

必然性測度に基づくファジィ・スパニング・ツリー問題の一解法

伊藤 健 石井博昭
大阪大学

(受理 1994 年 6 月 20 日; 再受理 1995 年 3 月 15 日)

和文概要 離散決定変数を扱った数理計画問題の一つに、スパニング・ツリー問題が存在する。グラフに設定されたコストの和を最小にする連結部分グラフを見つけ出すのであるが、現実社会においては様々な理由により不確実性が生じ、このコストを不確実値として設定しなければならない場合がある。この不確実性要素を確率変数とし、確率計画法により問題を解くことが考えられるが、従来は不確実性要素が確率的変動を示さない場合でもこの様な手法を用いることが多かった。

そこで、我々は確率的ではない不確実性要素として、ファジィ理論で定義される可能性変数を導入し、ファジィ・スパニング・ツリー問題を提案する。さらに、連続決定変数ではなく離散決定変数を扱ったこの問題の解法として、様相制約条件計画問題の必然性測度最大化モデルを適用し、問題の構造を利用したアルゴリズムを提案する。

1 はじめに

現在までに、スパニング・ツリー問題に関する研究は数多く存在し、解法も様々なものが提案されている。グラフ中の各枝に設定されたコストが確定値である場合は、**Prim** や **Kruskal** のアルゴリズムが知られている。これに対して、コストが不確定値（確率変数）である場合を扱ったものとして確率的スパニング・ツリー問題、並びにその解法についての研究 [5] がなされている。

しかし、現実には情報量の不足によりコストが確率変数とは違った不確実性要素として表現される問題が存在する。本研究では、その様な問題について、ファジィ理論における可能性変数をコストとして定式化を行うファジィ・スパニング・ツリー問題を提案する。また、その解法として様相性最適化を用いた一手法を紹介する。

前準備として 2 章では、ファジィ理論で様相性を扱う際に必要となる測度や、本研究で使用する可能性計画法における基本最適化法について述べ、3,4 章で本研究の詳細を、また 5 章では数値例を示す。

2 ファジィ測度と様相測度

2.1 ファジィ測度

一般に \mathcal{F} を Ω のある部分集合族としたとき、次のような性質をもつ集合関数 $f: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ が測度と呼ばれる。

定義 2.1.1

1. $f(\phi) = 0$
2. σ -加法性 ($A_i, A_j \in \mathcal{F}$)

$$A_i \cap A_j = \phi (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots) \Rightarrow f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i)$$

また、確率測度に関しては $f(\Omega) = 1$ という条件が加わる。これに対してファジィ測度とは一般に加法性をもたず、単調性をもつ次のような集合関数 $g: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ である。

定義 2.1.2

1. $g(\phi) = 0$
2. $g(\Omega) = 1$
3. 単調性 ($A_i \in \mathcal{F}; n = 1, 2, \dots$)

$$A_n \subseteq A_{n+1} \Rightarrow g(A_n) \leq g(A_{n+1})$$

2.2 様相測度

様相性として可能性、必然性が古くから論理学で扱われている。これらは互いに双対な関係にあり、命題 P に関して

P は可能である $\Leftrightarrow P$ でないことが必然でない

P は必然である $\Leftrightarrow P$ でないことが可能でない

が成立する。この概念をファジィ理論で扱う際には、様相性の程度を表す尺度として、ファジィ測度の一種である可能性測度が定義される。

定義 2.2.1 (可能性測度)

次の 1~3 の性質を満たす集合関数 Π を可能性測度と呼ぶ。

1. $\Pi: \forall A \subseteq \Omega \rightarrow [0, 1]$
2. $\Pi(\phi) = 0; \Pi(\Omega) = 1$
3. $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)) \quad \forall A, B \subseteq \Omega$

また双対関係より、必然性測度も次のように定義できる。

定義 2.2.2 (必然性測度)

次の 1~3 の性質を満たす集合関数 \mathcal{N} を必然性測度と呼ぶ。

1. $\mathcal{N}: \forall A \subseteq \Omega \rightarrow [0, 1]$
2. $\mathcal{N}(\phi) = 0; \mathcal{N}(\Omega) = 1$
3. $\mathcal{N}(A \cap B) = \min(\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(B)) \quad \forall A, B \subseteq \Omega$

特に、対象となる集合がファジィ集合 A の場合 Π, \mathcal{N} は

$$\Pi(A) = \sup_x \min(\pi(x), \mu_A(x)) \quad , \quad \mathcal{N}(A) = \inf_x \max((1 - \pi(x)), \mu_A(x))$$

とできる。ただし、 $\pi(x)$ は可能性分布関数 (可能性分布を制限するメンバシップ関数 $\mu(x)$ と同一視されることが多い)、 $\mu_A(x)$ はファジィ集合 A のメンバシップ関数である。

「確率」は「可能性」と、分布関数や測度といった定義上の対応があり、その性質に類似点が多い。また、われわれは日常「確率」や「可能性」という言葉を何気なく使用しているが、この分野においては次のように区別している。

確率...事象の生起に関するもの

可能性...事象生起能力に関するもの

これに伴って、可能性/確率調和原理と呼ばれる不等式

$$\mathcal{N}(A) \leq P(A) \leq \Pi(A) \quad \forall A \subseteq \Omega$$

が Zadeh によって導かれた [9]。

2.3 様相制約条件計画問題

確率変数と可能性変数のアナロジーにより、確率計画問題に対応した可能性計画問題が存在し、それに伴って種々の最適化モデルが考えられる。本研究では基本最適化法として、機会制約条件計画問題の確率最大化モデル (リスク最小化モデル) に対応する様相制約条件計画問題の様相性最適化モデルを扱う。

通常の線形計画問題等は、例えば目的関数が企業の生産計画における利潤を表すもので、目的関数を最大化することにより直接的な利潤追求を行うものである。これに対して様相性最適化モデルとは、上記の確率最大化モデルと同様、目的関数に「だいたい f_0 以上である」等というファジィ目標 G を与え、目的関数値がだいたい f_0 以上となる可能性もしくは必然性を最大化する。したがって次の 3 通りの定式化が考えられる。

- 可能性測度のみ最大化 (可能性測度最大化モデル)
- 必然性測度のみ最大化 (必然性測度最大化モデル)
- 可能性測度と必然性測度を同時に最大化

本研究では、このうち必然性測度最大化モデルを一最適化手法として利用する。

3 ファジィ・スパニング・ツリー問題

点集合 N ($|N| = n$), 枝集合 E ($|E| = m$) の無向グラフを $G(N, E)$ とし、各枝 $e_i \in E$ にはコスト c_i (可能性変数) が設定されているものとする。また G に対するスパニング・ツリー $T(N, S)$ ($S \subseteq E$, 閉路を含まない G の連結部分グラフ) は 2 値変数のベクトルとして次のように表現される。

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^t$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & (e_i \in S) \\ 0 & (e_i \notin S) \end{cases}$$

このとき、次のような線形計画問題 P をファジィ・スパニング・ツリー問題とする。

$$P : \quad \text{minimize } \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\text{subject to } \mathbf{x} \in F$$

ただし、 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$ は可能性分布 C で制限される可能性変数ベクトル、 F は $T(N, S)$ に対応する 0-1 ベクトルの集合とし、以下では F 自身をスパニング・ツリーの集合と同一視する。

4 必然性測度最大化によるアプローチ

4.1 定式化

便宜上、問題 P を最適解が等しい次問題 P_{n1} に変換する。

$$P_{n1} : \quad \text{maximize } -\mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\text{subject to } \mathbf{x} \in F$$

ここで、 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$ は次の様なメンバシップ関数をもつ可能性分布 C で制限される可能性変数である。

$$\mu_C(\mathbf{c}) = L((\mathbf{c} - \mathbf{d})U^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{d})^t)$$

ただし、 $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$, U を $m \times m$ の対称正定値行列, $L: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$; $L(0) = 1$ を上半連続非増加関数とする。このとき目的関数値 $-\mathbf{c}\mathbf{x}$ は可能性分布 Y

$$\mu_Y(y) = L\left(\frac{(y + \mathbf{d}\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}^t U \mathbf{x}}\right)$$

に制限されるが、これは次の定理によるものである [8]。

定理 4.1.1

$$y = -\mathbf{c}\mathbf{x}, \mu_C(\mathbf{c}) = L((\mathbf{c} - \mathbf{d})U^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{d})^t)$$

$$\Leftrightarrow \mu_Y(y) = L\left(\frac{(y + \mathbf{d}\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}^t U \mathbf{x}}\right)$$

証明

拡張原理から

$$\mu_Y(y) = \sup_{\{\mathbf{c} | y = -\mathbf{c}\mathbf{x}\}} L((\mathbf{c} - \mathbf{d})U^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{d})^t) \quad (4A)$$

$L(\cdot)$ の非増加性より、次のラグランジュ関数 $\mathcal{L}(c, k)$ の最小化問題に変換できる。

$$\mathcal{L}(c, k) = (c - d)U^{-1}(c - d)^t + k(y + cx)$$

ただし、 k はラグランジュ乗数である。上式を c, k で偏微分することにより、次の正規方程式を得る。

$$\begin{cases} 2U^{-1}(c - d)^t + kx = 0 \\ y + cx = 0 \end{cases} \quad (4B)$$

(4B) 第1式の両辺に左から $x^t U$ を掛けると

$$2x^t(c - d)^t + kx^t Ux = 0$$

$$\therefore kx^t Ux = -2(cx - dx)$$

(4B) 第2式より $cx = -y$ であるから

$$k = \frac{2(y + dx)}{x^t Ux}$$

$$c = d - \frac{y + dx}{x^t Ux} x^t U$$

上式を (4A) に代入することにより、定理が証明される。 \square

次に、目的関数値にファジィ目標 G 「だいたい f_0 以上である」をもうけ、必然性測度最大化により定式化すれば

$$\begin{aligned} P_{n2} : \quad & \text{maximize } \mathcal{N}_Y(G) \\ & \text{subject to } y = -cx, \mathbf{x} \in F \end{aligned}$$

$\mathcal{N}_Y(\cdot)$ は必然性測度で

$$\mathcal{N}_Y(G) = \inf_y \max\{(1 - \mu_Y(y)), \mu_G(y)\}$$

である。いま $\mathcal{N}_Y(G) \geq h$ とすると

$$\begin{aligned} & \inf_y \max\{(1 - \mu_Y(y)), \mu_G(y)\} \geq h \\ \Leftrightarrow & \forall y: "1 - \mu_Y(y) < h \Rightarrow \mu_G(y) \geq h" \\ \Leftrightarrow & \forall y: "\mu_Y(y) > 1 - h \Rightarrow \mu_G(y) \geq h" \\ \Leftrightarrow & \forall y: "L\left(\frac{(y + dx)^2}{x^t Ux}\right) > 1 - h \Rightarrow \mu_G(y) \geq h" \\ \Leftrightarrow & \forall y: "|y + dx| < \sqrt{L^*(1 - h)x^t Ux} \Rightarrow y \geq \mu_G^*(h)" \\ \Leftrightarrow & -dx - \sqrt{L^*(1 - h)x^t Ux} \geq \mu_G^*(h) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\mu_G(\cdot)$ は上半連続で非減少とし

$$\begin{aligned} L^*(h) &= \begin{cases} \sup\{r | L(r) > h, r \geq 0\} & (0 \leq h < 1) \\ 0 & (h = 1) \end{cases} \\ \mu_G^*(h) &= \begin{cases} \inf\{r | \mu_G(r) \geq h\} & (0 < h \leq 1) \\ \inf\{r | \mu_G(r) > h\} & (h = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

とする。不確実性を扱っているのが必然性測度 (h) が 1 の場合を考えるのは概念的に不適当かもしれないが、数理的に処理を行う場合は妥当なかたちと思われる。

これにより、さらに P_{n2} を等価変換すると [3]

$$\begin{aligned} P_{n3} : \quad & \text{maximize } h \\ & \text{subject to } -dx - \sqrt{L^*(1 - h)x^t Ux} \geq \mu_G^*(h) \\ & 0 \leq h \leq 1, \mathbf{x} \in F \end{aligned}$$

4.2 解法

P_{n3} を解くために、第1制約不等式の右辺を移項したものを関数

$$z(x, h) \equiv -dx - \sqrt{L^*(1-h)x^t U x} - \mu_G^*(h)$$

とおく。いわゆる“予選決勝法”を用いて問題を解いていくために h を h_α で固定すると、 $\sqrt{L^*(1-h)}$, $\mu_G^*(h)$ の単調増加性より次のような手順を踏めばよいことになる。

予選 $\max_{x \in F} z(x, h_\alpha)$ すなわち $\min_{x \in F} (dx, \sqrt{x^t U x})$ なる2目的計画問題の非劣解を求め、それらを
 $x^{(k)} (k = 1, \dots, p: \text{非劣解の個数})$ とおく。

決勝

$$\begin{aligned} P_{n4} : \quad & \text{maximize } h_\alpha \\ & \text{subject to } z(x^{(k)}, h_\alpha) \geq 0 \\ & 0 \leq h_\alpha \leq 1, 1 \leq k \leq p \end{aligned}$$

非劣解 $x^{(k)}$ の求め方については、 U を対角行列としたうえで Geetha & Nair の方法を使用する。本研究で用いる場合の形態を以下に紹介するが、詳細については [1] あるいは [4] を参照されたい。

Geetha & Nair's Algorithm

Phase 1

- 1st $z_1^{(1)} := \min_{x \in F} \sum_{i=1}^m d_i x_i$ と対応する $z_2^{(1)} := \sum_{i=1}^m u_i x_i$ (u_i は U の第 i 対角成分) を計算する。 $(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})$ と対応するスパニング・ツリー $x^{(1)}$ を保持し、 $k := 1$ とおく。同様にして、 $z_2^{(2)} := \min_{x \in F} \sum_{i=1}^m u_i x_i$ と対応する $z_1^{(2)} := \sum_{i=1}^m d_i x_i$ を計算する。もし、 $(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) = (z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ なら終了して、Phase 2 へ行く。そうでなければ、 $k := k+1$ として、 $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ と対応するスパニング・ツリー $x^{(2)}$ を保持する。集合 $DS := (1, 2)$ を定義して 2nd へ行く。
- 2nd 1つの要素 $(s, t) \in DS$ を選び、 $\alpha_1^{(s,t)} := |z_2^{(t)} - z_2^{(s)}|$ および $\alpha_2^{(s,t)} := |z_1^{(t)} - z_1^{(s)}|$ とおく。 \bar{x} をスパニング・ツリー問題

$$\text{minimize } \sum_{i=1}^m (\alpha_1^{(s,t)} d_i + \alpha_2^{(s,t)} u_i) x_i, \quad (x \in F)$$

の最適解とする。もし、 $x^{(s)}$ がまた、この問題の最適解なら、 \bar{x} を捨て、 $DS := DS - (s, t)$ として 3rd へ行く。そうでなければ

$$\bar{z}_1 := \sum_{i=1}^m d_i \bar{x}_i, \quad \bar{z}_2 := \sum_{i=1}^m u_i \bar{x}_i, \quad k := k+1$$

および

$$DS := DS \cup \{(s, k), (k, t)\} - \{(s, t)\}$$

とおき、 $(z_1^{(k)}, z_2^{(k)})$ と対応するスパニング・ツリー $x^{(k)} := \bar{x}$ を保持して、3rd へ行く。

3rd もし、 $DS = \phi$ なら、Phase 2 へ行く。そうでなければ、2nd へ戻る。

Phase 2

Phase 1 での効率的端点 $(z_1^{(k)}, z_2^{(k)})$ から、2 目的問題 $\min_{\mathbf{x} \in F} (\mathbf{d}\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{x}^t \mathbf{U}\mathbf{x}})$ の効率的端点

$(a^{(k)}, b^{(k)}) = (z_1^{(k)}, \sqrt{z_2^{(k)}})$ と対応する非劣解 $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(p)}$ を保持する。(すなわち、 $a^{(k)} := \mathbf{d}\mathbf{x}^{(k)}, b^{(k)} := \sqrt{\mathbf{x}^{(k)t} \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}}$ とおく。)

$z(\mathbf{x}, h)$ の定義式から、曲線 $y = z(\mathbf{x}^{(i)}, h_\alpha)$ と $y = z(\mathbf{x}^{(j)}, h_\alpha)$ ($i \neq j, 1 \leq i, j \leq p$) の交点に関する情報として

$$r_{ij} \equiv \sqrt{L^*(1 - h^{(ij)})} = \frac{a^{(j)} - a^{(i)}}{b^{(i)} - b^{(j)}}$$

が得られる。ただし、 $h^{(ij)}$ は交点における h_α の値。
 $\sqrt{L^*(1 - h^{(ij)})} \leq \sqrt{L^*(0)}$ を考慮すると、おのこの $\mathbf{x}^{(k)}$ について、 $0 \leq h_\alpha \leq 1$ の範囲で曲線 $y = z(\mathbf{x}^{(k)}, h_\alpha)$ はその他全ての曲線との交点を高々一点ずつ有することがわかる。理解を助けるため簡単な例として、 $p = 3$ のときの曲線 $y = z(\mathbf{x}^{(k)}, h_\alpha)$ を Fig.1 に示す。Fig.1 中の h^* が最適値であり、 $z(\mathbf{x}^{(k)}, h^*) = 0$ を満たす $\mathbf{x}^{(k)}$ (つまり $(h^*, 0)$ を通る曲線に対応する $\mathbf{x}^{(k)}$) が最適解 \mathbf{x}^* である。 p の値は高々 $O(n^{2.5})$ であることが知られており [2]、全ての k について方程式 $z(\mathbf{x}^{(k)}, h_\alpha) = 0$ を解けば解を特定することが出来るが、さらに計算効率を高める。

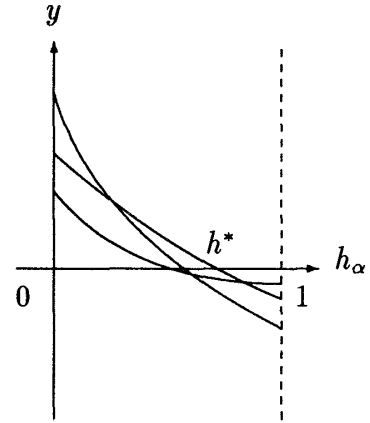


Fig.1

Algorithm 1

1st $z(\mathbf{x}^{(k)}, 1) \geq 0$ を満たす $\mathbf{x}^{(k)}$ が存在すれば、その $\mathbf{x}^{(k)}$ を \mathbf{x}^* として終了。

2nd $r_{ij} \leq \sqrt{L^*(0)}$ を満たす r_{ij} をソートし、 $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_q$ とする。さらに $r_0 := 0, r_{q+1} := \sqrt{L^*(0)}$ を追加し、その中央値 r_t を選択した後、 $l := 0, u := q + 1$ とする。

3rd 集合 $K := \phi$ を定義し、 $\max_k \{-a^{(k)} - r_t b^{(k)}\} = -a^{(k^*)} - r_t b^{(k^*)}$ なる k^* を求め、 $K := K \cup \{k^*\}$ とする。

4th ある要素 $k' \in K$ について、 $h' = \mu_G(-a^{(k')} - r_t b^{(k')})$, $h_t = 1 - L(r_t^2)$ とし、 $h' - h_t$ の正負を調べる。

$$h' - h_t \begin{cases} < 0 & \rightarrow u := t, k^* := k' | \max_{k' \in K} b^{(k')} \\ > 0 & \rightarrow l := t, k^* := k' | \min_{k' \in K} b^{(k')} \\ = 0 & \rightarrow u := t, l := t, k^* := \forall k' \in K \end{cases}$$

5th $u - l \leq 1$ ならば \mathbf{x}^* が特定可能なので、 $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(k^*)}$ として終了。そうでなければ r_u と r_l の中央値を r_t として 3rd へ。

アルゴリズム中 1st での手続きは、問題を数理的に処理した場合、すなわち $h = 1$ の場合を考慮する手続きであり、また 4th での手続きは次の定理に基づいている。
定理 4.2.1

$$h' - h_t \begin{cases} < 0 & \rightarrow h^* < h_t \\ > 0 & \rightarrow h^* > h_t \\ = 0 & \rightarrow h^* = h_t \end{cases}$$

証明

曲線 $y = z(\mathbf{x}^{(k')}, h_\alpha)$ が h_α 軸と交わる点を $(h', 0)$ とすれば

$$\begin{aligned} -a^{(k')} - r_t b^{(k')} - \mu_G^*(h') &= 0 \\ \Leftrightarrow \mu_G^*(h') &= -a^{(k')} - r_t b^{(k')} \end{aligned} \tag{4C}$$

$\mu_G(\cdot)$ の単調増加性より

$$h' = \mu_G(-a^{(k')} - r_t b^{(k')})$$

また $\sqrt{L^*(1-h_t)} = r_t$ とすると

$$L^*(1-h_t) = r_t^2$$

$L(\cdot)$ の単調減少性より

$$h_t = 1 - L(r_t^2)$$

さらに、(4C) より

$$\begin{aligned} z(\mathbf{x}^{(k')}, h_t) &= -a^{(k')} - r_t b^{(k')} - \mu_G^*(h_t) \\ &= \mu_G^*(h') - \mu_G^*(h_t) \end{aligned}$$

$\mu_G^*(\cdot)$ は増加関数であるから

$$h' - h_t \begin{cases} < 0 & \rightarrow z(\mathbf{x}^{(k')}, h_t) < 0 \\ > 0 & \rightarrow z(\mathbf{x}^{(k')}, h_t) > 0 \\ = 0 & \rightarrow z(\mathbf{x}^{(k')}, h_t) = 0 \end{cases}$$

したがって

$$h' - h_t \begin{cases} < 0 & \rightarrow h^* < h_t \\ > 0 & \rightarrow h^* > h_t \\ = 0 & \rightarrow h^* = h_t \end{cases}$$

□

このアルゴリズムは二分探索を採用しているが、探索領域の半減方向は次のように分類できる。

$$\begin{aligned} h^* < h_t &\Rightarrow \text{“}h_\alpha \text{の負方向, } r_q \text{の負方向”} \Rightarrow u := t \\ h^* > h_t &\Rightarrow \text{“}h_\alpha \text{の正方向, } r_q \text{の正方向”} \Rightarrow l := t \end{aligned}$$

このアルゴリズムは方程式を解かず、数値の代入を主たる手続きとしているので、計算効率を大幅に向上できる。

定理 4.2.2 Algorithm 1 は $O(n^5 \log n)$ で最適スパニング・ツリーを求める。

証明

妥当性については上記の議論より明らかである。計算時間について各段階ごとに調べると次のようになる。

1. 非劣解 $\mathbf{x}^{(k)}$ を求める。
文献 [1] より $O(n^{4.5})$
2. 2nd
 - (a) r_{ij} を求める。

$$O(q) = O\left(\frac{p(p-1)}{2}\right) = O(p^2)$$

さらに、 p の値が高々 $O(n^{2.5})$ であることから

$$O(n^5)$$

- (b) ソート
 - (a) より

$$O(n^5 \log n^5) = O(n^5 \log n)$$

3. 3rd ~ 5th のループ

$h', h_i, L(r_i^2)$ は各々 $O(n)$ で計算され、3rd は p の値より $O(n^{2.5})$ 。またループの回数は二分探索を用いていることを考慮にいと高々 $\log n^5$ 、すなわち $O(\log n)$ であるので

$$O(n^{2.5} \log n)$$

従って、トータルとして

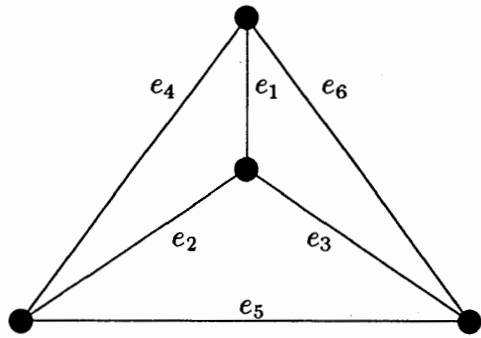
$$O(n^5 \log n)$$

□

上記の定理は、あくまで悲観的に考えた際のもので、 r_{ij} の個数は $r_{ij} \leq \sqrt{L^*(0)}$ により実際にはさらに少ない値に抑えられ、 q となる。したがって、ソートに要する時間も低減され、全体としての計算時間が減少するものと考えられる。

5 数値例

対象とするグラフ $G(N, E)$, d, U は次のようなものである。



$$|N| = 4, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$$d = (16, \frac{49}{3}, 14, \frac{44}{3}, 15, \frac{43}{3})$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & & & & & 0 \\ & \frac{1}{10} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{7}{10} & & \\ 0 & & & & \frac{1}{5} & \\ & & & & & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Fig.2

また、関数 L およびファジィ目標 G を次のように設定する。

G : 「だいたい -43 以上である。」

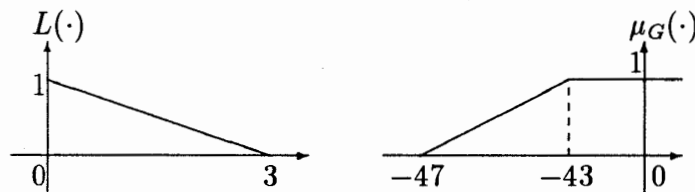


Fig.3

このとき $L^*(1-h), \mu_G^*(h)$ はそれぞれ

$$\begin{cases} \sqrt{L^*(1-h)} = \sqrt{3h} \\ \mu_G^*(h) = 4h - 47 \end{cases}$$

となる。

Geetha & Nair's Algorithm により、Phase 1 において次のような結果が得られる。

反復	DS	効率的端点	スパニング・ツリー
1	$\{(1, 2)\}$	$z^{(1)} = (43, \frac{19}{10})$ $z^{(2)} = (\frac{137}{3}, \frac{1}{2})$	$x^{(1)} = (0, 0, 1, 1, 0, 1)^t$ $x^{(2)} = (0, 1, 0, 0, 1, 1)^t$
2	$\{(1, 3), (3, 2)\}$	$z^{(3)} = (\frac{130}{3}, \frac{7}{5})$	$x^{(3)} = (0, 0, 1, 0, 1, 1)^t$
3	$\{(1, 3)\}$		
4	ϕ		

さらに **Phase 2** から、必要とされる非劣解およびそれらに対応する効率的端点が求められる。

$$\mathbf{x}^{(1)} \rightarrow (a^{(1)}, b^{(1)}) = (43, \sqrt{\frac{19}{10}})$$

$$\mathbf{x}^{(2)} \rightarrow (a^{(2)}, b^{(2)}) = (\frac{137}{3}, \sqrt{\frac{1}{2}})$$

$$\mathbf{x}^{(3)} \rightarrow (a^{(3)}, b^{(3)}) = (\frac{130}{3}, \sqrt{\frac{7}{5}})$$

次に **Algorithm 1** の手続きに移る。

1st $\sqrt{L^*(0)} = \sqrt{3}$, $\mu_G^*(1) = 43$ であるから

$$z(\mathbf{x}^{(1)}, 1) = -a^{(1)} - \sqrt{L^*(0)} b^{(1)} + \mu_G^*(1) < 0$$

$$z(\mathbf{x}^{(2)}, 1) = -a^{(2)} - \sqrt{L^*(0)} b^{(2)} + \mu_G^*(1) < 0$$

$$z(\mathbf{x}^{(3)}, 1) = -a^{(3)} - \sqrt{L^*(0)} b^{(3)} + \mu_G^*(1) < 0$$

2nd 非劣解が3個 ($p=3$) 存在するので、各々の非劣解に対応する曲線 $y = z(\mathbf{x}^{(k)}, h_\alpha)$ の交点はせいぜい3組存在し、それらに関する情報 r_{ij}

$$r_{12} = \frac{a^{(2)} - a^{(1)}}{b^{(1)} - b^{(2)}} = \frac{40}{21} \left(\sqrt{\frac{19}{10}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = 3.97 \dots$$

$$r_{13} = \frac{a^{(3)} - a^{(1)}}{b^{(1)} - b^{(3)}} = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{19}{10}} + \sqrt{\frac{7}{5}} \right) = 1.70 \dots$$

$$r_{23} = \frac{a^{(3)} - a^{(2)}}{b^{(2)} - b^{(3)}} = \frac{70}{27} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{7}{5}} \right) = 4.90 \dots$$

である。このうち $r_{ij} \leq \sqrt{L^*(0)} = \sqrt{3}$ を満足するものは r_{13} のみであるから

$$r_0 := 0 \leq r_1 := r_{13} \leq r_2 := \sqrt{L^*(0)} = \sqrt{3}$$

とでき $r_t := r_1$, $l := 0$, $u := 2$ となる。

3rd $K := \phi$ と定義した後、

$$-a^{(1)} - r_t b^{(1)} = -43 - \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{19}{10}} + \sqrt{\frac{7}{5}} \right) \sqrt{\frac{19}{10}} = -45.353 \dots$$

$$-a^{(2)} - r_t b^{(2)} = -\frac{137}{3} - \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{19}{10}} + \sqrt{\frac{7}{5}} \right) \sqrt{\frac{1}{2}} = -46.874 \dots$$

$$-a^{(3)} - r_t b^{(3)} = -\frac{130}{3} - \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{19}{10}} + \sqrt{\frac{7}{5}} \right) \sqrt{\frac{7}{5}} = -45.353 \dots$$

より、 $k' = 1, 3$ が得られるので $K := \{1, 3\}$ となる。

4th

$$\begin{aligned} h' &= \mu_G(-45.353\dots) = 0.411\dots \\ h_t &= 1 - L(r_t^2) = 0.972\dots \end{aligned}$$

であるから

$$h' - h_t = -0.560\dots < 0$$

したがって

$$u := 1, k^* := 1 \quad (b^{(1)} = \sqrt{\frac{19}{10}} > b^{(3)} = \sqrt{\frac{7}{5}})$$

5th $u - l = 1 - 0 = 1 \leq 1$ なので $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(1)}$ である。

これにより、最適スパニング・ツリーが $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 1, 1, 0, 1)^t$ として求められる。参考までに、この場合の必然性測度すなわち h^* の値は

$$h^* = \mu_G(-a^{(1)} - r_1 b^{(1)}) = 0.4115082\dots$$

である。

6 おわりに

連続決定変数については、確率計画問題と対比される様相制約条件計画問題の研究はいくつかあるが、離散決定変数については本研究以外は見られないように思われる。確率計画法でも明らかのように、連続変数と離散変数では問題の考え方、解法ともに大きな違いがあり、この研究からも明らかであるが連続な場合の結果は直接的には適用できない。したがって、これからは連続変数と離散変数を扱う際の考え方の違いを考慮し、他の組合せ最適化問題を様相制約条件計画問題に一般化する方法を研究するとともに、可能性測度最大化モデルによるアプローチも検討するつもりである。

参考文献

- [1] Geetha, S. and Nair, K.P.K.: On Stochastic Spanning Tree Problem. *Networks*, Vol.23 (1993), 675-679.
- [2] Gusfield, D.: Sensitivity Analysis for Combinatorial Optimization. University of California at Berkeley, California. PhD Thesis (1980), 58-62.
- [3] Inuiguchi, M. and Ichihashi, H.: Relative Modalities and Their Use in Possibilistic Linear Programming. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.35 (1990), 303-323.
- [4] 石井博昭：ソフト最適化（坂和正敏編）第3章。朝倉書店，1995（出版予定）。
- [5] Ishii, H., et al.: Stochastic Spanning Tree Problem. *Discrete Applied Mathematics*, Vol.3 (1981), 263-273.
- [6] 日本ファジィ学会：講座 ファジィ3 ファジィ測度。日刊工業，1993。
- [7] 坂和正敏：ファジィ理論の基礎と応用。森北出版，1989。
- [8] 田中英夫：ファジィモデリングとその応用。朝倉書店，1990。
- [9] Zadeh, L.A.: Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.1 (1978), 3-28.

伊藤 健

大阪大学大学院工学研究科

応用物理学専攻数理情報工学講座

〒565 吹田市山田丘 2-1

TEL : 06(879)7870, FAX : 06(878)1385

e-mail : takeshi@ap.eng.osaka-u.ac.jp

ABSTRACT

An Approach Based on Necessity Measure to the Fuzzy Spanning Tree Problems

Takeshi Itoh Hiroaki Ishii
Osaka University

On the decision problems with defective information, the uncertain elements are often formulated as the random variables (the stochastic programming problems) even if they don't behave themselves stochastically. However, when uncertainty is mainly derived from the lack of amount of information and so on, we think, it is proper to recognize them as a kind of "fuzziness" and formulate them as the possibility variables on the fuzzy theory.

In this paper, we propose the fuzzy spanning tree problems, in which the edge costs of the graph are possibility variables. At the time of its formulation, we pay attention to the analogy between the random variables and the possibility variables and adopt a model corresponding to the probability maximum one on the chance constrained programming problems for the stochastic programming, that is, the necessity measure maximum model on the modality constrained programming problems for the possibilistic programming. Moreover, in the solution, we propose the efficient algorithm based on the binary search, which fully exploits its problem structure.