+2\rho^2)E[V^3]}{6(1+\rho+\rho^2)E[V]}
 \end{aligned}$$

(3.9a) の右辺の第 1 項と (3.9b) の右辺のはじめの 2 つの項は、バケーションのない場合のそれぞれのモーメント (2.15a)(2.15b) と同じ式であり、従って (3.9a)(3.9b) は  $E[V] \rightarrow 0, E[V^2]/E[V] \rightarrow 0, E[V^3]/E[V] \rightarrow 0$  のときそれぞれ (2.15a)(2.15b) に近づく。また、(3.9a) から、バケーションのあるゲート式  $M/G/1$  システムの待ち時間の平均はサービス順に関係なく等しいことがわかる (これも Little の公式から明らかである)。また、(3.9b) は、バケーションのあるゲート式  $M/G/1$  システムの先着順サービスの場合 ([10] の 2 章の (5.24b)) より大きく、同じモデルでの後着順サービスの場合 ([10] の 2 章の (5.62b)) より小さい。また、(3.9b) をバケーションのある非ゲート式 ROS 型  $M/G/1$  システムの待ち時間の 2 次モーメント ([10] の 2 章の (3.18b)) と比べると、 $E[V^i]$  の値によって大小関係が変わることがわかる。

### 3.3. 集団到着のある場合

集団到着のある場合には、2.3 節と同様に、次式が成り立つ。

$$W^*(s) = W_g^*(s)D^*(s)$$

まず、 $W_g^*(s)$  を求める。各々のスーパーメッセージのサービス時間分布関数の LST を  $B_g^*(s)$  とすると、(3.6) において、 $B^*(s)$  のかわりに  $B_g^*(s)$  を用いることにより、次式を得る。

$$(3.10) \quad W_g^*(s) = \frac{1-\rho}{\lambda E[V]} \int_0^\infty \frac{(1-e^{-st})(1-e^{-\lambda t\{1-G[B^*(s)]\}})}{s\{1-G[B^*(s)]\}t} dC_g(t)$$

(3.10) から得られるモーメントは、(3.9a)(3.9b)において、 $b^{(2)}$ のかわりに  $gb^{(2)} + g^{(2)}b^2$ を、 $b^{(3)}$ のかわりに  $gb^{(3)} + 3g^{(2)}bb^{(2)} + g^{(3)}b^3$ を用いた次式で与えられる。

$$(3.11a) E[W_g] = \frac{\lambda[gb^{(2)} + g^{(2)}b^2]}{2(1-\rho)} + \frac{\rho E[V]}{1-\rho} + \frac{E[V^2]}{2E[V]}$$

$$(3.11b) E[W_g^2] = \frac{(2+3\rho+2\rho^2)\lambda[gb^{(3)} + 3g^{(2)}bb^{(2)} + g^{(3)}b^3]}{6(1-\rho^3)} \\ + \frac{(1+2\rho+3\rho^2+\rho^3)(\lambda[gb^{(2)} + g^{(2)}b^2])^2}{2(1-\rho^2)(1-\rho^3)} \\ + \frac{(2+5\rho+6\rho^2+6\rho^3+2\rho^4)\lambda(gb^{(2)} + g^{(2)}b^2)E[V]}{2(1-\rho^2)(1-\rho^3)} \\ + \frac{\rho^3(2+3\rho+2\rho^2)(E[V])^2}{(1-\rho^2)(1-\rho^3)} \\ + \frac{\rho(1+2\rho)(2+3\rho+2\rho^2)E[V^2]}{2(1+\rho)(1-\rho^3)} \\ + \frac{(1+2\rho+3\rho^2+\rho^3)\lambda[gb^{(2)} + g^{(2)}b^2]E[V^2]}{2(1+\rho)(1-\rho^3)E[V]} + \frac{(2+3\rho+2\rho^2)E[V^3]}{6(1+\rho+\rho^2)E[V]}$$

次に、 $D^*(s)$  は2.3節と全く同じであり、(2.18)(2.19) が成り立つ。(3.11) (2.19) より、 $W$  のモーメントは次式のように得られる。

$$(3.12a) E[W] = \frac{\lambda gb^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{g^{(2)}b}{2g(1-\rho)} + \frac{\rho E[V]}{1-\rho} + \frac{E[V^2]}{2E[V]}$$

$$(3.12b) E[W^2] = \frac{(2+3\rho+2\rho^2)\lambda gb^{(3)}}{6(1-\rho^3)} + \frac{(1+2\rho+3\rho^2+\rho^3)(\lambda gb^{(2)})^2}{2(1-\rho^2)(1-\rho^3)} \\ + \frac{(2+2\rho+3\rho^2)g^{(3)}b^2}{6g(1-\rho^3)} + \frac{(1+3\rho+5\rho^2+3\rho^3+2\rho^4)g^{(2)}b^{(2)}}{2g(1-\rho^2)(1-\rho^3)} \\ + \frac{(1+2\rho+2\rho^2+2\rho^3)\lambda g^{(2)2}b^3}{2g(1-\rho^2)(1-\rho^3)} + \frac{(4+7\rho+6\rho^2+4\rho^3)\lambda g^{(2)}b^2 E[V]}{2(1-\rho^2)(1-\rho^3)} \\ + \frac{(2+5\rho+6\rho^2+6\rho^3+2\rho^4)\lambda gb^{(2)} E[V]}{2(1-\rho^2)(1-\rho^3)} \\ + \frac{\rho^3(2+3\rho+2\rho^2)(E[V])^2}{(1-\rho^2)(1-\rho^3)} \\ + \frac{\rho(1+2\rho)(2+3\rho+2\rho^2)E[V^2]}{2(1+\rho)(1-\rho^3)} \\ + \frac{(1+2\rho+3\rho^2+\rho^3)\lambda gb^{(2)} E[V^2]}{2(1+\rho)(1-\rho^3)E[V]} \\ + \frac{(1+2\rho+2\rho^2+2\rho^3)g^{(2)}b E[V^2]}{2g(1+\rho)(1-\rho^3)E[V]} \\ + \frac{(2+3\rho+2\rho^2)E[V^3]}{6(1+\rho+\rho^2)E[V]}$$

(3.12) についても、(3.9) のときと同じような諸関係が成り立つ。

#### 4. 数値計算

以上のモデルにおいて得られた待ち時間分布に関する解析結果を以下の具体例に適用し、待ち時間  $W$  の平均および変動係数を図 6~9 に示す。ここで、変動係数  $C_W$  は次式で定義される。

$$C_W \triangleq \frac{\sqrt{E[W^2] - (E[W])^2}}{E[W]}$$

サービス時間の分布関数としては、集団到着のない場合では、指数分布、5 次のアーラン分布、一定分布 (各サービス分布とも平均は 5) を仮定し、それぞれにつき数値計算し、比較を行なった。また、集団到着のある場合では、サービス時間は平均 0.2 の指数分布に従うとし、集団到着のサイズ  $G$  の分布が幾何分布、1~9 の値を取る一様分布 (どちらも平均サイズは 5) であるときに、それぞれにつき数値計算を行なった。

##### 4.1. 集団到着のない場合

図 6 では、バケーションおよび集団到着がともない場合における、各サービス時間分布に対する待ち時間の平均と変動係数を示した。図 6a より、平均待ち時間は  $\rho$  が大きくなるにつれて単調増加し、 $\rho = 0.9$  のあたりから急激に大きくなることが観察される。これは後述のすべてのモデルについて成り立つ。また、図 6b より、各サービスとも、変動係数は  $\rho$  が大きくなるにつれて単調減少している。また、どのサービス時間分布についても  $\rho \rightarrow 1$  のときある 1 点に近づいているのが観察される。実際、(2.15) より変動係数を求め、 $\rho \rightarrow 1$  とすると、 $\sqrt{4/3} \simeq 1.155$  に収束することがわかる。

図 7 では、バケーション時間が一定で (その値を 10 とする) 集団到着がない場合における、各サービス時間分布に対する待ち時間の平均と変動係数を示した。図 7b より、どのサービス時間分布についても、変動係数は  $\rho \rightarrow 0$  のとき  $\sqrt{1/3} \simeq 0.577$  に収束することが観察される。実際、(3.9) より変動係数を求め、 $\rho \rightarrow 0$  とすると

$$C_W \rightarrow \sqrt{\frac{4E[V]E[V^3] - 3(E[V^2])^2}{3(E[V^2])^2}}$$

に収束することがわかる。サービス時間が指数分布の場合、 $C_W$  が  $\rho$  の単調な関数でないことは注目に値する。

##### 4.2. 集団到着のある場合

図 8 では、バケーションがなく、サービス時間が平均 0.2 の指数分布の場合における、各々の集団到着のサイズ分布に依存した待ち時間の平均と変動係数を示した。図 8b より、どの集団到着のサイズ分布についても  $\rho \rightarrow 1$  のとき変動係数はある 1 点に近づいているのが観察される。実際、(2.20) より変動係数を算出し、 $\rho \rightarrow 1$  とすると  $\sqrt{4/3} \simeq 1.155$  に収束する。このことから、バケーションのない場合には集団到着の有無に関係なく、 $\rho \rightarrow 1$  のとき  $\sqrt{4/3}$  に近づくことがわかる。

図 9 では、バケーション時間が長さ 10 の一定値、サービス時間が平均 0.2 の指数分布の場合における、各々の集団到着のサイズ分布に依存した待ち時間の平均と変動係数を示した。図 9 から、バケーションおよび集団到着がともにある場合には、共通する待ち時間の変動係数の収束値は特に存在しないことがわかる。

#### 5. 結論と今後の課題

本稿では、ROS 型ゲート式  $M^{[X]}/G/1$  システムの待ち時間の解析を行ない、それに基づいて待ち時間の平均と変動係数の数値計算を行なった。得られた結果から以下の特性が確認された。

- 平均待ち時間はサービス規則によらず一定である。また、トラフィック密度が大きくなるとともに平均待ち時間も増大する。
- ランダム順処理規則による待ち時間の変動係数は 先着順の場合より大きくゲート式後着順の場合より小さい。また、バケーションのない場合には ROS 型非ゲート式サービスと比べても小さい。
- 待ち時間の変動係数はトラフィック密度が 1 に近づくに従って小さくなり、特にバケーションがない場合には  $\sqrt{4/3}$  に収束する。
- バケーションがあり集団到着がない場合には、待ち時間の変動係数はトラフィック密度が 0 に近づくに従って、バケーション時間の 3 次までのモーメントから決まる一定の値に収束する。

また、本稿ではゲート式サービスのみをとりあげたが、ROS 規則に従う非ゲート式  $M^{[X]}/G/1$  システムのバケーションがない場合とある場合の両方については、本著者より別の論文で紹介する予定である。

### [謝辞]

高木の研究の一部は、財団法人 電気通信普及財団から平成 6 年度研究調査助成金を受けており、これを感謝します。また、匿名の査読者による有益なコメントに感謝します。また高橋の研究は文部省科学研究費補助金（課題番号 05680313）の支援のもとに行なわれた。

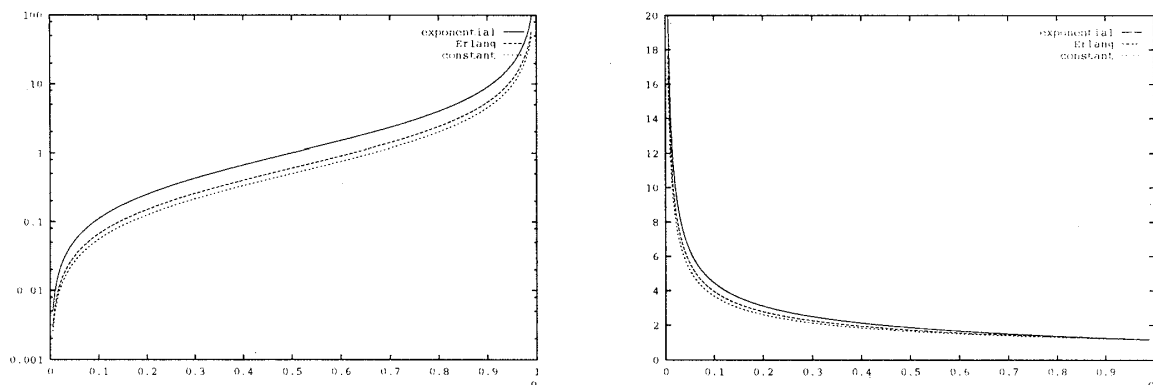


Figure 6a. バケーション・集団到着がともない場合の平均待ち時間  
Figure 6b. バケーション・集団到着がともない場合の待ち時間の変動係数

### 参考文献

- [1] Boxma, O. J., Levy, H., and Yechiali, U., "Cyclic reservation schemes for efficient operation of multiple-queue single-server systems", *Annals of Operations Research*, Vol.35, No.1-4, pp.187-208, 1992.
- [2] Burke, P.J., "Delays in single-server queues with batch input", *Operations Research*, Vol.23, No.4(July-August), pp.830-833, 1975.
- [3] Chaudhry, M.L., and Templeton, J.G.C., *A First Course in Bulk Queues*, John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [4] Cohen, J.W., *The Single Server Queue*, revised edition, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982, (first edition: 1969).

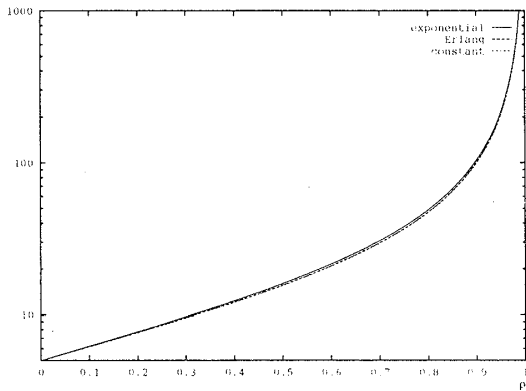


Figure 7a. バケーションが一定分布、集団到着がない場合の平均待ち時間

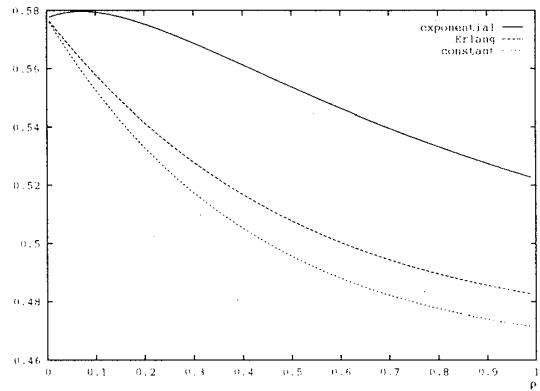


Figure 7b. バケーションが一定分布、集団到着がない場合の待ち時間の変動係数

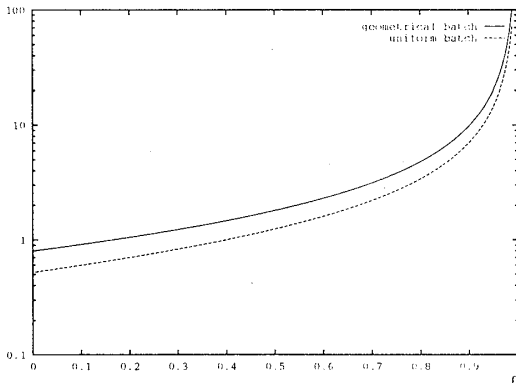


Figure 8a. バケーションがなく、集団到着がある場合の平均待ち時間

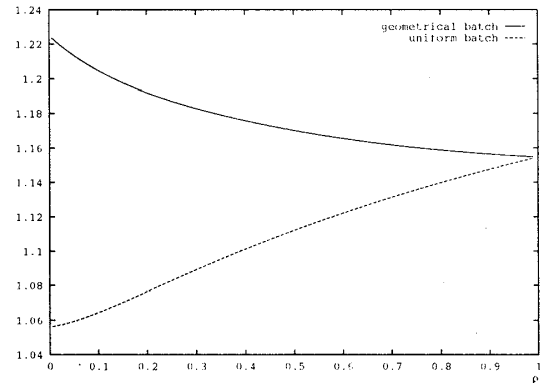


Figure 8b. バケーションがなく、集団到着がある場合の待ち時間の変動係数

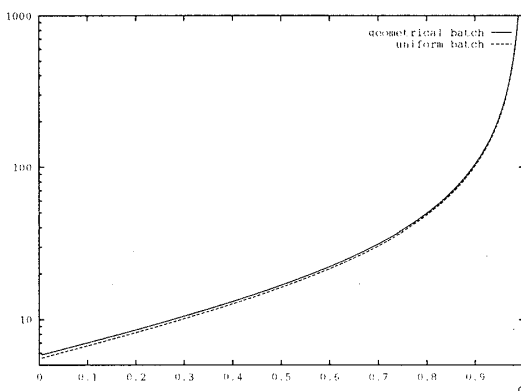


Figure 9a. バケーションが一定分布、集団到着がある場合の平均待ち時間

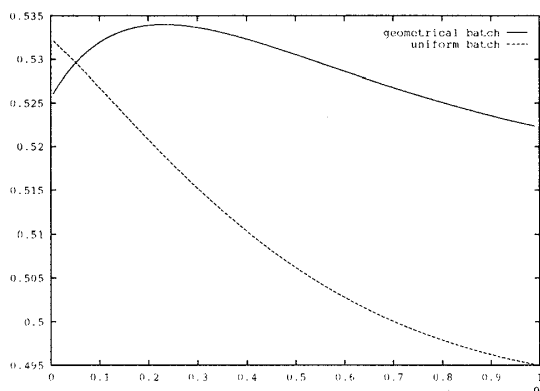


Figure 9b. バケーションが一定分布、集団到着がある場合の待ち時間の変動係数

- [5] Conolly, B., *Lecture Notes on Queueing Systems*, Ellis Horwood Limited, Sussex, England, 1975.
- [6] Cooper, R. B., *Introduction to Queueing Theory*, Second Edition, North-Holland Publishing Company, New York, 1981, (First Edition: Macmillan, New York, 1972), republished by the Continuing Engineering Education Program, The George Washington University, Washington D.C., 1990.
- [7] Kingman, J. F. C., "On queues in which customers are served in random order", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 58, pp. 163-164, 1962.
- [8] Kleinrock, L., *Queueing Systems Volume 1: Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1975. (手塚、真田、中西共訳、待ち行列システム理論、マグロウヒル好学社、1978.)
- [9] Takács, L., "Delay distributions for one line with Poisson input, general holding times, and various orders of service", *The Bell System Technical Journal*, Vol. 42, No. 2 (March), pp. 487-503, 1963.
- [10] Takagi, H., *Queueing Analysis, Volume 1, Vacation and Priority Systems*, Elsevier, Amsterdam, 1991.

高橋 豊

〒 630-01

奈良県生駒市高山町 8916-5

奈良先端科学技術大学院大学

#### ABSTRACT

### ANALYSIS OF THE WAITING TIME IN $M^{[X]}/G/1$ QUEUES WITH GATED RANDOM ORDER OF SERVICE

Norikazu Kawasaki  
*Kyoto University*

Hideaki Takagi  
*University of Tsukuba*

Yutaka Takahashi  
*Nara Institute of  
Science and Technology*

Toshiharu Hasegawa  
*Kyoto University*

Relatively few models of  $M^{[X]}/G/1$  queues, an important extension of  $M/G/1$  queues that permit batch arrivals of messages, have been studied in the literature. In this paper, we consider  $M^{[X]}/G/1$  queues with gated random order of service, for both cases in which the server does not take vacations and in which it does when the queue is empty. For a vacationless model, we use the method of delay cycles analysis to derive the Laplace-Stieltjes transform (LST) of the distribution function (DF) for the message waiting time, and obtain its mean and second moment. For a system with multiple server vacations, we investigate service cycles for a similar analysis. Numerical values for the waiting time are plotted for various settings of parameters, with discussion on its characteristics.