

あいまい理論によるシステムの構造モデル

東京理科大学 田崎栄一郎・天笠美知夫
滝沢雅人

STRUCTURAL MODELING IN A CLASS OF SYSTEMS BY FUZZY SETS THEORY

EIICHIRO TAZAKI, MICHIO AMAGASA and
MASAHITO TAKIZAWA
Science University of Tokyo

(Received September 29, 1976, Final May 13, 1977)

Abstract. In studying complex problems, in developing plans, in managing organizations, in working with systems and in various other kinds of human endeavor, it is often desirable and sometimes essential to synthesize hierarchies. The process of arranging elements in a hierarchy is usually dealt with intuitively.

On the other hand, the concept of fuzzy sets gives an important mathematical clue for an approach to studies of such systems with no sharp boundaries. On the basis of fuzzy sets theory, we propose a method for structuring hierarchy for the several problems mentioned above, that is Fuzzy Structural Modeling (FSM) method. An important requirement for structural modeling of complex systems is that the necessary data is acquired and organized into a form which a structural model can be developed. A fuzzy reachability matrix is one such form.

The main purpose of this method is to describe and illustrate a formal procedure for constructing the graphic presentation of the hierarchical arrangement, given the necessary information concerning the relation of each element to each other element. The procedure permits the automatic development of the graphic structure that portrays the hierarchy.

The entries in the matrix are taken to values on the interval $[0,1]$ by virtue of a fuzzy binary relation. According to the matrix, a fuzzy digraph describes a contextual relation among the elements of the system and can be transformed into an interpretive structural model of the system with respect to the relation.

A significant step in the development of the proposed fuzzy structural modeling consists of the relaxation of transitivity, irreflexivity and asymmetry with respect to the construction of subordination matrix. The relaxation extends the flexibility and applicability for the structural modeling of systems.

In order to show how the proposed method works, a few examples have been illustrated and the structure for the system has been successfully identified.

1. ま え が き

これまで開発されてきたシステムズアプローチの手法は多く工学的システムに対するそれであった。一方今日、社会システムをはじめとし、いくつかの分野において非常に大規模、複雑でかつその目的も価値も多元的システムの開発が要望されており、これらの手法はそこでは必ずしも有効ではない。即ちこれらの問題は技術面に加えて社会、環境、人間心理なども考慮に入れなくてはならないためその適用が困難となる。特に社会システムにおける問題の多くはいわゆる問題複合体であり、したがってシステムズアプローチの始期段階においてその構造を同定することに多くの困難を生ずる。とりわけそこに於ける複雑な未知の問題点の存在に対しては、通常の分析的思考法による接近は不適当である。

そこでこの様な問題を取り扱う一つの立場として、定量性のある程度犠牲にしても客観的、一般的なモデルを作ることが考えられ、これを実現するものとしてグラフ理論的な構造モデルがある。構造モデルを作る手法としては、KJ法^[3]、DEMATEL^[1]、ISM^[4]などがすでに開発されているが、ここではパツェル研究所が開発した Interpretive Structural Modeling (ISM) 法に着目する。ISMでは項目間の関係を0, 1 的にとらえグラフ理論の助けをかりてシステムの構造化をはかっているが、その項目間関係のとり上げ方は実用上かならずしも満足できない場合がある。そこでここでは項目間にあいまい2項^[2]関係を導入するとともに、その演算にあいまい代数を利用することによりISM法に比較してその利用上の制約を緩和し、よって多元的価値が錯綜するシステムの構造同定により有効と考えられる手法 (Fuzzy Structural Modeling (FSM) 法) を開発しようとするものである。またさらにいくつかの例題をとり上げISM法による結果と比較しつつ、その有効性について検討する。

2. FSM法に対する数学的準備

ここではFSM法を提案する上での数学的準備としてあいまい理論^{[2][5]}に関するいくつかの性質について示すことにする。

ある空間 $S = \{ s \}$ において、その要素のメンバーシップ関数 μ_A により特性づけられる集合 A を次のように示し、これをあいまい集合とする。

$$(1) \quad A = \{ s \mid \mu_A \}$$

ここで $\mu_A : S \rightarrow [0, 1]$ とする。

あいまい集合 A のあいまい補集合 $\bar{A}$ の要素は次のメンバーシップ関数 $\bar{\mu}_A$ によって特性づけられる。

$$(2) \quad \bar{\mu}_A = \frac{1 - \mu_A}{1 + \lambda \cdot \mu_A}$$

ここで $-1 < \lambda < \infty$ はパラメータである。

また任意のあいまいベクトル Y 、あいまい行列 B およびそれらの合成 C を次のように表わす。

$$(3) \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

ここで $0 \leq y_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ であり添字 T は転置を表わす。

$$(4) \quad B = [b_{ij}]$$

ここで $0 \leq b_{ij} \leq 1, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

$$(5) \quad C = B \circ Y \Leftrightarrow C_i = \bigvee_{j=1}^n (b_{ij} \wedge y_j)$$

ここで $\bigvee_{i=1}^n a_i$ は $\max_{1 \leq i \leq n} \{a_i\}$, $a \wedge b$ は $\min(a, b)$

をそれぞれ示すものとする。

さらに集合 S の要素間のあいまい 2 項関係に関するメンバーシップ関数 $f_r, f_{\bar{r}}$ をそれぞれ次のように定義する。

$$(6) \quad f_r : S \times S \rightarrow [0, 1]$$

$$(7) \quad f_{\bar{r}} : S \times S \rightarrow [0, 1]$$

ここで $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ とし, $f_r, f_{\bar{r}}$ との関係を次のように与える。

$$(8) \quad f_{\bar{r}} = \frac{1 - f_r}{1 + \lambda \cdot f_r}, \quad -1 < \lambda < \infty$$

いま p をあらかじめ与えられた半開区間 $(0, 1]$ の実数とすると, (6) 式で与えられた f_r について次の定義をする。

〔定義 1〕 “ $\forall (s_i, s_j) \in S \times S$ に対して, $f_r(s_i, s_j) \geq p$ が満足されるならばあいまい反射律が成り立つ”。

〔定義 2〕 “ $\forall (s_i, s_i) \in S \times S$ に対して, $f_r(s_i, s_i) \leq p$ が満足されるならばあいまい非反射律が成り立つ”。

〔定義 3〕 “ $\forall (s_i, s_j) \in S \times S$ に対して, $f_r(s_i, s_j) \geq p$ でありかつ $f_r(s_j, s_i) \geq p$ ならばあいまい対称律が成り立つ”。

〔定義 4〕 “ $\forall (s_i, s_j) \in S \times S, (i \neq j)$ に対して, $f_r(s_i, s_j) < p$ あるいは $f_r(s_j, s_i) < p$ の少くともどちらか一方が成り立つならばあいまい非対称律が成り立つ”。

〔定義 5〕 “ $\forall (s_i, s_j), (s_j, s_k), (s_i, s_k) \in S \times S, (i \neq j, j \neq k, i \neq k)$ に対して

$$M = \bigvee_{j=1}^n (f_r(s_i, s_j) \wedge f_r(s_j, s_k)) \geq p \text{ のとき,}$$

$$f_r(s_i, s_k) = M \text{ が満足されるならばあいまい推移律が成り立つ。}$$

ここで, 〔定義 5〕の条件を緩和して次のあいまい半推移律を定義する。

〔定義 6〕 “ $\forall (s_i, s_j), (s_j, s_k), (s_i, s_k) \in S \times S, (i \neq j, j \neq k, i \neq k)$ に対して $M = \bigvee_{j=1}^n (f_r(s_i, s_j) \wedge f_r(s_j, s_k)) \geq p$ のとき, $f_r(s_i, s_k) \geq M$ が満足されるならばあいまい半推移律が成り立つ”。

3. システムの構造同定法

前節で示した定義に基づいてシステムの構造化を考える。ここで, システムの構造化とは, ある対象システムを構成すると考えられる要因を適当な方法(たとえば KJ 法, DEMATEL 等)により

抽出整理し、ある文脈上の関係に対して抽出された要因を階層化し、階層間ならびに階層に属する要因間の従属関係を決定し、それをグラフで表わすことである。

いま対象システムは、 $S = \{ s_1, s_2, \dots, s_n \}$ とし、抽出された要因間の従属関係を示す行列として、あいまい従属行列 A を次のように定義する。

$$(9) \quad A = [a_{ij}]$$

ここで行列 A は $n \times n$ の正方行列であり、その要素 a_{ij} は次のあいまい 2 項関係により与えられる。
 $a_{ij} = f_r(s_i, s_j)$, $0 \leq a_{ij} \leq 1$ 。すなわち、 a_{ij} は要因 s_i が要因 s_j に従属する“らしさ”を示すものである。次に通常のグラフ理論における到達可能行列と同様の意味において、あいまい従属行列に対するあいまい半到達可能行列を定義する。

〔定義 7〕“あいまい従属行列があいまい半推移律を満足すればあいまい半到達可能行列とよぶ”。

S の要素がどの階層に属するか、また階層と階層間の結合関係を与えるレベル集合の定義を次に示す。

〔定義 8〕“最上層レベル集合、中間レベル集合、最下層レベル集合および独立レベル集合をそれぞれ $L_t(s)$, $L_i(s)$, $L_b(s)$ および $L_{is}(s)$ としそれらを次のように表わす。

$$(10) \quad L_t(s) = \{ s_k \mid \bigvee_{j=1}^n a_{kj} < p \leq \bigvee_{\ell=1}^n a_{\ell k} \}$$

$$(11) \quad L_i(s) = \{ s_k \mid p \leq \bigvee_{\ell=1}^n a_{\ell k}, \quad p \leq \bigvee_{j=1}^n a_{kj} \}$$

$$(12) \quad L_b(s) = \{ s_k \mid \bigvee_{\ell=1}^n a_{\ell k} < p \leq \bigvee_{j=1}^n a_{kj} \}$$

$$(13) \quad L_{is}(s) = \{ s_k \mid \bigvee_{\ell=1}^n a_{\ell k} < p, \quad \bigvee_{j=1}^n a_{kj} < p \}$$

このように定義された最下層レベル集合と最上層レベル集合について、最下層レベル集合 $L_b(s)$ に属する要素 s_i が従属する $L_t(s)$ の要素の集合を $B(s_i)$ で表わす。このとき結合可能な要素の集合を定義するために次のブロックを導入し、これに関して単一ハイアラーキ行列を定義する。

〔定義 9〕“ $L_b(s) = \{ s_1, s_2, \dots, s_r \}$ とする。このとき次の条件のいずれかを満足する Q_j をブロックとする。ただし、条件 2) は条件 1) が満足されない時に限り採用されるものとする。

$$1) \quad \forall s_l, s_m \in L_b, B(s_l) \cap B(s_m) \neq \emptyset \text{ ならば } Q_1 = \bigcup_{i=1}^r B(s_i)$$

2) 集合 $S^{(k)}$ を $L_b(s)$ より k 番目に任意に u 個取り出し構成された集合とし、

$$S^{(1)} = \{ s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \dots, s_q^{(1)} \}, S_1^{(2)} = \{ s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \dots, s_t^{(2)} \}, \dots, S_1^{(k)} = \{ s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, \dots, s_u^{(k)} \} \text{ とする。}$$

このとき $S^{(1)} \subset L_b(s)$, $S^{(2)} \subseteq L_b(s) - S^{(1)}$, $\dots$, $S^{(k)} \subseteq L_b(s) - S^{(1)} - S^{(2)} - \dots - S^{(k-1)}$ なる関係が成り立つものとする。このとき、 $\bigcap_{\ell=1}^r B(s_i) = \emptyset$ かつ $\bigcap_{\ell=1}^q B(s_l^{(1)}) = R_1 \neq \emptyset$, $\bigcap_{m=1}^t B(s_m^{(2)}) = R_2 \neq \emptyset$, $\dots$, $\bigcap_{n=1}^u B(s_n^{(k)}) = R_k \neq \emptyset$ が成り立ち、さらに $\forall R_i, R_j$ に対して $R_i \cap R_j = \emptyset$, ($i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j$) ならば $Q_1 = \bigcup_{\ell=1}^q B(s_l^{(1)})$, $Q_2 = \bigcup_{m=1}^t B(s_m^{(2)})$, $\dots$, $Q_k = \bigcup_{n=1}^u B(s_n^{(k)})$, $1 < k \leq r$ である。

〔定義10〕“同一ブロック Q_j に從属する要素について要素間の從属関係を示す小行列をあいまい從属行列から構成する。このとき各ブロックに対応して構成された小行列を単一ハイアラーク行列 $A^{(j)}$ とよぶ”

ここで単一ハイアラーク行列は次のように構成される。

$$(14) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1i} & a_{1j} & a_{1k} & a_{1l} & a_{1m} & a_{1n} & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2i} & a_{2j} & a_{2k} & a_{2l} & a_{2m} & a_{2n} & a_{2r} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} & a_{im} & a_{in} & a_{ir} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} & a_{jm} & a_{jn} & a_{jr} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} & a_{km} & a_{kn} & a_{kr} \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} & a_{lm} & a_{ln} & a_{lr} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mi} & a_{mj} & a_{mk} & a_{ml} & a_{mn} & a_{mr} & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{ni} & a_{nj} & a_{nk} & a_{nl} & a_{nn} & a_{nr} & \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{ri} & a_{rj} & a_{rk} & a_{rl} & a_{rm} & a_{rn} & a_{rr} \end{pmatrix}$$

とする。ここで、 $a_{21}, a_{2l}, a_{il}, a_{k2}, a_{m2}, a_{mi}, a_{jr} \geq p$ とし、他の要素については p 未満の値をとるものとする。と、 $L_t(s) = \{s_1, s_l, s_r\}$, $L_b(s) = \{s_k, s_m, s_j\}$, $L_i(s) = \{s_2, s_i\}$, $L_{is}(s) = \{s_n\}$ となる。 $L_b(s)$, $L_i(s)$ に属する要素の $L_t(s)$ の少くとも一つの要素への從属性を与えるために、あいまい半推移律を満たすように A を修正し、この修正された行列を A' とすると

$$(15) \quad A' = \begin{pmatrix} a_{21} & 0 & a_{2i} & a_{2l} & a_{2r} \\ a_{i1} & a_{i2} & 0 & a_{il} & a_{ir} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{ji} & a_{jl} & a_{jr} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{ki} & a_{kl} & a_{kr} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mi} & a_{ml} & a_{mr} \end{pmatrix}$$

となる。要素 $a_{k1}, a_{kl}, a_{m1}, a_{ml}$ もまた p より大なる値となる。一方 $B(s_k) \cap B(s_m) \neq \emptyset$, $B(s_m) \cap B(s_j) = \emptyset$, $B(s_k) \cap B(s_j) = \emptyset$ より $Q_1 = B(s_k) \cup B(s_m) = \{s_1, s_l\}$, $Q_2 = B(s_j) = \{s_r\}$ である。

Q_1 に從属する要素集合は $\{s_2, s_i, s_k, s_m\}$ であり、 Q_2 に從属する要素集合は $\{s_j\}$ であるから、それぞれに対する単一ハイアラーク行列を $A^{(1)}, A^{(2)}$ とすると、これらは

$$(16) \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{21} & 0 & a_{2i} & a_{2l} \\ a_{i1} & a_{i2} & 0 & a_{il} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{ki} & a_{kl} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mi} & a_{ml} \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = [a_{jr}]$$

となる。

ある要素に対して唯一の從属要素を決定するために次の定義を与える。

〔定義11〕“ $a_{ij} \geq p$ を満たす j ($= 1, 2, \dots, n$)が唯一つ存在するとき、行 i をレギュラー行という。 $(a_{ij} \geq p$ を満たす i ($= 1, 2, \dots, n$))が唯一つ存在するとき、列 j をレギュラー列と

いう) ”

ここで、レギュラー行(列)は要素間の一意的従属関係を示している。したがって、この従属関係を示す指標をグラフに加えることによって、レギュラー行(列)の存在する必要性は無くなる。そこでレギュラー行(列)は単一ハイアラーク行列からとり除かれる。

システムの構造化に際し次の規則を定める。

〔規則 1〕 “あいまい従属行列 A ならびに修正行列 A' はあいまい非反射律、あいまい非対称律を満足するものとする。”

〔規則 2〕 “単一ハイアラーク行列において、 s_i に対するレギュラー行およびレギュラー列が存在しないならば s_i に従属する行の中での最も低次の行をレギュラー行に分割することにより s_i に従属する要素を決定するものとする。”

ここで “ s_i に従属する行の中での最も低次の行をレギュラー行に分割する” とは、 s_i に従属する行の中で閾値 p より大なる要素の数が最も少ない行をレギュラー行に分割することであり、以下において簡単な例で説明する。

$$(17) \quad \text{いま} \quad A^{(j)} = \begin{matrix} & s_l & \cdots & s_m & \cdots & s_n \\ s_i & \cdots & p_1 & \cdots & p_2 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ s_j & \cdots & p_3 & \cdots & p_4 & \cdots & p_5 \\ \vdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ s_k & \cdots & p_6 & \cdots & p_7 & \cdots & p_8 \end{matrix} \quad \text{とする。}$$

ここで $p \leq p_i$, $i = 1, 2, \dots, 8$ であり, $a_{in} < p$ とする。このとき s_l に対するレギュラー行(列)は存在しないので規則 2 により低次の行分割を行う必要がある。ここで行 s_i は 2 次であり s_j , s_k はいずれも 3 次であるので、行 s_i をレギュラー行に分割すると $A^{(j)}$ は,

$$(18) \quad A^{(j)} = \begin{matrix} & s_l & & s_m & & s_n \\ s_{i1} & \cdots & p_1 & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ s_{i2} & \cdots & 0 & \cdots & p_2 & \cdots & a_{in} \\ s_j & \cdots & p_3 & \cdots & p_4 & \cdots & p_5 \\ s_k & \cdots & p_6 & \cdots & p_7 & \cdots & p_8 \end{matrix} \quad \text{となる。}$$

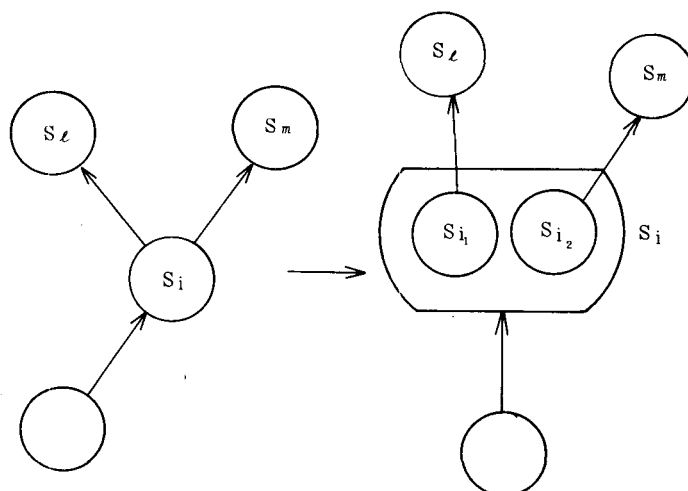


図1 低次の行分割

あいま従属行列を設定する際の規則を規則1, 2で示したが, 現実のシステムを構成するうえでこれらの規則を満足しない場合も多く存在するであろう。これについては後に考察において検討することにする。

システムの一意的構造化をはかるための準備として次の命題を与える。

〔命題1〕 “閾値 p , $0 \leq p \leq 1$ に対してあいま従属行列 A をあいま半推移律が成り立つように修正すれば, $L_i(s)$, $L_h(s)$ に属する要素は, 常に $L_t(s)$ の少なくとも一つの要素に従属する。” (証明は Appendix 参照)。

〔命題2〕 “単一ハイパーキ行列 $A^{(j)}$ において, s_i に対するレギュラー行を s_j , $j = 1, 2, \dots, n'$ とするとき, 演算 $[a^*_{\cdot i}] = [a_{\cdot i}] \wedge [\bar{a}_{\cdot 1}] \wedge [\bar{a}_{\cdot 2}] \wedge \dots \wedge [\bar{a}_{\cdot n'}]$ を行い, $A^{(j)}$ の $[a_{\cdot i}]$ を $[a^*_{\cdot i}]$ で置きかえるならば, s_i に直接従属する要素はあいま構造パラメータ λ に依存して一意的に決定される。ここで $\bar{a}$ は列ベクトルを示す。” (証明は Appendix 参照)

以上の準備のもとでシステムの構造化に対して次の定理を与える。

〔定理1〕 “規則1, 2および命題1, 2が成立するあいま従属行列をもつシステムの構造は一意的に決定される。”

〔証明〕 規則1, 2および命題1, 2の証明より明らかである。

定理より次のようなシステムの構造同定のためのアルゴリズムを提案する。

アルゴリズム

STEP 1 あいま非反射律, あいま非対称律を満足するようにあいま従属行列 $A = [a_{ij}]$ を設定し, あいま半推移律が満たされるように A を修正する。尚閾値 p , $0 < p \leq 1$ はあらかじめ設定されているものとする。ここで A の修正法の一つを次に示す。

行列 A の修正法

ステップ1: 次の演算を行うことにより A^{k+1} , $k = 1, 2, \dots, n-1$ を求める。

$A^{k+1} = A^k \circ A$, ここで $\circ$ はあいまい合成を示す。さらに $A^* = [a_{ij}^*] = A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^n$ より A^* を求める。

ステップ2: ステップ1で得られた $[a_{ij}^*]$ に対し, $a_{ij}^* < p$ ならば $a_{ij}^* = 0$, $a_{ij}^* \geq p$ ならば $a_{ij}^* = a_{ij}^*$ とする。

ステップ3: A^* のすべての要素 a_{ij}^* に対し次の演算 $a_{ij}' = a_{ij}^* \vee a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ により $[a_{ij}']$ を決定する。

STEP 2 各レベル集合 $L_t(s)$, $L_b(s)$ および $L_{i_s}(s)$ を求めブロック Q_j を決定する。

STEP 3 STEP 2で得られた $L_t(s)$, $L_b(s)$ および $L_{i_s}(s)$ に属する要素に関して, $L_t(s)$ の要素については行を消去し, $L_b(s)$ の要素については列を消去し, さらに, $L_{i_s}(s)$ の要素については行および列を消去し得られた行列を A' とする。

STEP 4 STEP 3で得られた A' を, 各ブロック Q_j に対応して分割を行い単一ハイアラーキ行列 $A^{(j)}$ を作る。

STEP 5 あいまい構造パラメータ λ の値を設定し, それぞれの単一ハイアラーキ行列 $A^{(j)}$ に関して図2に示す流れ図にしたがいシステムの構造を決定する。

ここで, s_j に対するレギュラー行を s_{i_k} , $k = 1, 2, \dots, n'$ とすると, s_{i_k} は演算 $[a \cdot j] = [a \cdot j] \wedge [a \cdot i_1] \wedge \cdots \wedge [a \cdot i_{n'}]$ を行い, $[a \cdot j]$ を $[a \cdot j^*]$ で置きかえることにより消去される。要素と要素間の従属関係および方向は, それぞれグラフ理論でのノードとブランチに相当するものである。

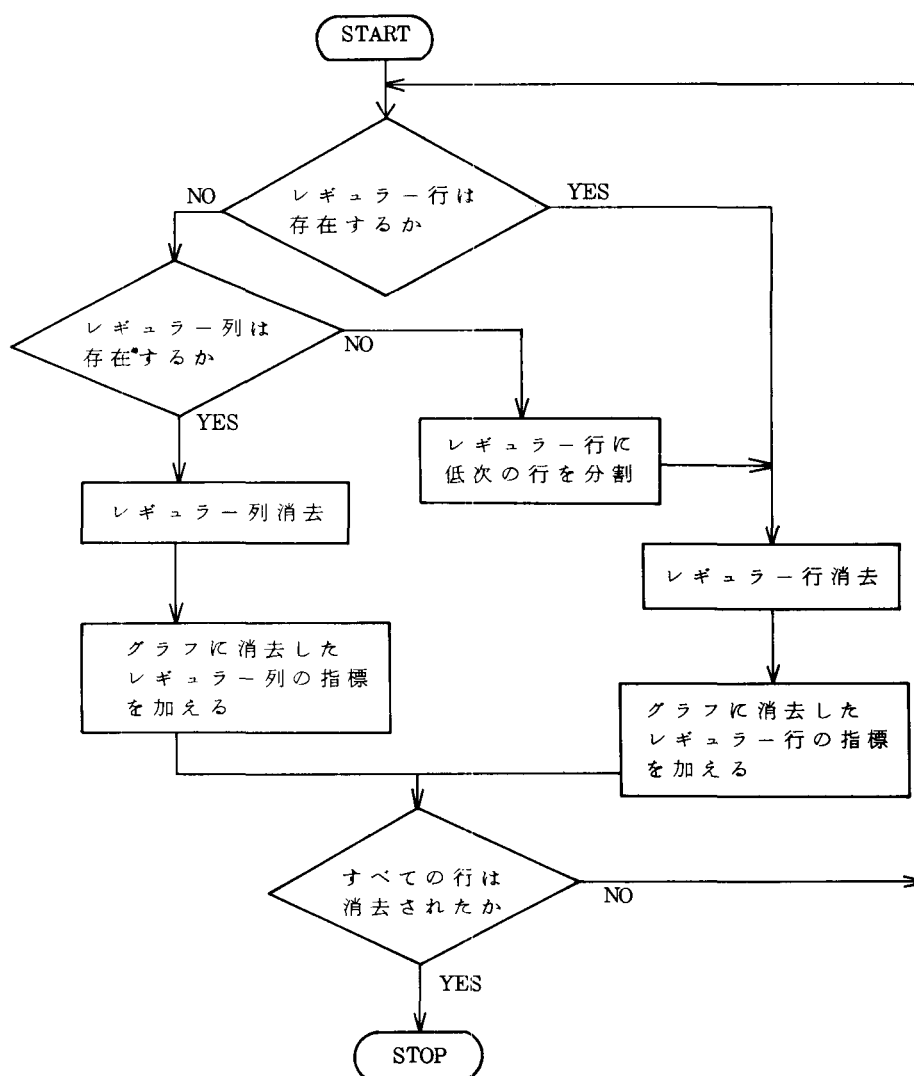


図 2 STEP 5 におけるグラフ化のための流れ図

4. 例 題

前節で提案した方法が具体的にどのように適用されるか、またその有効性を検討するため次の例題を示す。

ここで前節で述べたように、適当な方法により対象システム $S = \{ s_i, i = 1, 2, \dots, 15 \}$ が決定され、設定したあいま関係についてあいま従属行列 $A = [a_{ij}]_{15 \times 15}$ が次のように与えられたとする。

$$(14) \quad A = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.3 & 0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.0 & 0.6 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.3 & 0.7 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.6 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.7 & 0.2 & 0.0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.4 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.4 & 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.6 & 0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.4 & 0.6 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.4 & 0.1 & 0.0 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.1 \\ 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

そこでFSM法を用いて、4組の (p, λ) に対する構造同定を行ない、またこれと比較の意味で或る p の値に対して A を0-1行列に変換しISM法を用いた場合の構造をも示す。ここでその他の場合は結果だけを示すものとする。

(i) $p = 0.5$, $\lambda = -0.3$ の場合

STEP 1. あいまい非反射律およびあいまい非対称律は成立している。しかし $a_{511} = 0.7$, $a_{116} = 0.6$ であるのに $a_{56} = 0.4$ であり、あいまい半推移律が成立していない。そこで行列 A の修正法を用いると、あいまい半推移律が成立する次のあいまい従属行列 A' が得られる。

$$(20) \quad A' = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.3 & 0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.0 & 0.6 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.3 & 0.7 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.6 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.6 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.7 & 0.2 & 0.0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.4 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.4 & 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.6 & 0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.4 & 0.6 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.4 & 0.1 & 0.0 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.1 \\ 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

STEP 2. 例えば A' において, s_1 について考えると, $\bigvee_{j=1}^{15} a_{1j} = 0.2$, $\bigvee_{l=1}^{15} a_{l1} = 0.7$ であるから, s_1 は最上層レベル集合に属する。同様にすべての要素について検討すれば, $L_t(s) = \{s_1, s_6, s_{14}\}$, $L_{t_g}(s) = \{s_{12}\}$, $L_b(s) = \{s_3, s_4, s_5, s_8, s_9, s_{10}\}$ となる。次に $L_t(s)$ と $L_b(s)$ の従属関係を示す集合 $B(s_i)$ は A' より表 1 で与えられる。したがって, $B(s_3) \cap B(s_4) = B(s_3) \cap B(s_5) = B(s_3) \cap B(s_9) = B(s_3) \cap B(s_{10}) = \emptyset$, $B(s_3) \cap B(s_8) \neq \emptyset$ より $Q_1 = B(s_3) \cup B(s_8) = \{s_1\}$ となる。同様にして $Q_2 = \{s_6, s_{14}\}$ である。

表 1 $L_b(s)$ と $L_t(s)$ の従属関係

$s_i \in L_b(s)$	$B(s_i) \subset L_t(s)$
s_3	s_1
s_4	s_{14}
s_5	s_6, s_{14}
s_8	s_1
s_9	s_6, s_{14}
s_{10}	s_{14}

STEP 3 (20) 式の A' において, s_1, s_6, s_{14} の行と, $s_3, s_4, s_5, s_8, s_9, s_{10}$ の列, および s_{12} の行, 列を消去すると新たな行列 $A' = [a_{ij}]_{11 \times 8}$ が得られる。

$$(21) \quad A' = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & 2 & 6 & 7 & 11 & 13 & 14 & 15 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 13 \\ 15 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 & 0.4 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.0 & 0.6 & 0.3 & 0.7 & 0.2 & 0.6 & 0.6 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.4 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0.6 & 0.1 & 0.5 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.0 & 0.6 & 0.1 \\ 0.7 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

STEP 4 ブロック Q_1 の要素は s_1 であるから (21) 式の A' において, s_1 列だけを調べればよい。 $a_{31} > 0.5$, $a_{81} > 0.5$, $a_{151} > 0.5$ より Q_1 に従属するすべての要素は s_3, s_8, s_{15} であり, したがって Q_1 に対応した単一ハイアラーキ行列 $A^{(1)}$ は,

次に Q_2 に対応した単一ハイアラーキ行列 $A^{(2)}$ はブロックが 2 個だけであったから, $A^{(1)}$ の部分行列を (21) 式の A' から取り除いた残りの行列となり次式で与えられる。

$$(22) \quad A^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & 15 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_3 \\ 8 \\ 15 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{となる。}$$

$$(23) \quad A^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_2 & 6 & 7 & 11 & 13 & 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 13 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.0 & 0.6 \\ 0.6 & 0.3 & 0.7 & 0.2 & 0.6 & 0.6 \\ 0.0 & 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 0.4 & 0.6 & 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.0 & 0.6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

STEP 5 最初に $A^{(1)}$ についてグラフ化する。ただし、ここで $[a \cdot i]$, $[a_i \cdot]$ はそれぞれ i 列ベクトル, i 行ベクトルを表わすものとする。

(1) $A^{(1)}$ において, s_1 に対するレギュラー行は s_3, s_{15} である。よって s_3 列がないので s_1 列を

$$(24) \quad [a \cdot_1^*] = [a \cdot_1] \wedge [\overline{a \cdot_{15}}] = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 0.7 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.77 \\ 0.49 \\ 1.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.49 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

で置き換え, s_3 行, s_{15} 行を消去する。

その結果 s_1 列も消去され行列 $A_1^{(1)}$ が得られる。

$$(25) \quad A_1^{(1)} = s_8 \begin{bmatrix} s_{15} \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

ゆえにここまでのグラフは, 図 3-1 となる。

(2) $A_1^{(1)}$ において, s_{15} に対するレギュラー行は s_8 であり, s_8 列がないから置き換えをせずに s_8 行を消去する。その結果すべての行, 列成分が消去され, $A^{(1)}$ に対する構造は図 3-2 によって与えられる。次に $A^{(2)}$ において同様の操作を行う。

(3) $A^{(2)}$ において, s_{14} のレギュラー行は s_2, s_7 であるから, s_{14} 列を $[a \cdot_{14}^*] = [a \cdot_{14}] \wedge [\overline{a \cdot_2}] \wedge [\overline{a \cdot_7}]$ で置き換え, s_2 行, s_7 行を消去する。

その結果 $A_1^{(2)}$ が得られる。ここまでのグラフは図 3-3 となる。

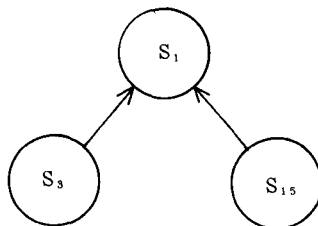


図 3-1 構造グラフの発展
($p=0.5, \lambda=-0.3$)

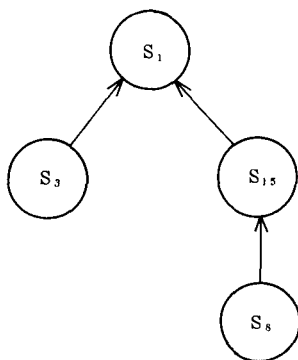


図 3-2 構造グラフの発展
($p=0.5, \lambda=-0.3$)

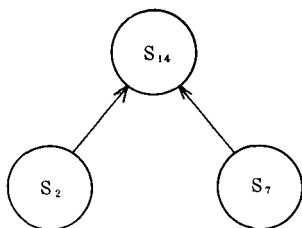


図3-3 構造グラフの発展
($p=0.5$, $\lambda=-0.3$)

$$(26) \quad A_1^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_2 & 6 & 7 & 11 & 13 & 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_4 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 13 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.7 & 0.2 & 0.6 & 0.38 \\ 0.0 & 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.0 & 0.49 \\ 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.59 \\ 0.5 & 0.4 & 0.6 & 0.1 & 0.5 & 0.49 \\ 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.0 & 0.38 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(4) $A_1^{(2)}$ において、レギュラー行、レギュラー列がないから2次の分割で済む s_{13} 行を $s_{13}A$, $s_{13}B$ に分割し次の $A_2^{(2)}$ を得る。

(5) $A_2^{(2)}$ において、 s_2 のレギュラー行は $s_{13}A$ であるから、 s_2 列を、 $[a \cdot 2]^* = [a \cdot 2] \wedge [\overline{a \cdot 13}]$ で置き換え $s_{13}A$ 行を消去する。その結果、次式の $A_3^{(2)}$ が得られここまでのグラフは図3-4となる。

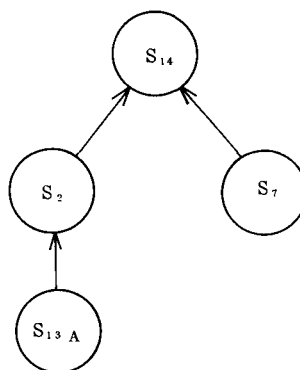


図3-4 構造グラフの発展
($p=0.5$, $\lambda=-0.3$)

(6) $A_3^{(2)}$ において、 s_7 のレギュラー行は $s_{13}B$ であるから s_7 列を $[a \cdot 7]^* = [a \cdot 7] \vee [\overline{a \cdot 13}]$ で置き換え、 $s_{13}B$ 行を消去する。その結果 $A_4^{(2)}$ が得られ、ここまでのグラフは図3-5となる。

$$(28) \quad A_3^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_2 & 6 & 7 & 11 & 13 & 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_4 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 13B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.49 & 0.3 & 0.7 & 0.2 & 0.6 & 0.38 \\ 0.0 & 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.0 & 0.49 \\ 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.59 \\ 0.5 & 0.4 & 0.6 & 0.1 & 0.5 & 0.49 \\ 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.5 \\ 0.0 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.0 & 0.38 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

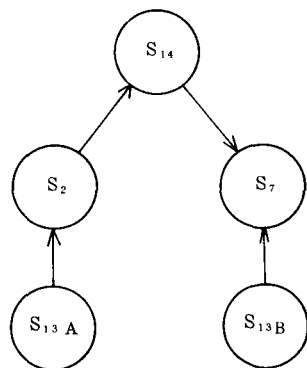


図3-5 構造グラフの発展
($p=0.5$, $\lambda=-0.3$)

$$(29) \quad A_4^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_2 & 6 & 7 & 11 & 13 & 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_4 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.49 & 0.3 & 0.49 & 0.2 & 0.6 & 0.38 \\ 0.0 & 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.0 & 0.49 \\ 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.59 \\ 0.5 & 0.4 & 0.59 & 0.1 & 0.5 & 0.49 \\ 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(7) 図 2-5 において s_{13A} と s_{13B} とは、共に s_{13} であるから再結合し図 3-6 で表わされる。

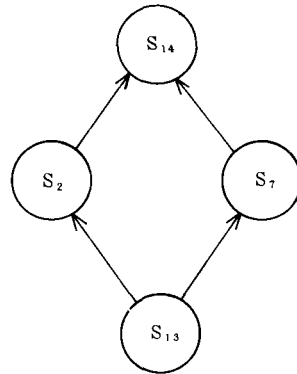


図 3-6 構造グラフの発展
($p=0.5$, $\lambda=-0.3$)

(8) $A_4^{(2)}$ において s_{13} のレギュラー行は s_4 であるが、 s_4 列がないからそのまま s_4 行を消去しその結果 $A_5^{(2)}$ が得られる。ここまでのグラフは図 3-7 となる。

$$(30) \quad A_5^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_2 & 6 & 7 & 11 & 13 & 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_5 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.0 & 0.49 \\ 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.59 \\ 0.5 & 0.4 & 0.59 & 0.1 & 0.5 & 0.49 \\ 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.0 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

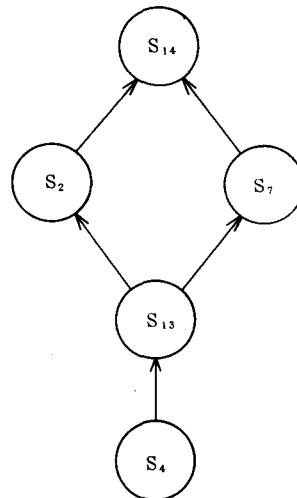


図 3-7 構造グラフの発展
($p=0.5$, $\lambda=-0.3$)

(9) $A_5^{(2)}$ において、レギュラー行はない。しかし s_{10} に対するレギュラー列は s_2 , s_{13} 列であり s_2 行, s_{13} 行がないからそのまま s_2 列, s_{13} 列を消去し $A_6^{(2)}$ を得る。またここまでのグラフは、図 3-8 となる。

$$(31) \quad A_6^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_6 & 7 & 11 & 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_5 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.49 \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.59 \\ 0.4 & 0.59 & 0.1 & 0.49 \\ 0.6 & 0.5 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

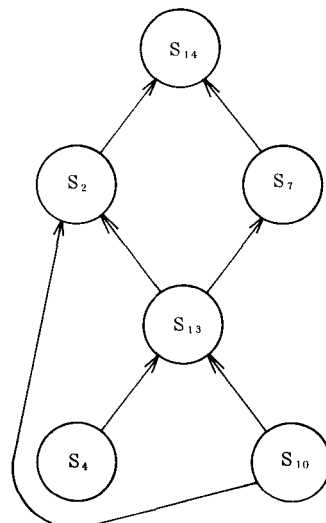


図 3-8 構造グラフの発展
($p=0.5$, $\lambda=-0.3$)

(10) $A_6^{(2)}$ において, s_7 のレギュラー行は s_{10} であり, s_{10} 列がないからそのまま s_{10} 行を消去し $A_7^{(2)}$ を得る。ここまでのグラフは図 3-9 となる。

$$(32) \quad A_7^{(2)} = \begin{matrix} & s_6 & 7 & 11 & 14 \\ s_5 & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.49 \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.59 \\ 0.6 & 0.5 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} \\ 9 & \\ 10 & \end{matrix}$$

(11) $A_7^{(2)}$ において, レギュラー行, レギュラー列が存在しないので低次の行分割を行う。3次の分割は s_5 と s_{11} であるが, s_5 は列要素にないので s_{11} 行を s_{11A} , s_{11B} , s_{11C} に分割する。その結果 $A_8^{(2)}$ が得られる。

$$(33) \quad A_8^{(2)} = \begin{matrix} & s_6 & 7 & 11 & 14 \\ s_5 & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.49 \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.59 \\ 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} \\ 9 & \\ 11A & \\ 11B & \\ 11C & \end{matrix}$$

(12) $A_8^{(2)}$ において, s_6 のレギュラー行は, s_{11A} であるから s_6 列を $[a \cdot s_6] = [a \cdot s_6] \wedge [\overline{a \cdot 11}]$ で置き換え, s_{11A} 行を消去する。同様に s_7 のレギュラー行は s_{11B} であるから s_7 列を $[a \cdot s_7] = [a \cdot s_7] \wedge [\overline{a \cdot 11}]$ で置き換え, s_{11C} 行を消去する。その結果 $A_9^{(2)}$ が得られる。

s_{11A} , s_{11B} , s_{11C} を再結合して s_{11} とすると, ここまでのグラフは図 3-10 となる。

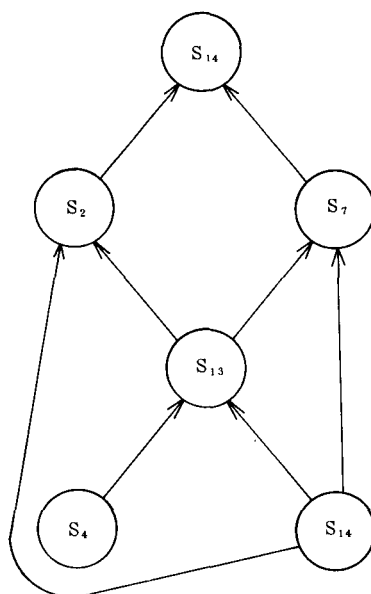


図 3-9 構造グラフの発展
($p=0.5$, $\lambda=-0.3$)

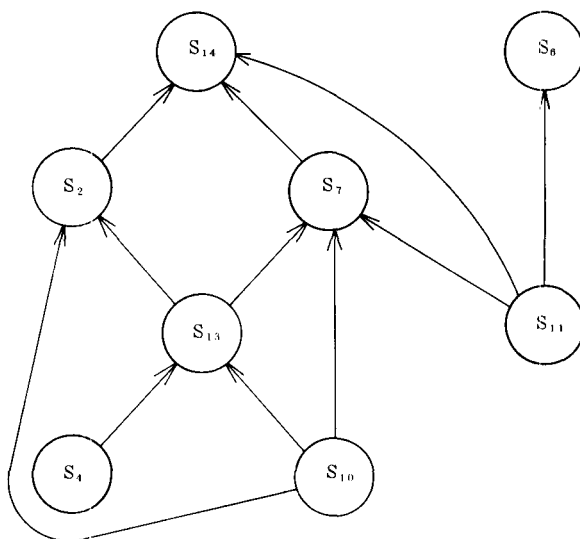


図 3-10 構造グラフの発展
($p=0.5$, $\lambda=-0.3$)

$$(34) A_9^{(2)} = \begin{matrix} & s_6 & 7 & 11 & 14 \\ s_5 & \begin{pmatrix} 0.38 & 0.38 & 0.7 & 0.38 \\ 0.38 & 0.38 & 0.7 & 0.38 \end{pmatrix} \\ 9 & \end{matrix} \quad (35) A_{10}^{(2)} = \begin{matrix} & s_{11} \\ s_5 & \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{pmatrix} \\ 9 & \end{matrix}$$

(13) $A_9^{(2)}$ において, s_6, s_7, s_{14} 列はすべて 0.5 未満の値であるので, s_6, s_7, s_{14} 列を消去する。その結果 $A_{10}^{(2)}$ が得られる。

(14) $A_{10}^{(2)}$ において, s_{11} のレギュラー行が s_5, s_9 であり, s_5 列, s_9 列がないからそのまま s_5 行, s_9 行を消去すると, $A^{(2)}$ のすべての行列要素が消去されたことになり, $A^{(2)}$ に対する構造は図 3-11 となる。

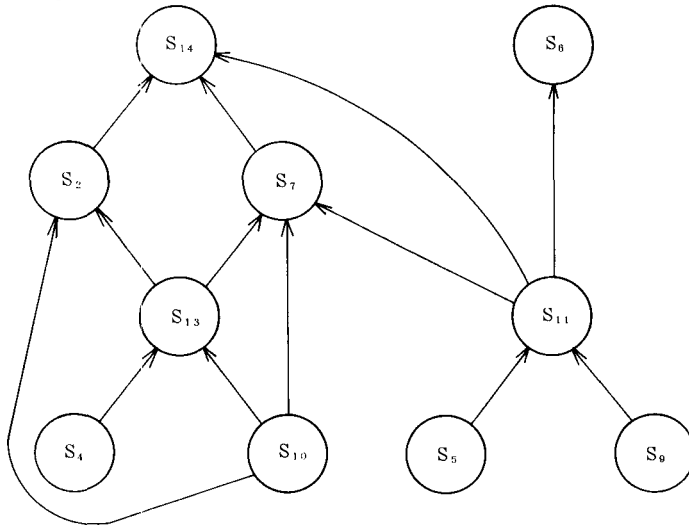


図 3-11 構造グラフの発展 ($p=0.5, \lambda=-0.3$)

したがって図 2-2 と図 2-11 の二つの単一ハイラーキ構造と独立レベル集合 $L_{i_s}(s) = \{s_{12}\}$ より, $p=0.5, \lambda=-0.3$ の場合の全体的構造は図 3-12 となる。

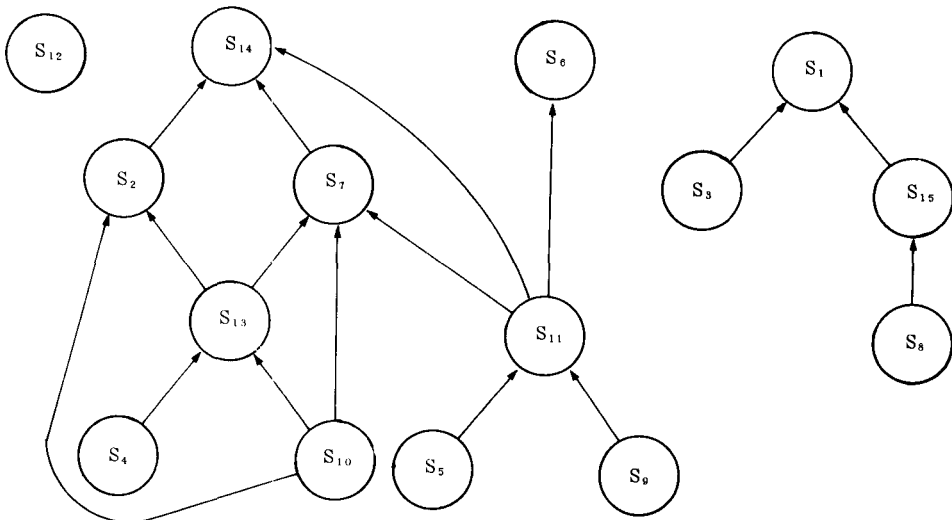


図 3-12 構造グラフの発展 ($p=0.5, \lambda=-0.3$)

(ii) $p = 0.5$, $\lambda = 0.5$ の場合

ここでは閾値 p を(i)の場合と同じとし、あいまい構造パラメータ λ を変えた場合の構造を示す。すなわちSTEP 4までの結果は(i)と全く同じとなりSTEP 5における処理が異なる。この場合の構造は図4によって与えられる。

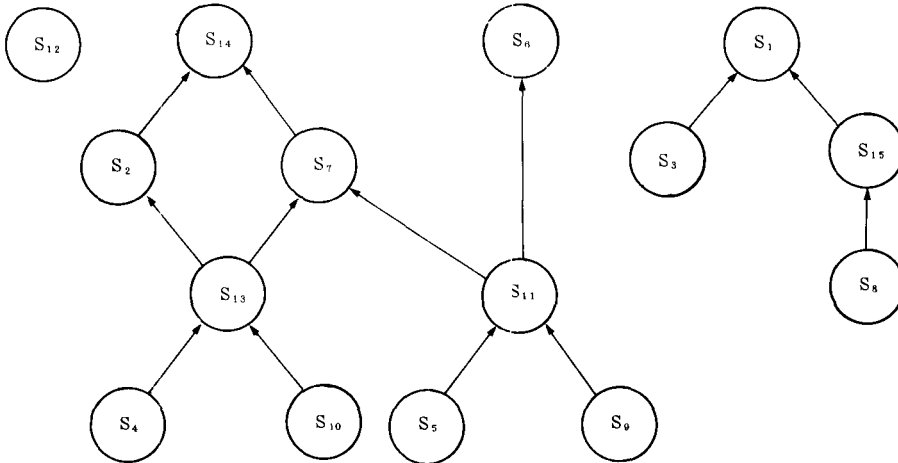


図4 例題(ii)の構造グラフ ($p=0.5$, $\lambda=0.5$) *

Note * 閾値を0.5としてISM法による場合同一の結果を得る。

(iii) $p = 0.4$, $\lambda = 1.0$ の場合

(i), (ii)と異なり独立レベル集合がなく、かつ一つの単一ハイアラーキ構造となる。そのグラフは図5で示され p を小さくしたことによって記述されるあいまい従属関係が増え、レベル数も多くなっ

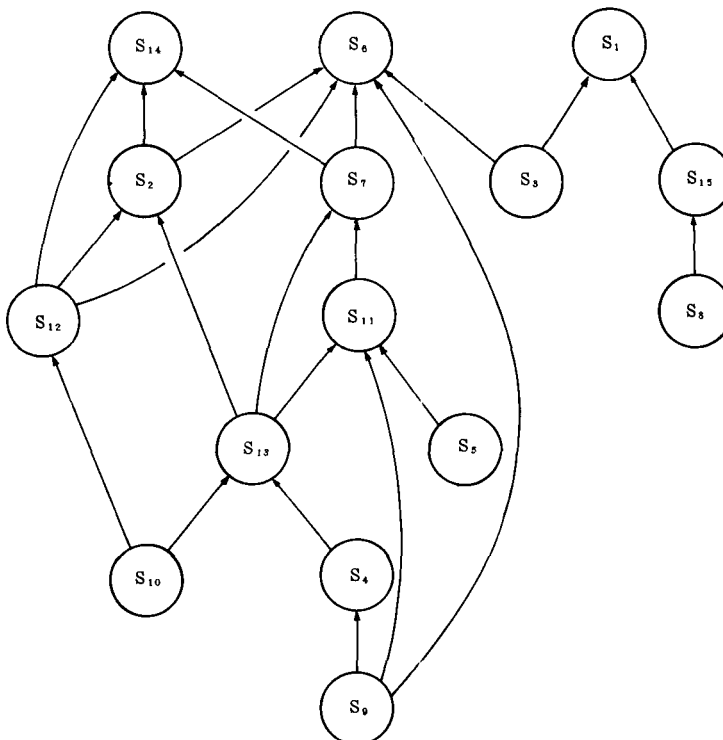


図5 例題(iii)の構造グラフ ($p=0.4$, $\lambda=1.0$)

ている。またグラフ上の間接的な結合も従属関係があると考えるので、ここでの構造は(i), (ii)で記述されたあいまい従属関係をすべて包含していると考えられる。

(Ⅳ) $p = 0.4$, $\lambda = 2.0$ の場合

値 p を(iii)の場合と同じとし、あいまい構造パラメータの値を大きくとった結果、構造は図6のようになり、これは $p = 0.4$ の場合の最も簡潔なグラフと言える。

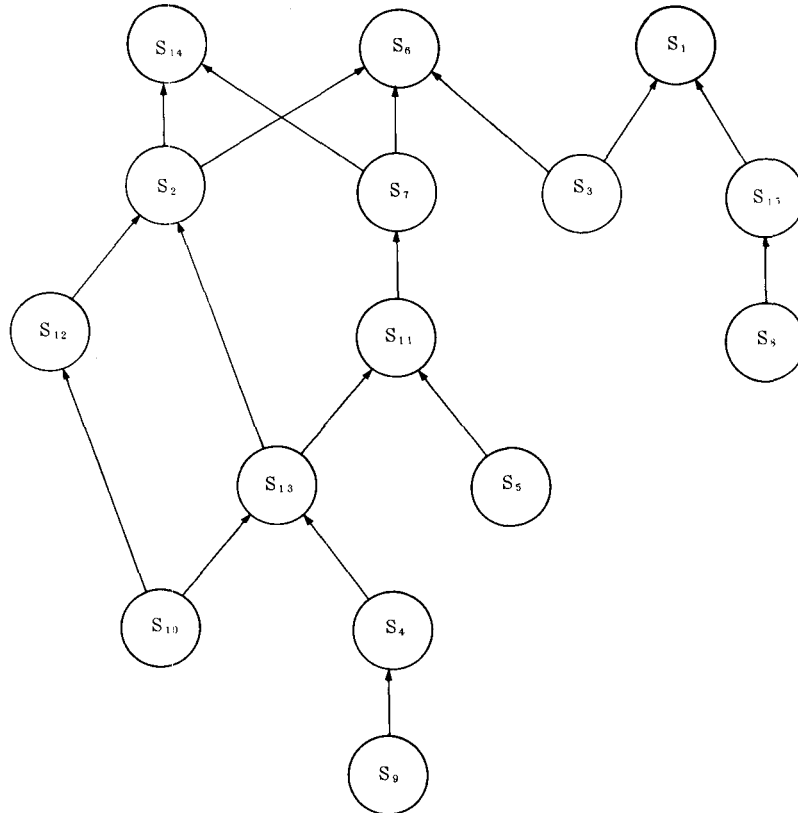


図6 - (Ⅳ) の構造グラフ ($p=0.4$, $\lambda=2.0$)

(Ⅴ) ISM法を用いた場合

$p = 0.5$ の場合のあいまい従属行列 A' において、 p 以上の要素を1とし、 p 未満の要素を0とすると0-1の従属行列が得られる。その行列にISM法を適用すると構造は(ii)の場合と全く等しくなる。すなわち図4の構造が得られた。以上 (p, λ) の種々の組合せについて構造化を行ったが、明らかに p の与え方によって構造が変化し、特に p を小さくしていくとより多くのレベルを有する構造が期待できる。しかしその反面あいまい非対称律が成立しなくなる可能性も強まってくる。また λ を変えることによって基本的な構造は変化しないが問題としている従属関係を記述することができる。例えば図5における s_9 から s_{11} へのブランチがそれである。また(ii)と(Ⅳ)の場合から明らかなように λ の値の取り方によってISM法と全く同一の構造をも得ることができる。このように p および λ を変化させることによりいくつかの異った構造を与えうることが以上の例から確認された。なおFSM法に関するいくつかの特徴については考察において検討する。

5. 考 察

本節では3, 4節における構造化の問題について検討する。

対象システム $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ の有向グラフにおいて、ある要素 s_i が s_j に直接的または間接的に従属している場合、 s_i から s_j へのパスがあるといい、特に s_i が s_i 自身に直接従属している場合には、 s_i に自己ループがあるといいパスと区別する。また s_i から s_i 自身に自己ループはないがパスが存在する場合、そのパスをサイクリックパスとよぶ。そこには s_i の他に少なくとも一個の要素があり、そのサイクリックパス上のすべての要素からなる集合を強連結集合とよぶ。(明らかにすべての強連結集合は少なくとも二個以上の要素からなる。)

これまで述べた構造同定では規則1が満足されていて、しかも強連結集合がないものとしてあいまい従属行列を扱ってきたが、実用上そのような行列を容易に与えられるかが問題となる。あいまい非反射律を満たすには行列の主対角成分をすべて0とすればよい。しかしすべての閾値においてあいまい非対称律が成立している行列を最初から与えることは一般に困難である。またあいまい半推移律が成立していなければあいまい非対称律が成立していてもサイクリックパスが現われる場合がある。例えば部分行列 A_{sub} が、

サイクリックパスが現われる。 $A_{sub} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_i & s_j & s_k \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_i \\ s_j \\ s_k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0 & p & a \\ a & 0.0 & p \\ p & a & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix}$ である場合、図7で示すようなサイクリックパスが現われる。ただし p は閾値であり $a < p$ とする。これより最初に与えられる行列では、あいまい非反射律が成立していても、常にあいまい非対称律が成立しサイクリックパスができないという保証はない。

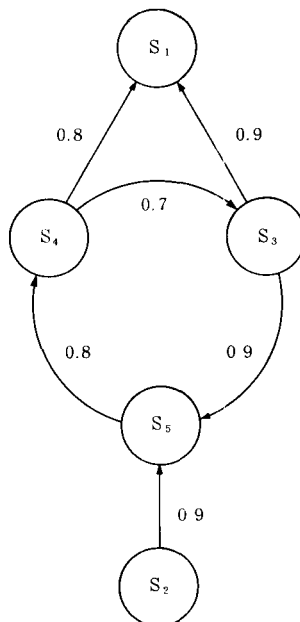


図7 サイクリックパスを含む構造グラフ

サイクリックパスがある場合にはもう一度最初のあいまい従属行列を与える段階に戻って検討し、設定した閾値においてサイクリックパスができない行列に修正すべきであり、またときには、要因そのものを考え直す必要がある場合もあろう。しかしサイクリックパスを構成する要因も含めて一応構造

化することができるならば、その結果は構造について再検討するうえで有効な情報となることも期待できる。そこで次にサイクリックパスがある場合について考察し構造化する為の一つの処理方法を提案する。

強連結集合の有無とそれらに属するすべての要素の抽出および個々の強連結集合の決定^[6]

3節で述べたあいまい半到達可能行列 A^* に着目する。規則1と行列 A^* の性質から次の命題が導かれる。

〔命題3〕 “あいまい半到達可能行列 $A^* = [a_{ij}^*]_{n \times n}$ において少なくとも二個以上の主対角成分 a_{ii}^* が $a_{ii}^* \geq p$ であるならば、その閾値 p において少なくとも一つの強連結集合 C が存在する。またその逆も成立する。”（証明は Appendix 参照）

これより強連結集合の有無が判断できる。また $a_{ii}^* \geq p$ となるすべての要素 s_i はいずれかの強連結集合に属する。ここで注意すべき点は行列 A^* において、あいまい非反射律を満たさない要素集合とあいまい非対称律を満たさない要素集合は全く同一であり、それらの要素はすべていずれかの強連結集合に属しているということである。次に個々の強連結集合を明確にするために次の定義をおく。

〔定義12〕 “任意の要素 s_i においてそれが直接的および間接的に従属しているすべての要素からなる集合を s_i の到達可能集合とよび $R(s_i)$ と表わす。” またそれらはあいまい半到達可能行列 A^* から求められ次式で定められる。

$$(36) \quad R(s_i) = \{s_j \mid a_{ij}^* \geq p\}$$

これより強連結集合に関して次の命題が成立する。

〔命題4〕 “(i)同一の強連結集合に属する要素 s_i の到達可能集合 $R(s_i)$ はすべて等しく、(ii)それと異なる強連結集合に属する要素の到達可能集合とはすべて異なる。”（証明は Appendix 参照）

したがって強連結集合を識別し、個々の強連結集合を決定することができる。これらに基づいて強連結集合決定のための次のアルゴリズムを与える。

強連結集合の決定アルゴリズム

STEP 1 あいまい半到達可能行列 $A^* = [a_{ij}^*]_{n \times n}$ において、主対角成分 a_{ii}^* が、 $a_{ii}^* \geq p$ であるすべての要素 s_i をみつけ、それらからなる集合を C とする。

STEP 2 集合 C の各要素 s_i に対して到達可能集合 $R(s_i)$ を求める。それは行列 A^* の s_i 行において、 $a_{ij}^* \geq p$ である列要素 s_j からなる集合である。またそれらの到達可能集合を要素とする集合を集合族 $R = \{R(s_i)\}$ とする。

STEP 3 集合族 R から任意の到達可能集合 $R(s_i)$ 一個をとり出し残った到達可能集合の中で $R(s_i)$ と等しいすべての集合 $R(s_j)$ を見つけ、それらもまた集合族 R から取り出す。以上のように取り出したそれぞれの集合に対応した要素 s_i, s_j からなる集合を c_k とする。それが k 番目の強連結集合である。このSTEP 3を集合族 R が空になるまで繰り返す。

次に構造化するうえでの強連結集合の処理方法を与える。

強連結集合の処理

強連結集合があればあいまい半到達可能行列は規則1を満足しない。よってそのままでは構造化が

不可能であるから、規則1を満足させるように強連結集合を処理しなければならない。このための処理方法としてここでは次の方法を提案する。

- (1) 強連結集合をそれぞれ一個の要素とみなす。
- (2) 最初に与えられたあいまい従属行列において、任意の強連結集合とそれに属さない要素とのあいまい従属関係を示す代表値を選定する。
- (3) 代表値の決定には一つの強連結集合に属するそれぞれの要素とそれに属さない要素とのすべてのあいまい従属関係を示す値を用いる。ここで代表値の決定法は種々考えられるが、簡単な例を用いて代表的な三つの場合を示す。

対象システムを $S = \{s_1, s_2, \dots, s_5\}$ とし、

最初に与えられたあいまい従属行列を

このとき $p = 0.7$, $\lambda = 0.0$ としてグラフに示す

と図8となる。前述のアルゴリズムにより強連結集合は一個で $c = \{s_3, s_4, s_5\}$ となる。それを一個の要素とみなすと得られるあいまい従属行列 A' は、

$$(38) \quad A' = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & a'_{1c} \\ 0.5 & 0.0 & a'_{2c} \\ a'_{c1} & a'_{c2} & a'_{cc} \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ と書ける。}$$

そこで a'_{cc} については規則1のあいまい非反射

律を満足させるために $a'_{cc} < p$ としなければならないが、どのような場合でも $a'_{cc} = 0.0$ とすれば十分である。次に代表値の決定とは、例えば a_{13} , a_{14} , a_{15} から代表値 a'_{1c} を決定することである。この場合他に a'_{2c} , a'_{c1} , a'_{c2} の代表値を決定しなければならないがこの決定法として次の三つの場合を考える。

(i) 例えば代表値 a'_{c1} を a_{31} , a_{41} , a_{51} の中の最小値とする場合、すなわち $a'_{ci} = \min \{a_{ji} \mid s_j \in c\}$, $s_i \in c$

(ii) 同様に a'_{ci} を a_{31} , a_{41} , a_{51} の中の最大値とする場合、すなわち $a'_{ci} = \max \{a_{ji} \mid s_j \in c\}$, $s_i \in c$

(iii) a'_{c1} を a_{31} , a_{41} , a_{51} の代数的平均値とする場合、すなわち $a'_{ci} = \frac{1}{m} \sum_j^m a_{ji}$, $s_j \in c$, $s_i \in c$

ここで示した例では、

(i) 最小値を選んだ場合、

$$A' = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.0 & 0.3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ と}$$

なり独立レベル集合の要素となる。すなわちグラフに示すと図9となる。この事に関連して次の事が

$$(37) \quad A = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.0 & 0.3 & 0.5 & 0.9 \\ 0.9 & 0.2 & 0.0 & 0.6 & 0.9 \\ 0.8 & 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 & 0.8 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ とする。}$$

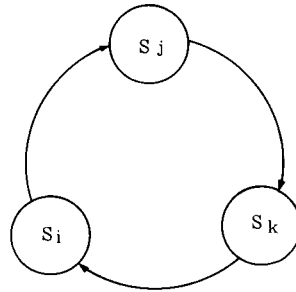


図8 サイクリックスパス

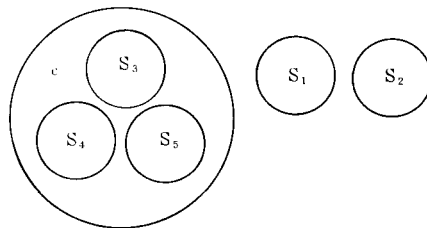


図9 cの最小値を選択した場合の構造グラフ

言える。ある強連結集合に属さない要素の中で（ここでは s_1 , s_2 ）その強連結集合に属するすべての要素と p 以上の従属関係をもつ要素が少なくとも一個存在していれば、その強連結集合は必ず単一ハイラーキ構造の中に位置し、そのような要素が一個も存在しなければ独立レベル集合に含まれる。しかもその場合単一ハイラーキ構造はその強連結集合を挟んで上位レベルの集合と下位レベルの集合の二つの単一ハイラーキ構造に分割され、その両者の従属関係はグラフに現われない。

(ii) 最大値を選んだ場合、

$$A' = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.0 & 0.9 \\ 0.9 & 0.3 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{と}$$

なり c は単一ハイラーキ構造の中に位置する。すなわちグラフで示すと図 10 になる。この場合最初のあいまい従属行列において、ある強連結集合のすべての要素がそれに属さないすべての要素と p 以上のあいまい従属関係をもたない場合、その集合は独立レベル集合に含まれる。また逆にその強連結集合の少なくとも一個の要素が、それに属さない少なくとも一個の要素と p 以上のあいまい従属関係をもっていれば、必ずその強連結集合は単一ハイラーキ構造の中に位置づけられる。

(iii) 代数的平均値を選んだ場合、

$$A' = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.0 & 0.57 \\ 0.73 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{と}$$

なりそのグラフは図 11 となる。この場合は平均値によって独立レベル集合に含まれたり単一ハイラーキ構造に位置づけられたりする。

ここでは一応代表的と考えられる三つの場合に

ついて述べたが、これらのいずれかを選択するかは個々の具体的な対象によって決定されよう。以上の結果、一般的にある与えられた閾値 p に対して規則 1 を満足し、かつ強連結集合がないあいまい従属行列を得ることが可能となり、したがって 3 節で述べたアルゴリズムをこの行列に適用することにより構造化が可能になった。

次に ISM 法と比較しつつ FSM 法の特徴を述べる。第一に ISM 法では、一つの行列から一つの構造しか得られないが FSM 法ではいく組かの (p, λ) を与えることにより種々の構造を示すことができる。これは 4 の例題より明らかである。すなわち要因間の関係をあいまい従属関係としてとら

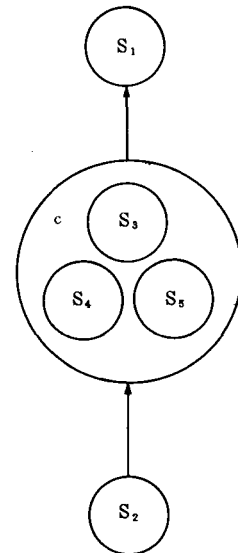


図 10 c の最大値を選択した場合の構造グラフ

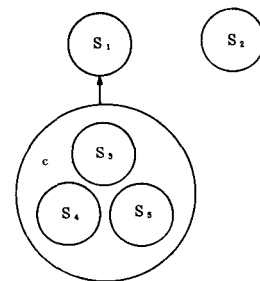


図 11 c の平均値を選択した場合の構造グラフ

え、閾値 p およびあいまい構造パラメータ λ を導入することにより自由度のある構造同定を図ることがその特徴と言えよう。ここで実際には、得られたいいくつかの構造について検討し、対象システムに最も適した構造を決定すべきである。このことを実現する一手段として最初に適当な (p, λ) を与え、得られた構造について検討し、そのうえで新たな (p, λ) を与えるというように逐次的にその構造同定を行うことが考えられる。そこで例題から明らかなように、 (p, λ) の選択に関して二つの指針が挙げられる。(i) p を大きくすると当然グラフにおけるあいまい従属関係は少なくなり、したがって独立な要因が増えレベル数が減少する。また単一ハイアラキー構造は多くなる傾向がある。すなわち全体の構造はより少ないレベルからなるより多くの単一ハイアラキー構造に分割される。逆に p を小さくすると強連結集合が生ずる可能性が高くなる。これより行列によっては強連結な集合ができないように p を設定することも可能である。(ii) λ を大きくすると、例えば図 4、図 6 のように簡潔な構造が得られる。しかしある程度以上大きな値を与えると、あって然るべきブランチまでも消去されたグラフとなり望ましい構造が得られないことも起る。一方あまり小さい値を与えるとあいまい半推移律が成立している行列において p 以上のあいまい従属関係をすべて含んだグラフとなり、この結果あまりにも複雑となり望ましい構造とならないことがある。さらに p の変化との関連においてこれを考察すれば、 p の値をより小さくした場合、同じ λ の値ではより複雑なグラフとなる。例えば 4. において $p = 0.5$ の場合には $\lambda = 0.5$ で最も簡潔なグラフが得られたが $p = 0.4$ の場合には $\lambda = 1.0$ であってもこれより複雑なグラフとなり、 $\lambda = 2.0$ にまで大きくしないと図 3 - 10 に示すグラフが得られない。このように p の値を小さくすると簡潔な構造を与える λ の値は大きくなる傾向がある。

F S M法において最初に行列を与える段階で考慮せねばならない規則は、すべての閾値においてあいまい非反射律を満足させる事だけで十分である。すなわちあいまい非対称律、あいまい半推移律に関しては考慮する必要がない。これに対して I S M法の場合には、これらに対応する規則をすべて満足するように行列を与えなければならず制約が厳しい。この意味において F S M法は行列 A を構成するうえでの制約を緩和したといえよう。しかしその反面 I S M法では、非対称律、推移律の制約によりいくつかのエントリーを先に与えたエントリーから自動的に決定できる場合もあり、エントリーを決める順序によってはすべてのエントリーについて検討する必要がない。この点 F S M法では、主対角成分を除いてすべてのエントリーについて検討しなければならない。このように F S M法は長所と短所の両面を備えているが、初めに述べた特徴と考え合わせれば実用上十分有効な手法と考えられる。

6. あ と が き

本論文においては、社会システムなどその中に複雑な未知の問題点を含むシステムに対して人間の経験や直観を生かしてある程度自動的にモデル化が進められる一手法をあいまい代数演算に基づいて提案した。特に構造化の出発点となる従属行列の構成における制約を I S M法に比較して緩和するとともに、あいまい構造パラメータの導入によってより実際に則した構造モデルが得られる可能性を与えた。しかしこのことは一方でそれだけ構造化に際して人間に荷される作業量の増加の可能性を生み、その意味において本手法はバランスのとれた運用が重要となろう。一方本手法ならびに I S M法い

れの場合も、その適用に際して適当な文脈上の関係（あるいは立場）を一つ与え、これに基づいて従属行列を構成するが、多くの場合、この関係（あるいは立場）は見かけ上一つであっても実はその中に多くの属性を含んでおり、この意味において従属行列に科せられた種々の制約（推移律、非対称律、非反射律）すべてを満足することは実用上厳しい。この意味において、本手法において導入したあいまい構造パラメータ λ は閾値 p の導入とあいまってある程度これらの条件の緩和に対して有効である。なおこの問題に対する本質的解決は、多次元属性に基づく立体的構造化を図ることが理想的と考えられるが、これに対しては多次元効用理論の一層の発展とともに構造化技法に対する今後の研究開発にまたなくてはならない。

〔参考文献〕

- [1] Gabus, A. and Fontela, E.: DEMATEL REPORT No.1, No.2, (1975), Battelle J. Inst.
- [2] Kaufman A. et al.: Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Academic Press(1975)
- [3] 川喜田二郎: KJ法, 中央公論新書(昭和47年)
- [4] Warfield J. N. et al.: A Unified Systems Engineering Concept, Battelle M. Inst. (1972)
- [5] Zadeh L. A.: Fuzzy Sets, Information and Control, 8, (1965) PP338~353
- [6] Christofides, N.: Graph Theory. An Algorithmic Approach, Academic Press(1975)

Appendix

〔命題1〕(証明)

一般に、対象システム S は次のように示される。

$$S = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_m}, s_{j_1}, s_{j_2}, \dots, s_{j_n}, s_{k_1}, s_{k_2}, \dots, s_{k_q}, s_{l_1}, s_{l_2}, \dots, s_{l_r}\}$$

$$\text{このとき, } L_i(s) = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_m}\}, L_b(s) = \{s_{k_1}, s_{k_2}, \dots, s_{k_q}\},$$

$$L_j(s) = \{s_{j_1}, s_{j_2}, \dots, s_{j_q}\}, L_s(s) = \{s_{l_1}, s_{l_2}, \dots, s_{l_r}\} \text{ で与えられ, あいまい従属行列 } A \text{ は次のように与えられる。}$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_{i_1} & \dots & s_{j_1} & \dots & s_{k_1} & \dots & s_{l_1} & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_{i_1} \\ \vdots \\ s_{j_1} \\ \vdots \\ s_{k_1} \\ \vdots \\ s_{l_1} \\ \vdots \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccc} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 k_1} & \dots & a_{i_1 l_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j_1 i_1} & \dots & a_{j_1 j_1} & \dots & a_{j_1 k_1} & \dots & a_{j_1 l_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_1 i_1} & \dots & a_{k_1 j_1} & \dots & a_{k_1 k_1} & \dots & a_{k_1 l_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l_1 i_1} & \dots & a_{l_1 j_1} & \dots & a_{l_1 k_1} & \dots & a_{l_1 l_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \end{matrix} \quad (A-1)$$

ここで, $s_{l_t} \in L_{i_g}$, ($t=1, 2, \dots, r$) であるから, これらの要素に関する行, 列要素を A からとり除くと, A は

$$A = \begin{matrix} & \dots & s_{i_1} & \dots & s_{j_1} & \dots & s_{k_1} \\ \begin{matrix} s_{i_1} \\ \vdots \\ s_{j_1} \\ \vdots \\ s_{k_1} \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} \dots & a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 k_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{j_1 i_1} & \dots & a_{j_1 j_1} & \dots & a_{j_1 k_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{k_1 i_1} & \dots & a_{k_1 j_1} & \dots & a_{k_1 k_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (A-2)$$

で示される。行列 A において $L_i(s)$ に属する要素は, $L_i(s)$ の定義より明らかなように $L_t(s)$ に属する少くとも一つの要素に従属する。したがって, $L_b(s)$ に属する要素が $L_t(s)$ に属する要素に従属することを示す。 $L_b(s)$ の定義より, $L_b(s)$ に属する要素は, $L_i(s)$ に属する要素に従属しているか, または $L_t(s)$ に属する要素に直接従属しているか少くとも一方に従属している。

いま, $L_i(s)$ に属する要素に従属しているものとする, (A-2) 式において, $L_t(s)$, $L_i(s)$ および $L_b(s)$ のそれぞれに属する任意の要素間に, 一般性を失うことなく次の関係が成り立つ。 $f_r(s_{j_1}, s_{i_1}) = p_{j_1}$, $f_r(s_{j_2}, s_{i_2}) = p_{j_2}$, $\dots, f_r(s_{j_n}, s_{i_m}) = p_{j_n}$, $\dots$, $f_r(s_{k_1}, s_{j_1}) = p_{k_1}$, $f_r(s_{k_2}, s_{j_2}) = p_{k_2}$, $\dots$, $f_r(s_{k_q}, s_{j_n}) = p_{k_q}$, $\dots$ (A-3)

ここで, $p \leq p_{j_1} \leq p_{j_2} \leq \dots \leq p_{j_m} \leq \dots \leq p_{k_1} \leq p_{k_2} \leq \dots \leq p_{k_q} \leq \dots \leq 1$ である。

このとき, あいまい半推移律を満たすように行列を修正すると,

$$f_r(s_{k_1}, s_{i_1}) = p_{j_1} \geq p, f_r(s_{k_2}, s_{i_2}) = p_{j_2} \geq p, \dots, f_r(s_{k_q}, s_{i_m}) = p_{j_n} \geq p, \dots \quad (A-4)$$

なる関係が得られる。すなわち, (A-3) 式, (A-4) 式よりあいまい従属行列 A において, あいまい半推移律が成り立てば, $L_i(s)$, $L_b(s)$ に属する要素は常に $L_t(s)$ の少くとも一つの要素に従属する。

[命 題 2] (証 明)

$$\forall s_i, s_j, s_k \in S \text{ に対して, 単一ハイアラ} \\ \text{一キ行列 } A'_j \text{ の小行列 } A'_{j_{sub}} \text{ を考える。} \quad A'_{j_{sub}} = \begin{matrix} & s_i & s_j & s_k \\ \begin{matrix} s_i \\ s_j \\ s_k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & p_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & 0 & a_{jk} \\ a_{ki} & p_{kj} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (A-4)$$

ここで $a_{jk}, a_{ji}, a_{ik} \leq p$ であり, $p_{ij}, p_{ki}, p_{kj} \geq p$ とする。このとき s_j に対するレギュラー行は s_i であるので次の演算を行う。

$$[a_{\cdot j}^*] = [a_{\cdot j}] \wedge [\bar{a}_{\cdot i}^*] = \begin{bmatrix} p_{ij} \\ 0 \\ p_{kj} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{a}_{ji} \\ \bar{p}_{ki} \end{bmatrix}, \text{ただし } \bar{p}_{ki} = (1 - p_{ki}) / (1 + \lambda \cdot p_{ki}),$$

$$\bar{a}_{ji} = (1 - a_{ji}) / (1 + \lambda \cdot a_{ji}) \text{とする。}$$

これより i) $(1 - p_{ki}) / (1 + \lambda \cdot p_{ki}) \geq p$ であれば $a_{kj}^* = p_{kj} \wedge \bar{p}_{ki} \geq p$ となり, s_k から s_j に直接従属していることになる。ii) $(1 - p_{ki}) / (1 + \lambda \cdot p_{ki}) < p$ であるならば $a_{kj}^* = p_{kj} \wedge \bar{p}_{ki} = p_{ki} < p$ となり, s_k は s_j に従属していないことになる。

したがって i), ii) より直接従属する要素は λ に依存して決定される。

〔命題 3〕 (証明)

あいまい従属行列 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ では, あいまい非反射律が成立しているから任意の要素 s_i には自己ループがない。あいまい半到達可能行列 $A^* = [a_{ij}^*]_{n \times n}$ ではあいまい半推移律が成立しているから, $a_{ij}^* \geq p$ であるならば s_i から s_j に少なくとも一つのパスが存在している。したがって $a_{ii}^* \geq p$ ならば s_i から s_i 自身に自己ループでなく, 少なくとも一個のパスが存在しており, それはサイクリックパスである。ゆえに $a_{ii}^* \geq p$ となる主対角成分があるならば, s_i を含む強連結集合が一個存在する。また一個だけの主対角成分 $a_{ii}^* \geq p$ があるならば強連結集合の要素は s_i だけであり, それゆえに s_i には自己ループがあることになり, 規則 1 のあいまい非反射律の成立する仮定に反する。よって強連結集合が存在するためには, 少なくとも二個以上の主対角成分が $a_{ii}^* \geq p$ でなければならず, かつ強連結集合は少なくとも二個以上の要素からなる。

〔命題 4〕 (証明)

(i) 同一の強連結集合に属する任意の二つの要素 s_i, s_j において, ある要素 s_k に s_i が従属しているならば, s_j が s_i に従属しているから s_j も s_k に従属している。また s_i が s_k に従属していない場合, s_j が s_k に従属しているとすると, s_i も s_k に従属していることになり矛盾する。よって s_i が s_k に従属していないならば, s_j も s_k に従属していない。よって s_j の到達可能集合は s_i のそれと等しい。

(ii) 異なる二つの強連結集合間に従属関係がないならば, 一方の強連結集合のすべての要素は, 他方の強連結集合の到達可能集合に属さない。ゆえに一方の強連結集合の要素の到達可能集合は他方のそれと異なる。両者間に一方向だけの従属関係があるならば, 一方の集合は他方の集合よりも上位レベルに位置している。その場合下位レベルの強連結集合のすべての要素は, それらの到達可能集合に属するが上位レベルの強連結集合の要素のそれには全く属さない。ゆえにそれらの到達可能集合はすべて異なる。

連絡先：天笠 美知夫

東京理科大学管理工学科

〒278 野田市山崎東亀山2641

TEL: 0471(24)1501内261