日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌
Journal of the Operations Research Society of Japan
Vol. 20, No. 4, December, 1977

需要レイトが計画期間内でM回変化する場合の経済的ロット・サイズモデル

慶應義塾大学 丹羽 明

AN ECONOMIC LOT SIZE MODEL WITH THE DEMAND RATE VARYING FINITE NUMBER OF TIMES

AKIRA NIWA
Keio University

(Received May 19, 1977)

Abstract. This paper presents a method for determining economic lot size when the demand rate varies M times over finite time horizon. No shortages are to be permitted and lots may be added to inventory at arbitrary times during planning horizon.

1. はじめに

単一stage，単一品種，需要レイト一定のもとでの経済的ロットサイズが“ルート公式”によって求められることは，よく知られている。

また，一定の需要レイトに関する前提を変えたもとでの経済的ロットサイズは，毎期の需要が瞬時に発生し，計画期間がN期の場合〔6〕，需要累積線がC^1級の関数で，計画期間が〔O，T〕の場合〔1〕，〔2〕，〔3〕，〔4〕等が示されている。

本論文では，計画期間〔O，T〕内で需要レイトがM回変化する，すなわち，需要累積線が折れ線で与えられ，任意の時点でいつでも生産（あるいは発注）できる場合，費用最小の最適生産方策を求める解法を明らかにする。

2. 累積平面上での問題の表現

本論文では，以下に述べる前提のもとで，総費用（段取費＋在庫保管費）を最小にする最適生産方策（生産回数，生産開始時点，ロットサイズ）を求める問題を扱う。

1） 単一 stage ，単一品種

2） 考慮する計画期間〔O，T〕が有限

3） 時点Tまでの総需要量Q_T が与えられ，計画期間内で需要レイトがM回変化する

4） 生産レイト無限大（即時生産）のロット生産

5） 品切れを許さない

6） 1回当りの段取費A円

7） 1個1単位時間当りの在庫保管費h円

ここで，需要と生産の時間に関する累積量の動きに着目して，横軸を時間，たて軸を生産の累積量とした累積平面上で，上記の問題を考えてみよう。その際，問題の分析と表現を簡単にする理由から，横軸方向に$1/T$ 倍，たて軸方向に$1/Q_T$ 倍の（線形）変換を考えた後の累積平面上で問題を扱うことにする。この変換によって，計画期間が〔O，T〕から〔0，1〕 に，総需要量がQ_T から1に，在庫保管費がhからC（$=TQ_Th$）に変化する。

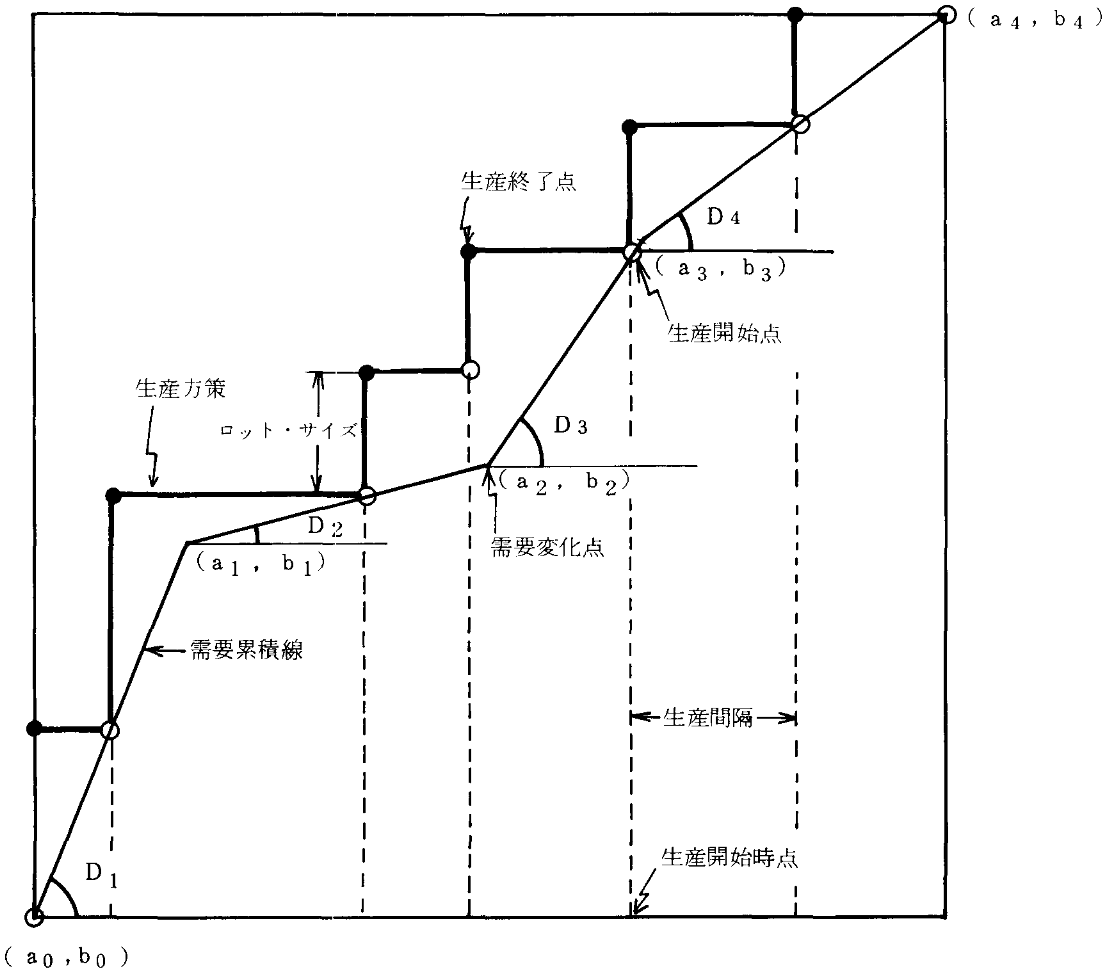

図1 需要レイトが3回変化する場合（M＝3）

計画期間〔0,1〕内の任意の区間〔a_{i-1}, a_i〕で需要レイトがD_i,ただし,$i=1,2,\cdots,M+1$, $a_0=0$, $a_{M+1}=1$, $D_i \neq D_{i+1} < \infty$,で与えられるとき,図1に示すように需要累積線が原点と点(1,1)を結ぶ(M+1)本の直線からなる折れ線として描ける。この需要累積線上で需要レイトが変化する点を"需要変化点"と呼び(a_i,b_i)で表わす。ただし,$i=0,1,\cdots,M+1$,$(a_0, b_0)=(0,0)$,$(a_{M+1}, b_{M+1})=(1,1)$, $b_i=b_{i-1}+(a_i-a_{i-1})D_i$,である。また,隣合う2つの需要変化点($a_{i-1}$, b_{i-1}),(a_i, b_i)を結ぶ直線を"i番目の需要線"と呼ぶ。この需要線は次式で与えられる。

(2・1) $Y=D_iX+Q_i$, $a_{i-1} \leqq X \leqq a_i$, $Q_i=b_i-a_iD_i$, $i=1,2,\cdots,M+1$

そして,隣合う2つの需要レイト,D_i, D_{i+1}, $i=1,2,\cdots,M$,が$D_i<D_{i+1}$の場合(a_i, b_i)を"下に凸の需要変化点",$D_i>D_{i+1}$の場合(a_i, b_i)を"上に凸の需要変化点"と呼ぶことにする(図1では(a_2,b_2)が下に凸の需要変化点,(a_1,b_1),(a_3,b_3)が上に凸の需要変化点である)。

任意の生産累積線(以後生産方策と呼ぶ)は需要累積線の上側に,原点から出て,[1]点(1,1)に至る階段状の線として描ける。図1に示すように,生産方策上の∘印の点を"生産開始点",•印の点を"生産終了点"と呼ぶことにする。また,区間〔a_{i-1}, a_i〕,$i=1,2,\cdots,M+1$,内での生産方策を考えるとき,この区間内での最初(あるいは最後)の生産開始点と生産終了点を,それぞれ"i番目の需要線の最初(あるいは最後)の生産開始点","i番目の需要線の最初(あるいは最後)の生産終了点"と呼ぶことにする。

任意の生産方策の生産開始点のなかで需要累積線に接していない(上側にある)生産開始点があれば,その点を需要累積線に接するまで移動(横軸に平行に)させることによって,他の生産開始点の位置を変えずに総在庫量を少なくできるので,以後すべての生産開始点が需要累積線上にある生産方策だけに限定して考察する。

よって,本論文で扱う問題は,累積平面上で需要累積線上に生産開始点がある生産方策のなかから,総費用を最小にする生産方策を求める問題としてとらえることができる。

3. 最適生産方策に関する基本的性質と解法の考え方

ここでは,最適生産方策に関する2つの基本的性質を示し,次に最適生産方策を求める考え方を述べる。

まず,最適生産方策に関する基本的性質として次の定理がなりたつ〔2〕〔3〕〔4〕。

定理3・1: 最適生産方策の基本的性質1

最適生産方策のj番目の生産開始点が需要変化点上になければ,j番目の生産開始点における需要累積線の傾きは,(j−1)番目とj番目の生産終了点を結ぶ直線の傾きに等しい(図2参照)。ただ

---

1) 初期在庫量は0と仮定する。

し，$j=2,\ 3,\ \cdots,\ N^*$，N^* は最適生産方策の生産回数。

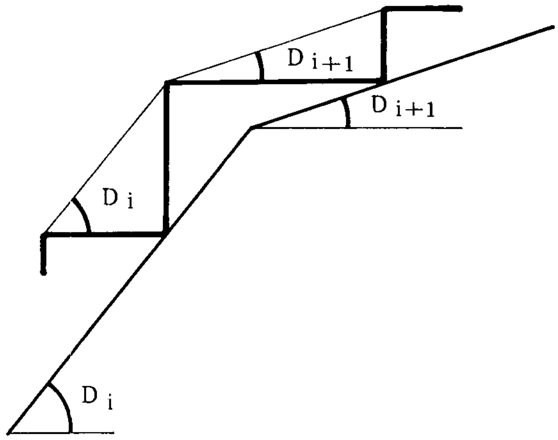

図２　最適生産方策の基本的性質１

この定理より，ｉ番目の需要線の最初の生産終了点と最後の生産終了点を結ぶ直線は，ｉ番目の需需線と平行になるので，次の系が直ちになりたつ。

系３．１　最適生産方策の各需要線における生産のロット・サイズは等しく，生産間隔も等しい。

上に凸の需要変化点に生産開始点がある任意の生産方策に対して，他の生産開始点の位置を変えずに，その生産開始点を前あるいは後の需要線上のいずれかに移動させることによって，総在庫量のより少ない生産方策が明らかに作れる。よって最適生産方策に関する２番目の基本的性質として，次の定理が直ちになりたつ。

定理３・２：　最適生産方策の基本的性質２

上に凸の需要変化点は最適生産方策の生産開始点にならない。

この定理より，需要変化点が最適生産方策の生産開始点になり得る可能性があるのは，下に凸の需要変化点だけであることがわかる。そこで，下に凸の需要変化点が生産開始点になる場合とならない場合に生産方策を分けて以後考察する。

下に凸の需要変化点が α 個（$0 \leqq \alpha \leqq M$）あったとき，それらを順番に (a_{i_p}, b_{i_p})，$P=1,\ 2,\ \cdots,\ \alpha$，に対応させ，$(a_{i_0},\ b_{i_0})=(a_0,\ b_0)$，$(a_{i_{\alpha+1}},\ b_{i_{\alpha+1}})=(a_{M+1},\ b_{M+1})$ とする。そして，これら（$\alpha+2$）個の点から任意の２点，$(a_{i_k},\ b_{i_k})$，$(a_{i_l},\ b_{i_l})$ を選ぶ。ただし，$k<l$，$k,\ l=0,\ 1,\ \cdots,\ \alpha+1$。これらの２点が生産開始点となる場合，区間〔$a_{i_k},\ a_{i_l}$〕内だけで生産方策を独立に考えることができる。すなわち，点$(a_{i_k},\ b_{i_k})$から出て点$(a_{i_l},\ a_{i_l})$に至る生産方策を考えることになる。また区間$(a_{i_k},\ b_{i_l})$内に含まれる下に凸の需要変化点のうちの少なくとも１点が生産開始点になれば，点$(a_{i_k},\ b_{i_k})$から出て点$(a_{i_l},\ b_{i_l})$に至る生産方策をさらに分割して考えることができる。

そこで，点$(a_{i_k},\ b_{i_k})$から出て点$(a_{i_l},\ b_{i_l})$に至る生産方策のなかで，途中の需要変化点

で生産しない生産方策を考え，これらの生産方策の集合を，P〔i_k，i_l〕と表現する。

すべての k，l に関して，P〔i_k，i_l〕を考えることは，結局，下に凸の需要変化点が生産開始点になる場合と，ならない場合をすべて考えることに対応する。

ここで，P〔i_k，i_l〕のなかで，最適生産方策の基本的性質1を満足する生産方策を$\widetilde{P}$〔i_k，i_l〕と表現し，$\widetilde{P}$〔i_k，i_l〕のなかで最小費用の値を d_{kl} とする。すると，最適生産方策は，すべての d_{kl} を求めることによって簡単に求まる。これは，点(a_{io}，b_{io})から点($a_{i_{\alpha+1}}$，$b_{i_{\alpha+1}}$)までを順番にノード0からノード($\alpha+1$)に対応させ，ノードkとノードlを結ぶアークの値を d_{kl} としたネットワークの最小費用の流れを見い出せばよい。

したがって，すべての d_{kl} を求めることが，ここでの問題である。

区間〔a_{i_k}，a_{i_l}〕内に含まれる需要線の数Rは次式で与えられ，このRの値によって，d_{kl} の求め方が異なる。

$$R = i_l - i_k \qquad (3 \cdot 1)$$

Rが1の場合，すなわち，区間〔a_{i_k}，a_{i_l}〕内で需要レイトが一定の場合，d_{kl} は次式より直ちに求まる〔1〕〔5〕。

$$d_{kl} = n_{i_l} A + (a_{i_l} - a_{i_k})(b_{i_l} - b_{i_k}) C / (2 n_{i_l}) \qquad (3 \cdot 2)$$

ただし，n_{i_l} は点(a_{i_k}，b_{i_k})から出て点(a_{i_l}，b_{i_l})に至る生産方策の最適生産回数であり，次式を満足する整数である。

$$\begin{cases} 2n_{i_l}(n_{i_l} - 1) \leqq (a_{i_l} - a_{i_k})(b_{i_l} - b_{i_k}) C / A \\ 2n_{i_l}(n_{i_l} + 1) \leqq (a_{i_l} - a_{i_k})(b_{i_l} - b_{i_k}) C / A \end{cases} \qquad (3 \cdot 3)$$

Rが2以上の場合，すなわち，区間〔a_{i_k}，a_{i_l}〕内で需要レイトが変化する場合，d_{kl} を求めることが問題であり，これを次節で述べる。

4. 区間〔a_{i_k}, a_{i_l}〕内に含まれる需要線の数Rが2以上の場合の d_{kl} の求め方

ここでは，まず区間〔a_{i_k}，a_{i_l}〕内に含まれる各需要線上の生産回数が与えられたもとで，$\widetilde{P}$〔i_k，i_l〕の求め方を示し，次に最適生産方策が，それらの需要線上で取り得る生産回数の範囲，すなわち，各需要線上での生産回数の上界と下界の求め方を示す。

d_{kl} を求めるためには，各需要線上で取り得る生産回数のすべての組合せのもとで，$\widetilde{P}$〔i_k，i_l〕を求め，そのなかから d_{kl} を定めればよい。

4・1　区間〔a_{i_k}, a_{i_l}〕内の需要線上での生産回数が与えられたもとでの$\widetilde{P}$〔i_k, i_l〕の求め方

点(a_{i_k}，b_{i_k})から数えてj番目，すなわち，点(a_0，b_0)から数えて(i_k+j)番目の需要線上の生産回数が r_{i_k+j} で与えられたもとでの$\widetilde{P}$〔i_k，i_l〕，(以後，$\widetilde{P}$〔i_k，i_l〕(r_{i_k+1}・・・，r_{i_k+R})で表現する)が存在すれば，$\widetilde{P}$〔i_k，i_l〕(r_{i_k+1}，……，r_{i_k+R})は(i_k+1)番目から(i_k+R-1)番目の需要線の最後の生産終了点によって表現できる。た

だし，j＝1，2，・・・，R，$r_{i_k+1} \geqq 2$，r_{i_k+2}，・・・，$r_{i_k+R} \geqq 1$[2)]。

これは，$\widetilde{P}[i_k, i_l](r_{i_k+1}, , \cdots, r_{i_k+R})$の($i_k+j$)番目の需要線の最後の生産終了点を($X_{i_k+j}$, Y_{i_k+j})とすると，最適生産方策の基本的性質1と系3・1より，(i_k＋j)番目の需要線の，t番目の生産開始時点$X_{i_k+j,t}$が(4・1)式で与えられ，ロット・サイズq_{i_k+j}が(4・2)式で与えられるからである。

$$(4\cdot1)\quad X_{i_k+j,t}=\begin{cases} a_{i_k}+\dfrac{(t-1)(X_{i_k+j}-a_{i_k})}{(r_{i_k+j}-1)}, & j=1,\ t=1,2,\cdots,r_{i_k+j} \\ X_{i_k+j-1}+\dfrac{t(X_{i_k+j}-X_{i_k+j-1})}{r_{i_k+j}}, & j=2,\cdots,R-1,\ t=1,2,\cdots,r_{i_k+j} \\ X_{i_k+j-1}+\dfrac{t(a_{i_k+j}-X_{i_k+j-1})}{(r_{i_k+j}+1)}, & j=R,\ t=1,2,\cdots,r_{i_k+j} \end{cases}$$

$$(4\cdot2)\quad q_{i_k+j}=\begin{cases} \dfrac{(Y_{i_k+j}-b_{i_k})}{r_{i_k+j}}, & j=1 \\ \dfrac{(Y_{i_k+j}-Y_{i_k+j-1})}{r_{i_k+j}}, & j=2,3,\cdots,R-1 \\ \dfrac{(b_{i_k+j}-Y_{i_k+j-1})}{r_{i_k+j}}, & j=R \end{cases}$$

また，Y_{i_k+j}はX_{i_k+j}の関数として，次式で与えられる。

$$(4\cdot3)\quad Y_{i_k+j}=\begin{cases} b_{i_k}+\dfrac{r_{i_k+j}\cdot D_{i_k+j}}{(r_{i_k+j}-1)}(X_{i_k+j}-a_{i_k}), & j=1 \\ Y_{i_k+j-1}+(X_{i_k+j}-X_{i_k+j-1})D_{i_k+j}, & j=2,3,\cdots,(R-1) \end{cases}$$

したがって，$\widetilde{P}[i_k, i_l]$ (r_{i_k+1}，……，r_{i_k+R})を求めるためには，(X_{i_k+1}，………，X_{i_k+R-1})を定めればよい。

(i_k＋j)番目の需要線は(2・1)式で与えられるのであるから，任意の(X_{i_k+1}，………，X_{i_k+R-1})が与えられたもとでの生産方策の総在庫量Sは次式で与えられる。

$$(4\cdot4)\quad S=(b_{i_l}-b_{i_k})(a_{i_l}-a_{i_k})-\overline{S}-T$$

---

2) ここでは，各需要線の需要変化点以外の少なくとも1点が生産開始点になる場合を扱かっている。しかし。需要線上に生産開始点を持たない需要線――すなわち，jが1のとき$r_{i_k}+j=1$，jが1以外のとき$r_{i_k}+j=0$となる需要線――があっても，その需要線が存在しないものとして需要線の番号をつけ変えることによって，各需要線上に生産開始点を持つ場合と同様に扱うことができる。

ただし，$\overline{S}$はこの生産方策の上側の領域の面積であり（４・５）式で与えられ，Tは需要累積線の下側の領域の面積であり（４・６）式で与えられる（図３参照）。

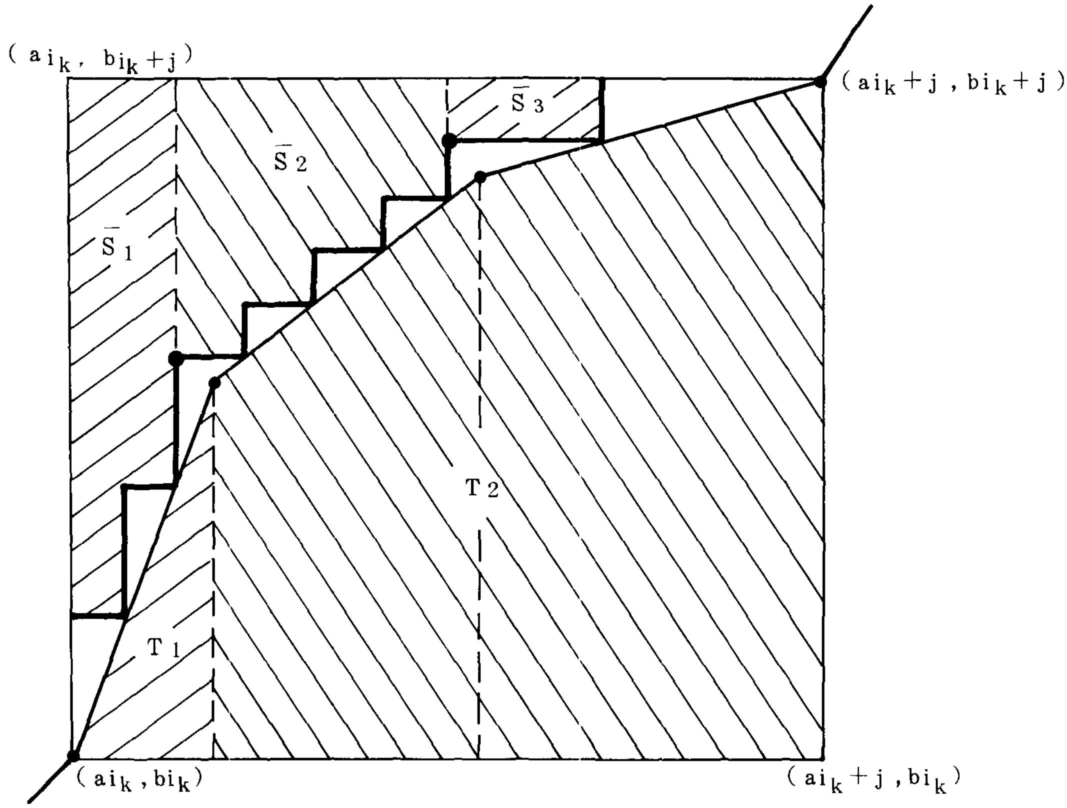

図３　生産方策の在庫量

$$
(4\cdot 5)\quad
\begin{cases}
\overline{S} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3 \\[2ex]
\overline{S}_1 = (b_{i_k+R} - b_{i_k})(X_{i_k+1} - a_{i_k}) - \dfrac{r_{i_k+1}\cdot D_{i_k+1}}{2(r_{i_k+1}-1)}(X_{i_k+1} - a_{i_k})^2 \\[2ex]
\overline{S}_2 = \sum\limits_{p=i_k+2}^{i_k+R-1} (X_p - X_{p-1})\left\{ b_{i_k+R} - Q_p - D_p X_{p-1} - \dfrac{(r_p+1)}{2r_p} D_p (X_p - X_{p-1}) \right\} \\[2ex]
\overline{S}_3 = \dfrac{r_{i_k+R}\cdot D_{i_k+R}}{2(r_{i_k+R}+1)}(a_{i_k+R} - X_{i_k+R-1})^2
\end{cases}
$$

$$(4\cdot6)\quad\begin{cases} T = T_1 + T_2 \\ T_1 = (a_{i_k+1} - a_{i_k})(b_{i_k+1} - b_{i_k})/2 \\ T_2 = \displaystyle\sum_{p=i_k+1}^{i_k+R-1} (a_{p+1} - a_p)\{(b_p - b_{i_k}) + (b_{p+1} - b_{i_k})\}/2 \end{cases}$$

また，$\widetilde{P}[i_k, i_l]$ $(r_{i_k+1}, \cdots, r_{i_k+R})$ の $(X_{i_k+1}, \cdots\cdots, X_{i_k+R-1})$ は次式を満足している〔2〕〔3〕〔4〕。

$$(4\cdot7)\qquad \frac{\partial S}{\partial X_{i_k+j}} = 0 \quad, \ j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ R-1$$

よって，$R=2$ の場合，(4・7)式を満足する X_{i_k+1} は次式で与えられる。

$$(4\cdot8)\quad \left(\frac{r_{p+1}\cdot D_{p+1}}{r_{p+1}+1} - \frac{r_p D_p}{r_p - 1}\right)X_p = \left(\frac{r_{p+1} D_{p+1}}{r_{p+1}+1} a_{p+1} - b_{p+1}\right) - \left(\frac{r_p D_p}{r_p - 1} a_{p-1} - b_{p-1}\right)$$

$$,\ p = i_k + 1$$

また，$R \geqq 3$ の場合，(4・7)式を満足する $(X_{i_k+1}, \cdot\cdot\cdot, X_{i_k+R-1})$ は次式で与えられる。

$$(4\cdot9)\quad\begin{cases} \left(\dfrac{r_{p+1}-1}{r_{p+1}} D_{p+1} - \dfrac{r_p}{r_p - 1} D_p\right)X_p + \dfrac{D_{p+1}}{r_{p+1}} X_{p+1} = -Q_{p+1} + \left(b_{i_k} - \dfrac{r_p D_p}{r_p - 1} a_{i_k}\right), \\ p = i_k + j,\ \ j = 1 \\ \dfrac{D_p}{r_p} X_{p-1} + \left(\dfrac{r_{p+1}-1}{r_{p+1}+1} D_{p+1} - \dfrac{r_p+1}{r_p} D_p\right)X_p + \dfrac{D_{p+1}}{r_{p+1}} X_{p+1} = Q_p - Q_{p+1}, \\ p = i_k + j,\ \ j = 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ R-2 \\ \dfrac{D_p}{r_p} X_{p-1} + \left(\dfrac{r_{p+1}}{r_{p+1}+1} D_{p+1} - \dfrac{r_p+1}{r_p} D_p\right)X_p = Q_p - \left(b_{p+1} - \dfrac{r_{p+1} D_{p+1}}{r_{p+1}+1} a_{p+1}\right), \\ p = i_k + j,\ \ j = R - 1 \end{cases}$$

したがって，$\widetilde{P}[i_k, i_l]$ $(r_{i_k+1}, \cdot\cdot\cdot, r_{i_k+R})$ を求めるために，(4・8)式あるいは(4・9)式の係数行列が対称行列になっている $(R-1)$ 元 $(R-1)$ 次連立方程式を解けばよい。

この解が不能の場合，$\widetilde{P}_{[i_k, i_l]}$ $(r_{i_k+1}, \cdots, r_{i_k+R})$は存在しない。不定の場合，$X_{i_k+j}$ が$X_{i_k+j'}$ の関数であることより，総在庫量はすべての解に対して一定である。ただし，$j \neq j'$，j，$j'=1, 2, \cdots, R-1$。しかも，解の中に需要変化点で生産する生産方策が考えられるので，$\widetilde{P}_{[i_k, i_l]}(r_{i_k+1}, \cdots, r_{i_k+R})$が存在しないものとみなすことができる。

よって，$\widetilde{P}_{[i_k, i_l]}(r_{i_k+1}, \cdots, r_{i_k+R})$が存在する場合は，解が唯一に定まる場合だけである。

一方，$\widetilde{P}_{[i_k, i_l]}$の任意の生産方策における　i_k+j 番目の需要線の最後の生産終了点(X'_{i_k+j}, Y'_{i_k+j})は，その点から次の需要線に生産方策（線）が入り込むのであるから，次式を明らかに満足していなければならない（図4参照）。

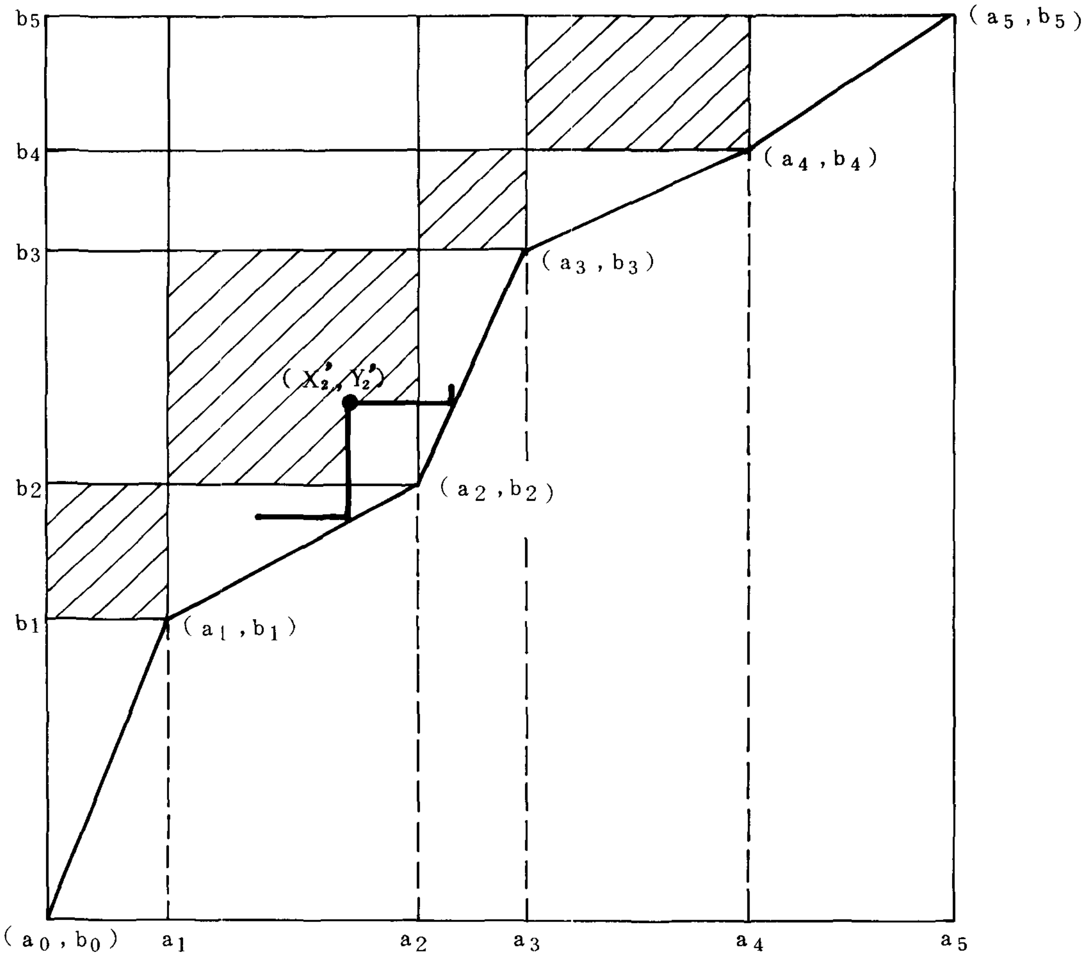

図4　各需要線の最後の生産終了点が入る領域

$$(4\cdot10)\quad \begin{cases} a_{i_k+j-1} < X'_{i_k+j} < a_{i_k+j} \\ b_{i_k+j} < Y'_{i_k+j} < b_{i_k+j+1} \end{cases},\quad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ R-1$$

以上のことから，(4・8)式あるいは(4・9)式から求まる唯一解をもとにして(4・3)式から求まる各需要線の最後の生産終了点のなかに，(4・10)式を満足しない点が存在する場合，$\widetilde{P}[i_k,\ i_l]$ $(r_{i_k+1},\ \cdots,\ r_{i_k+R})$ は存在せず，(4・10)式をすべての点が満足する場合，$\widetilde{P}[i_k,\ i_l]$ $(r_{i_k+1},\ \cdots,\ r_{i_k+R})$ は唯一に定まる。

そして $\widetilde{P}[i_k,\ i_l](r_{i_k+1},\ \cdots,\ r_{i_k+R})$ の生産費用 $F[i_k,\ i_l]$ $(r_{i_k+1},\ \cdots,r_{i_k+R})$ が次式から求まる。

$$(4\cdot11)\quad F[i_k,\ i_l](r_{i_k+1},\ \cdots\cdots,\ r_{i_k+R})=\sum_{j=1}^{R} r_{i_k+j}\cdot A+S\cdot C$$

ただし，Sは(4・4)式で与えられる総在庫量である。

4・2 各需要線上の生産回数の上界と下界

ここでは，最適生産方策の生産開始点のなかに，下に凸の需要変化点 $(a_{i_k},\ b_{i_k})$，$(a_{i_l},\ b_{i_l})$ が含まれ，区間 $(a_{i_k},\ a_{i_l})$ 内の需要変化点が含まれない場合を考える。そして，この最適生産方策の i_k+j 番目の需要線上の生産回数 $r^*_{i_k+j}$ が入るべき範囲，すなわち，上界 $N^U_{i_k+j}$ と下界 $N^L_{i_k+j}$ を定める。

n_{i_k+j} を点 $(a_{i_k+j-1},\ b_{i_k+j-1})$ から出て点 $(a_{i_k+j},\ b_{i_k+j})$ に至る生産方策の最適生産回数とすると，n_{i_k+j} は(3・3)式において，i_k を i_k+j-1，i_l を i_k+j で置き換えて求められる整数である。また，点 $(\hat{X}_{i_k+j},\ \hat{y}_{i_k+j})$ を i_k+j 番目の需要線の最初の生産開始点とし，点 $(\widetilde{X}_{i_k+j},\ \widetilde{y}_{i_k+j})$ を i_k+j 番目の需要線の最後の生産開始点とする。ただし，$j=1,\ 2,\ \cdot\cdot\cdot,\ R$，$(\hat{X}_{i_k+1},\ \hat{y}_{i_k+1})=(a_{i_k},\ b_{i_k})$，$(\widetilde{X}_{i_k+R}\ \widetilde{y}_{i_k+R})=(a_{i_k+R},\ b_{i_k+R})$。そして，$\hat{n}_{i_k+j}$ を点 $(\hat{X}_{i_k+j},\ \hat{y}_{i_k+j})$ から出て点 $(\widetilde{X}_{i_k+j},\ \widetilde{y}_{i_k+j})$ に至る生産方策の最適生産回数とすると，$\hat{n}_{i_k+j}$ は(3・3)式において，n_{i_l} を $\hat{n}_{i_k+j}$，$(a_{i_l},\ b_{i_l})$ を $(\widetilde{X}_{i_k+j},\ \widetilde{y}_{i_k+j})$，$(a_{i_k},\ b_{i_k})$ を $(\hat{X}_{i_k+j},\ \hat{y}_{i_k+j})$ に置き換えて求められる整数である。

明らかに，$n_{i_k+j} \geqq \hat{n}_{i_k+j}$ であり，jがR以外のとき，点 $(\widetilde{X}_{i_k+j},\ \widetilde{y}_{i_k+j})$ は i_k+j 番目の需要線上の生産開始点であるので，$N^U_{i_k+j}$ に関する次の命題が直ちになりたつ。

命題4・1： i_k+j 番目の需要線上の生産回数の上界 $N^U_{i_k+j}$ は次式で与えられる。

$$(4\cdot12)\quad N^U_{i_k+j}=\begin{cases} n_{i_k+j}+1, & j=1,\ 2,\ \cdots,\ R-1 \\ n_{i_k+j}, & j=R \end{cases}$$

そして，最適生産方策が i_k+j 番目の需要線上に生産開始点を持つかどうかに関する次の命題が明らかになりたつ。

命題4・2：n_{i_k+j} が2以上ならば，最適生産方策は，i_k+j 番目の需要線上の需要変化点以外の点で少なくとも1個，生産開始点を持つ。

ここで，点（a_{i_k+j-1}，b_{i_k+j-1}）から出て点（$\hat{X}_{i_k+j}$，$\hat{y}_{i_k+j}$）に至る生産方策と，点（$\tilde{X}_{i_k+j}$，$\tilde{y}_{i_k+j}$）から出て点（a_{i_k+j}，b_{i_k+j}）に至る生産方策を考えると，最適生産回数は，命題4・2より，それぞれ1になる。

よって，最適生産方策の $\hat{X}_{i_k+j}$，$\tilde{X}_{i_k+j}$ が取り得る範囲は，それぞれ（4・13）式，（4・14）式で与えられる。

$$
(4\cdot13)\quad \begin{cases} \hat{X}_{i_k+j} = a_{i_k+j-1} & ,\ j=1 \\ a_{i_k+j-1} < \hat{X}_{i_k+j} \leqq a_{i_k+j-1} + \beta_{i_k+j} & ,\ j=2,\ 3,\ \cdots,\ R \end{cases}
$$

$$
(4\cdot14)\quad \begin{cases} a_{i_k+j} - \beta_{i_k+j} \leqq \tilde{X}_{i_k+j} < a_{i_k+j} & ,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ R-1 \\ \tilde{X}_{i_k+j} = a_{i_k+j} & ,\ j=R \end{cases}
$$

ただし，β_{i_k+j} は次式で与えられる。[3)]

$$
(4\cdot15)\quad \beta_{i_k+j} = \sqrt{\frac{4A}{CD_{i_k+j}}} \qquad ,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ R
$$

ここで，$\hat{X}_{i_k+j}$ を取り得る値の最大値，$\tilde{X}_{i_k+j}$ を取り得る値の最小値で定めると，$\hat{X}_{i_k+j} < \tilde{X}_{i_k+j}$ ならば，$\hat{n}_{i_k+j}$（点（$\tilde{X}_{i_k+j}$，$\tilde{y}_{i_k+j}$）を含めるときは $n_{i_k+j}+1$）が最適生産方策の i_k+j 番目の需要線上の生産回数の下界 $N^L_{i_k+j}$ を定めることになる。

以上のことから，$N^L_{i_k+j}$ に関する次の命題が直ちになりたつ。

命題4・3：i_k+j 番目の需要線上の生産回数の下界 $N^L_{i_k+j}$ は以下のように定めることができる。

(i)　$n_{i_k+j}=1$ の場合

$$
(4\cdot16)\quad N^L_{i_k+j} = \begin{cases} 1 & ,\ j=1 \\ 0 & ,\ j=2,\ 3,\ \cdots,\ R \end{cases}
$$

(ii)　$n_{i_k+j} \geqq 2$ の場合

3）β_{i_k+j} =は，参考文献〔1〕の定理4に対応する。

$$(4 \cdot 17) \quad N^{L}_{i_k+j} = \begin{cases} 2 & , \ (a_{i_k+j} - a_{i_k+j-1}) \leqq \beta_{i_k+j} \\ \hat{n}_{i_k+j}+1 & , \ (a_{i_k+j} - a_{i_k+j-1}) > \beta_{i_k+j}, \quad j=1 \end{cases}$$

$$(4 \cdot 18) \quad N^{L}_{i_k+j} = \begin{cases} 1 & , \ (a_{i_k+j} - a_{i_k+j-1}) \leqq 2\beta_{i_k+j} \\ \hat{n}_{i_k+j}+1 & , \ (a_{i_k+j} - a_{i_k+j-1}) > 2\beta_{i_k+j}, \quad j=2, 3, \cdots, R-1 \end{cases}$$

$$(4 \cdot 19) \quad N^{L}_{i_k+j} = \begin{cases} 1 & , \ (a_{i_k+j} - a_{i_k+j-1}) < \beta_{i_k+j} \\ \hat{n}_{i_k+j} & , \ (a_{i_k+j} - a_{i_k+j-1}) > \beta_{i_k+j}, \quad j=R \end{cases}$$

4・3 d_{kl} の求め方

ここでは，区間〔 a_{i_k}， a_{i_l} 〕内に含まれる需要線の数Rが2以上の場合，d_{kl} を求める手順を示す。

手順1：各需要線の生産回数の上界 $N^{U}_{i_k+j}$ と下界 $N^{L}_{i_k+j}$ を求める。

手順2：各需要線の取り得る生産回数のすべての組合せそれぞれに対し，$\tilde{P}_{[i_k, i_l]}(r_{i_k+1}, \cdots\cdots, r_{i_k+R})$ が存在する場合は，$F_{[i_k, i_l]}(r_{i_k+1}, \cdot\cdot\cdot, r_{i_k+R})$ を求める。

手順3：手順2で求めた，すべての $F[i_k, i_l](r_{i_k+1}, \cdot\cdot\cdot, r_{i_k+R})$ のなかから，最小の値を d_{kl} とする。

5. 解法手順と例題

ここでは，本論文で扱った問題の解法手順を述べ，次に例題を1つ示す。

5・1 解法手順

手順1：下に凸の需要変化点をすべて求め，それらを順番に，(a_{i_1}, b_{i_1})，・・・，$(a_{i_\alpha}, b_{i_\alpha})$ に対応させる。そして，$(a_{i_0}, b_{i_0})=(a_0, b_0)$，$(a_{i_{\alpha+1}}, b_{i_{\alpha+1}})=(a_{M+1}, b_{M+1})$ とする。

手順2：すべてのk，lに対して，Rを求め，R＝1の場合（3・2）式から，R≧2の場合4・3の手順から d_{kl} を定める。 ただし，$k<l$，$k, l=0, 1, \cdots, \alpha+1$

手順3：次式から $f_{\alpha+1}$ を求め，最適生産方策を定める。

$$(5 \cdot 1) \quad \begin{cases} f_0 = 0 \\ f_l = \min\limits_{k=0,1,\cdots,l-1} (f_k + d_{kl}), \quad l=1, 2, \cdots, \alpha+1 \end{cases}$$

5・2 例題

A＝1万円，C＝200万円，M＝3，$(a_0, b_0)=(0, 0)$，$(a_1, b_1)=(.3, .5)$，$(a_2, b_2)=(.5, .7)$，$(a_3, b_3)=(.8, .8)$，$(a_4, b_4)=(1, 1)$の場合を考える。

手順1：$\alpha=1$，$(a_{i_0}, b_{i_0})=(a_0, b_0)$，$(a_{i_1}, b_{i_1})=(a_3, b_3)$，$(a_{i_2}, b_{i_2})=(a_4, b_4)$

表1 生産回数の下界と上界

需要線	$n_{i_k}+j$	k＝0，l＝2		k＝0，l＝1	
		$N^L_{i_k+j}$	$N^U_{i_k+j}$	$N^L_{i_k+j}$	$N^U_{i_k+j}$
1	4	4	5	4	5
2	2	1	3	1	3
3	2	1	3	1	2
4	2	1	2		

手順2：$k<l$，$k, l=0, 1, 2$

(i) $k=0$，$l=2$ のとき，$R=4$である。

$N^L_{i_k+j}$，$N^U_{i_k+j}$（表1参照）より，各需要線のすべての生産回数の組合せ（36通り）に対して$\tilde{P}[i_k, i_l](r_{i_k+1}, \cdots, r_{i_k+R})$を求めた結果，$d_{02}=19.1958$である。このとき，$r_1=4$，$r_2=2$，$r_3=2$，$r_4=2$で，$X_1=.242857$，$X_2=.436508$，$X_3=.763492$である。

(ii) $k=0$，$l=1$のとき，$R=3$である。

$N^L_{i_k+j}$，$N^U_{i_k+j}$（表1参照）より，各需要線のすべての生産回数の組合せ（12通り）に対して，$\tilde{P}[i_k, i_l](r_{i_k+1}, \cdots, r_{i_k+R})$を求めた結果，$d_{01}=14.8371$である。このとき，$r_1=4$，$r_2=2$，$r_3=1$で，$X_1=.244344$，$X_2=.441629$である。

(iii) $k=1$，$l=2$のとき，$R=1$である。

$d_{12}=4$である。このとき，$r_4=2$である。

手順3：$f_0=0$，$f_1=f_0+d_{01}=14.8371$，$f_2=\min(f_0+d_{02}, f_1+d_{12})=18.8371$

したがって，最適生産方策は，$r_1^*=4$，$r_2^*=2$，$r_3^*=1$，$r_4^*=2$の9回生産であり，(a_3, b_3)が生産開始点になる。そして，1番目の需要線，および2番目の需要線の最後の生産終了点がそれぞれ，$(.244344, .542986)$，$(.441629, .740271)$で与えられ

る。そして，総生産費用は１８．８３７１万円である。

6. おわりに

本論文では，計画期間内で需要レイトがM回変化し，任意の時点でいつでも生産できる場合，生産費用を最小にする最適生産方策を求める解法を示した。その際，各需要線の最後の生産終了点，各需要線の最初と最後の生産開始点に着目することによって，問題の考察が容易になった。

最後に，平素いろいろ御指導いただいている慶応義塾大学工学部，中村善太郎助教授に深く感謝致します。

参考文献

〔１〕 Carr, C.R. and C.W.Howe, "Optimal Service Policies and Finite Time Horizons" Management Science, 9, 1 (1963) 126～140

〔２〕 権藤，長田，"需要が漸減する場合の在庫模型の作図解法について"，ＯＲ学会予稿集，(1963)

〔３〕 L.A.Johnson and D.C.Montgomery, "Operations Research in Rroduction Planning, Scheduling, and Inventory Control", John Wily & Sons, 1974

〔４〕 小田中"ＤＰの図式解法"，オペレーションズ・リサーチ，12, 7 (1967), 25～28

〔５〕 L.B. Schwarz "Economic order Quantities for Products With Finite Demand Horizons", AIIE TRANSACTION, 4,3 (1972), 234～237

〔６〕 H.M. Wagner and T M. Whitin "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model" Management Science, 5, 1 (1958), 89～96

著者連絡先：慶応義塾大学工学部管理工学科

〒２２３ 横浜市港北区日吉町３の１４の１