日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌
Journal of the Operations Research Society of Japan
Vol. 19, No. 4, December, 1976

鉄道における最適ダイヤおよび最適線路容量について

中央大学　山田　孜

ON THE OPTIMAL DIAGRAM AND THE OPTIMAL TRACK CAPACITY IN THE RAILWAY

ATSUSHI YAMADA, *Chuo University*

(Received January 28, 1976; Revised April 15, 1976)

Abstract. In the first place, the author gives an example of the formulation of the optimization of the railway track capacity in a special case.
Next, he shows a subject and a plan of the optimization in the general case.
And lastly, he discusses on indeterminancy and uncertainty associated with optimization and decision making of the railway diagram and capacity.

1. 序

線路容量または列車競合に関しての研究は，古くは山岸輝雄（１９４２〔7〕）の理論があり，それは更に松縄信太（１９２５）にまでも遡ぼることができる。山岸理論は，今日のこの問題における基本ともいうべく，示唆に富む種々の概念を含んでいるが，すべての評価を算術平均的に取扱うものであり，その誤差に関しての解析が困難である。このことは，時に，山岸理論は決定論的（あるいは非確率論的）なものであるといわれる理由である。しかし，氏自身必ずしも決定論的であることを意図されていたとは思われず，現代確率論的取扱い以前と呼ぶのが，正当であろう。このようなことは，経済性や需要についてもいえることであって，これらを分離した理論を考察したのは，今日ほどそれを問題にする必要に迫られなかったり，それらを同時にこの理論に盛り込むことは，かえって理論を不透明にする恐れがあったからであろう。物理的限界を山岸氏が問題にしたのは，それから実際上の容量を推定しようと考えられたからであり，この推定の規準として，氏は利用率ｆの一つの経験公式を提案しておられる。しかし，利用率こそは，氏の理論において物理的な面以外のすべてを盛り込む場所であるわけで，単一の式では不十分であった。これに対して，１９６０年前後に，森島宗太郎，西野保行などの関西方面の研究者諸氏を中心とする確率論的方法の導入が行なわれた。これらのうち特に西野理論は，国鉄の資料中に山岸理論と対比して紹介され評価されている。これは詳細なダイヤの決定方法には関係せずに，列車の流れの観測から実証されるランダム性に注目し，これを確率過程

と見なして，容量を算定しようとするものである。そこでは，ランダム性の原因までは問われていないが，結果的に見てランダム性の導入は，細かい要因や更に経済性や需要その他の要求までも丸めてしまう効果を持っている。従って，西野理論は，理論としてもエレガントであり，パラメーターの取り方をうまくすれば，実際とも良く合うが，経済性その他の要因を丸めてしまっているという点に関する限り，山岸理論の利用率を分布のパラメーターにおきかえたに過ぎない。また，この理論では，ダイヤをはじめとする鉄道本来の特性が大部分無視され，道路交通と大差のない取扱いになり，またパラメーターの取り方についての理論的根拠が示されないので，この理論を利用する者たちは必ずしもも満足してはいないようであった。

これらの研究の不満足な点を補なうために，国鉄を中心として種々の努力がなされたが，特に第3の方法として計算機によるシミュレーションの方法が優位を占めるようになった。列車ダイヤをシミュレートするという考えは，わが国の国鉄でも１９６０年前後からあったようであるが，文献ではフランスにおけるG.. MatthyおよびM.Ricard（１９５９〔1〕）が早かったようである。その後，国鉄に委託され森村英典（１９７０〔3〕；森村英典，塚田愛子（１９７２〔4〕）などの諸氏による研究が行なわれた。これらの研究も，時に，決定論的といわれるが〔5〕，シミュレーションとは，理論に対するものであり，実験的方法というべきものであろう。しかも，そこでは，理論を作り上げる際に必要な以上の芸術的なセンスが，しかもケース・バイ・ケースに燃焼するそれが必要とされるので，その解には個性がにじみ出ているものである。

以上三つの方法は，需要とか経済性，安全性についての理論的側面，更には意思決定につきまとう不確定性についての吟味は，まだ十分といえず，“実際上の要求”というものについても，最近ようやく反省の兆が見えて来ているので，ここに我々は最適線路容量とは何かということを再考してみたいと思う。

本文では，まず2.において最適化の算術的なモデルを例示してから，3.で一般の最適化への指針を示そうと思う。最後に4.では，3.で論じたタイヤが，その本性として不確定性を件うものであることについて論じたい。

2. 一つの特殊ケースについての定式化

線路容量を考える場合，考えを固定するために，我々は次のような仮定を設ける〔9〕：

仮定Ⅰ　ダイヤの周期は1日＝２４時間＝１４４０分とする。

仮定Ⅱ　列車は与えられた速度によって幾つかの種類に分類される。

仮定Ⅲ　同一種類の列車は，何れの待避駅間も一定の速度で運行する。

仮定Ⅳ　同一種類の列車は同一駅で一定の停車時間を有するが，待避駅において後続の高速列車による追越しを待つ場合にのみ停車時間が延長される。この延長時間が待時間である。

仮定Ⅴ　列車の種類別の本数の割合は一定とする。これは政策的に与えられるものとする。

注意　仮定Ⅲは，山田〔９〕，〔１１〕におけるものより弱い。

運行図表に現われる列車の筋（時間－位置の二次元空間内における列車の軌跡）を直線として考え

るため，待避駅以外の停車時間は運行時間中に繰り入れて考える。

我々がはじめに考える一つの特殊ケースでは，更に次のような仮定がなされる：

ⅰ） 各種列車の分布を一様と仮定し（これは最も不規則な最悪条件の場合であるが），平均密度を用いた定式化を行なう。

ⅱ） 目的関数の設定に当っては輸送力のみに注目する。

ⅲ） 複線区間における一方向線のみを考え，列車回送の問題は考慮しない。従って，特殊の時間帯のみを取り出して考察してもよいことになり，仮定Ⅰは不要になる。

ⅳ） 待避線についての制限を行なわない。

待避線の問題に関しては仮定Ⅲ Ⅳと列車の一様性が矛盾するかもしれないが，高速列車が追い付いた場所に待避線が直ちに（魔法の如く）出現するものと考えていただきたい。

ⅴ） 問題の線区の問題の時間帯（長さT）に走らせる列車の総本数Nを唯一の操作変数とする。

仮定Ⅱで述べた列車の種類をnとすれば，N は次のように分解する：

(1) $N=N_1+N_2+\cdots\cdots+N_n$

列車分布の一様性の仮定により一時間当りの本数，すなわち列車密度λ；λ_1，λ_2 ….，λ_n を考えることができる。そのとき，

(2) $N=T\lambda$； $N_i=T\lambda_i$， $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$

これによって，操作変数はNとλの何れを用いても変わりがないことになる。意味からするとλの方が本質的であるかもしれないが，以下ではNを用いる。

仮定Ⅱにより与えられる列車比率をγ_1 γ_2，…..，γ_nとすれば，

(3) $N_i=N\gamma_i$， $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i=1$

仮定Ⅱ，Ⅲより第i種列車の平均速度をv_iとすれば，v_i（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）は与えられたものであり，

(4) $v_1>v_2>v_3>\cdots\cdots>v_n$

としてよい。次に待避による遅れも含めた場合の平均速度（実際のダイヤ上の速度）をu_iとし，目的関数を

(5) $H=\Sigma a_i N_i u_i$

で与える。ここにa_i は各種列車の重み付けである。

第一種列車は待時間を持たないので，

(6) $u_1=v_1$

問題の線区の（始発駅から終着駅までの）距離をSとすれば，第二種列車からは

(7) $u_i=\dfrac{S}{\dfrac{S}{v_i}+W_i}$ $i=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$

ここに，W_iはi種列車一列車の出発から終着までの待時間の総計である。

W_iを計算するために，次の仮定を設ける：

仮定Ⅵ 一つの下級列車（速度の小さい列車）の待避による終着迄の遅れは，それを追越す高速列

車の本数に比例する。しかも，比例定数は追越し列車の種類のみに依存する。

（一般には，線区が混み合って来ると高速列車の運行が，逆に下級列車に妨げられることも考えられるが，ここではそのようなことは無視する。）

仮定 VIにより定まる定数，すなわち，一つの i 種列車が，一つの j 種列車（ $j < i$ ）に追越される場合の待時間を w_j とする。これによって

$$(8)\quad W_i = \frac{N}{T} \sum_{j=1}^{i-1} r_j \left(\frac{S}{u_i} - \frac{S}{u_j} \right) w_j$$

と表わせるから，(7)に代入して，

$$u_i = \frac{S}{\dfrac{S}{v_i} + \dfrac{N}{T} \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} r_j \left(\frac{S}{u_i} - \frac{S}{u_j} \right) w_j} = \frac{1}{\dfrac{1}{v_i} + \dfrac{N}{T} \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} r_j \left(\frac{1}{u_i} - \frac{1}{u_j} \right) w_j}$$

となる。両辺の逆数をとり，

$$\frac{1}{u_i} = \frac{1}{v_i} + \frac{N}{T} \sum_{j=1}^{i-1} r_j \left(\frac{1}{u_i} - \frac{1}{u_j} \right) w_j$$

$$\frac{1}{v_i} = \left(1 - \frac{N}{T} \sum_{j=1}^{i-1} r_j w_j \right) \frac{1}{u_i} + \frac{N}{T} \sum_{j=1}^{i-1} r_j w_j \frac{1}{u_j}$$

$$\frac{1}{v_{i+1}} - \frac{1}{v_i} = \left(1 - \frac{N}{T} \sum_{j=1}^{i} r_j w_j \right) \left(\frac{1}{u_{i+1}} - \frac{1}{u_i} \right)$$

$$(9)\quad \frac{1}{u_{i+1}} - \frac{1}{u_i} = \frac{1}{1 - \dfrac{N}{T} \displaystyle\sum_{j=1}^{i} r_j w_j} \left(\frac{1}{v_{i+1}} - \frac{1}{v_i} \right) \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$$

ここに，$1 - \dfrac{N}{T} \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} r_j w_j \geqq 1 - \dfrac{N}{T} \displaystyle\sum_{j=1}^{i} r_j w_j$, $\qquad i = 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$

であるが，

$$(10)\quad 1 - \frac{N}{T} \sum_{j=1}^{n-1} r_j w_j > 0$$

と仮定する。

式(9)を $i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k-1$ について加え併せて，

$$(11)\quad \frac{1}{u_k} = \frac{1}{v_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1 - \dfrac{N}{T} \displaystyle\sum_{j=1}^{i} r_j w_j} \left(\frac{1}{v_{i+1}} - \frac{1}{v_i} \right)$$

式（11）を式(5)に代入して，我々の目的関数は

$$(12)\quad H = N \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \left(\frac{1}{v_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1 - \dfrac{N}{T} \displaystyle\sum_{j=1}^{i} r_j w_j} \left(\frac{1}{v_{i+1}} - \frac{1}{v_i} \right) \right)^{-1}$$

となる。

従って，最適線路容量は，$(\gamma_i)_{i=1}^{n}$ $(v_i)_{i=1}^{n}$，$(a_i)_{i=1}^{n}$，および$(w_i)_{i=1}^{n}$が与えられたとき

$$\frac{N}{T}\sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j w_j < 1$$

なる条件の下に(12)式のHを最大にするNで与えられる。

注意 1. 更に仮定Ⅱ，Ⅴを修正して$(\gamma)_{i=1}^{n}$や$(v)_{i=1}^{n}$をも変数と考えて，上の最適化を行なうこともできることは明白である〔6〕。

注意 2. 条件 (12)，すなわち$(N/T)\sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j w_j < 1$ は，低速列車，特に第n種列車の待避待時間に自然の上限が存在することを意味する。このモデルは，最小列車間隔および待避線制限が入っていないのでこれ以上の精密化は無駄であろうが，そのかわり，ある定数W<1を政策的に決定して，$(N/T)\sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j w_j < W$ を条件として式(12)の目的関数を最大化することで，欠点をカバーできる。

3. 一般の場合に対しての最適ダイヤおよび最適線路容量の決定の方針

我々は短期的なダイヤ決定の一般的方法を問題にしている。従って，一般の場合にも 1.のような条件，操作変数，目的関数というシェーマを取り上げ，各項目を明確にする。

操作変数に関する条件は，大別して，政策的条件と物理的条件とに分けることができる。ここでいう政策的条件とは，今問題にしている最適化よりも，一段高い決定の段階からの至上命令，または理念のようなものを，数式化したもののうち，目的関数には直接組み込めないものを意味する。具体的な例としては，仮定Ⅴのような急行列車と普通列車，急行貨物列車と普通貨物列車等の列車種類の割合に関する条件とか，ある指定された列車は，ダイヤを指定してしまわねばならないといった条件である。また，普通列車が急行列車に追い越される場合の待時間には，その他の条件から自動的に出て来る自然の上限が存在するが（例えば 2.の(9)式で $u_{i+1}<u_i$ ，$v_{i+1}<v_i$ という条件から条件(10)が出て来た），更に 2.の最後に与えた注意 2 のような上限を政策的に決定する場合も考えられる。

これに対して，物理的条件は，列車の速度制限とか，待避線の条件とか，保守間合の下限とか，ダイヤの弾力性，あるいは踏切や交差点の支障度等が考えられる。

これらの条件を設定するための注意は，現在考えられる条件のうちで，考察中のダイヤに与える影響を無視できるものは除去しなければならないということである。しかし，これは重要な影響を与えるものを見逃すことよりは，まだ罪が軽い。見逃し防止のためには，まず列車条件，軌条条件，信号その他の施設条件，乗客に関する条件等に分類して，操作変数に与える影響のあらゆる要因を列挙して，これらの影響を矢印グラフに描く必要がある。例えば，

（軌条條件としての）カーブ ──┐
（列車条件としての）速度の上限 ─┘──→ 速度制限条件

というようなまとめ方を行なう。それらは必ずしも，カスケード状ではなく，フィードバック回路のような関係を呈することもあろう。その線区の列車条件，軌条條件から求まるであろうところの1

日に走らせるる最大の列車本数（最大線路容量）も一つの物理的条件であるが，最適容量を求める場合には，最大容量に影響を及ぼす他の物理的条件もすべて考慮される筈であるから，最大容量そのものは前述の除去さるべき条件となるであろう。

列車の種類は 1.の仮定Ⅲのように単に速度のみで分類するのでは十分ではない。それは，停車駅等の運行タイプと運転に伴う費用，運搬能力，乗車料金等の異同により分類されなければならない。また費用の算出条件を明確にする必要もある。

つぎに操作変数は，第一に列車の種類と本数とそれから列車のダイヤ〔8〕である。更にいくつかの政策的条件といくつかの物理的条件が，ある政策変数や物理的変数に関する不等式で与えられる場合，これらの変数も操作変数となる。例えば，1.の仮定Ｖの列車の割合が，ある範囲で与えられる場合，すなわち，

$$\alpha_i < \gamma_i < \beta_i\ ,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n,\qquad \sum_{i=1}^{n}\gamma_i = 1$$

のα_iとβ_iとが与えられた定数で，この範囲内で，$(\gamma_i)_{i=1}^{n}$の変動を許す場合は，政策条件に巾がある場合であり，γ_iを政策変数と呼び，これがまた操作変数となるのである。また，この条件のかわりに

$$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots\cdots\cdots < N_n \qquad N=N_1+N_2+\cdots\cdots+N_n$$

という条件を与えれば，$(N_i)_{i=1}^{n}$という列車本数ベクトルが操作変数になるであろう。更にまた，施設のうち，それほど大きな費用を伴わずに変動できるものがあれば，これも操作変数としてよい。例えば信号機間隔を変化させることに伴う費用が目的関数における利益の増大に比し，小さい場合などがこのような場合である。

最後に，目的関数は，

1）　貨幣的な費用と利益のバランス

2）　運搬能力（輸送力）の評価値の最大化

3）　安全性，確実性の評価値の最大化

4）　利用者の目的，要求の評価値の最大化

5）　その他，有形，無形の費用と利益の考慮

以上の1）～5）の何れかに重点を置くか，あるいは，これらに重み付けを行なってバランスを取ることを考える。

設定された政策条件，物理条件の下に操作変数を動かして目的関数を最適化するダイヤおよび線路容量を求めることができる。

注意 3. 長期的な決定においては，以上の外に他の乗物との競合，他の線区との関係，利用者数の予測，その他の経済的予測等の要因が大きく影響してくるが，それらの予測は，通常大きな誤差を伴うので，幾つかの場合に大別することによって上述の短期的決定の方法に分解帰着させることも可能であろう。

4. 最適化あるいは人為的決定に伴なう本質的な偶然性について

第２節では，ダイヤの一様性が仮定され，平均密度を用いたので，確率的な側面は背後に隠されてしまった。本節では，第３節のような方法で求められる列車ダイヤの確率的側面，更に不確定性について考察する。

列車間隔は次の三つの意味で確率的に変動する：

ⅰ）　通常的な確率変動：時刻表が定めてあっても通常的な種々の要因（加速，減速の変動，停車時間の微小変動等）により所定時刻のまわりを変動する。これは誤差変動に似ているが，鉄道においては，“進み”の方は人為的にカットされてしまう。

ⅱ）　異常的な確率変動：突発的な事故による大巾な変動が考えられる。更に事故とまではいえないが，天候の悪化や，乗客の異常な増加，他の列車の遅れの異常な累積等の影響で，事故に準ずる大きな遅れを生ずる場合がある。これらは確率的にしか予測できない。否，更に確率的な予測すら不能のこともある。

ⅲ）　最適化あるいは人為的決定に伴う本質的な偶然性：ここでは，種々の物理的および人為的な要求から定まる時刻表そのものが絶対的なものではないことを指摘したい。たとえ，ある一定な条件の下に最適な時刻表（ダイヤ）が設定されたのであったとしても，それは決定論的な方法で定まる唯一の解とは考えられないということである。すなわち，第３節のような意味での最適解を求めることができたとしても，それは唯一つとは限らず，ある集合として求まるに違いない。現実のダイヤはこの最適解集合の中から偶然的な選択を行なうことによって得られるものであると考える方が妥当であろう。更に人によって，あるいは方法によって最適解集合が，異なる場合，それらの間から一つのダイヤを決定する問題が考えられねばならない。

上記ⅰ）ⅱ）の確率的変動については国内でも国外でも種々の研究が行なわれてきた。鉄道は自動車交通とは異なって正確なダイヤが設定されており，専用軌道もあるので，確率的変動は無視できるほどのものであろうという見方をする人々も多い。しかしながら，これらに対しては，上記ⅰ）ⅱ）の変動が目的によっては無視できないことを，毎日の列車の運行状態の観測から，実証的に示した研究も行なわなている（国鉄の資料の外１９７３P.Rice〔5〕）。

我々はⅲ）の考えに基づいて，〔9〕～〔１４〕（１９６２～１９７１）の研究を行なって来たのであるが，それはⅰ），ⅱ）と混同されているようなので，〔１４〕（１９７１）においてその立場を明確に主張した。

問題は，これらの確率変動が，いかなる条件のとき，またいかなる目的のためには無視できないか，または無視できるかということであり，条件，目的を明確にした上で議論を進めなければならないということであろう。

我々は第３節のような方法で最適ダイヤを決定しようとした場合，最適ダイヤの解が唯一つに決まるという保障はどこにもないことを強調したい。むしろ目的関数を最適化する解の集合（最適解集合）が求まれば十分満足しなければならない。このとき実際のダイヤが，この解集合中から唯一つ選ばれることによって決定するという考えは，最も楽観的なものに過ぎない。一般には，目的関数が，意志決定者

の個人個人によって異なること，更に政策条件を異にするかもしれないことが考えられる。このときは，最適解集合の族が得られるに過ぎず，この中から唯一のダイヤを選出しなければならない。これは，次の段階における種々の評価の主観確立に支配されており，更に，意見の異なる決定者間の多人数ゲームを考えることになるであろう。これを我々は，言葉の妥当性はともかくとして本質的偶然性と呼んだのである。

このことを実証する方法としては，第一には鉄道の物理的要因および一定の季節における乗客または貨物の量の定常性を仮定して，過去の鉄道ダイヤの資料を集めることによるもの，第二には，ダイヤの最適解を求めるベテランを多数集めて，同一条件の下に，それぞれ独立にダイヤを決定させてみるという実験を行うことである。両方とも技術的に相当な困難が予想されるが，前者は最近の目まぐるしいダイヤの変更から推量されるであろうし，後者は，国鉄のダイヤ決定の方法などから推量されるのではないかと思う。

しかしながら，とにかく科学的実証は

1） 確率的な変動に影響を与える条件を見極めること。

2） 条件の均一化と雑音の除去による制御された実験の設定

3） この同一条件の下に多数の繰り返し実験（あるいは資料のしゅう集）を行なうこと

の三点を克服しなければならない。これには，強力なＯＲチームによる今後の研究に期待するしかないであろう。

5. 謝辞にかえて

終りにあたり本文は，一昨年Ｐ.Ｐｉｃｅ 氏が来日されたとき，国鉄本社において，鈴木誠道，山田尭，Ｐｈｉｌｉｐ Ｒｉｃｅの諸氏と長時間にわたる懇談の機会を得たことによって刺激を受けて，筆者の以前からの考えを纏めたものであることを述べ，上記諸氏および，便宜をはかっていただいた国鉄の方々への感謝の言葉にかえたい。

引用文献

〔1〕 Matthys, G.& M.Ricard, “Etude du debit maximum en marches R.O. directes entre deux triages d'une section de double voie non banallisee siege d'un trafic prioritaire,” Rev. Fran.r.o., 4. p117−146（1959）

〔2〕 宮田 一，“複雑な進路における列車競合について”，第３回鉄道ＯＲ研究発表会論文集下（昭３５年国鉄本社講堂にて発表。昭３９年３月国鉄審議室発行）p750−812，（1960）

〔3〕 Morimura, H., “An evaluation method of railroad capacity using a “pseudo−diagram” model”, Proc.5th Intern. Conf. O.R.（ed. by J. Lawrence）, Tavistock, London. p339−346,（1970）

〔4〕 森村英典，塚田愛子，“擬ダイヤ・モデルによる線路容量の評価”，日本ＯＲ学会誌“経営科学”１６巻５号 p266−276，（1972）

〔5〕 Rice, P. “Urban railway capacity in peak periods”, Trans. and Traf. Theory, Proc. of 6th intern. symp. of traf. theory.(ed. by Buckly A.H & A.W Reed) P 663−683, (1973)

〔6〕 四野宮哲郎, 山田 攻, “複線区間における線路容量について”, 昭和38年度土木学会中部支部研究発表会講演概要, p 37−44, (1963)

〔7〕 山岸輝雄, “線路容量の理論と応用”, 鉄道業務研究資料1巻5号, 鉄道技研(鉄道省), (1942)

〔8〕 山田 攻, “貨物輸送におけるダイヤの決定について”, 日本OR学会誌“経営科学”4巻1号, p 31−45, (1960)

〔9〕 , “複数区間における線路容量の求め方”, 日本OR学会誌“経営科学”6巻2号, p 99−119, (1962)

〔10〕 , “鉄道における平面交差の容量について”, 第5回鉄道OR研究発表会論文集(昭37年国鉄本社講堂において, 昭和40年3月国鉄審議室発行) P57−72, (1962)

〔11〕 , “複線区間の線路容量について”, 中央大学80周年記念論文集, p 525−535, (1965)

〔12〕 , 氏家勝巳, “複線区間の線路容量の一算定式の適用例”, 中央大学理工紀要8巻 P 178−189, (1965)

〔13〕 , “鉄道における平面交差の支障時間について”, 中央大学理工紀要12巻, p 152−159, (1969)

〔14〕 Yamada, A., “On the interfernce time duration at the railway intersection”, Jul. of Ops. Res. of Japan 13, p 111−128, (1971)

山田 攻;
中央大学理工学部管理工学科
東京都文京区春日1−13