日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌
Journal of the Operations Research
Society of Japan
Vol. 19, No. 4, December, 1976

最小停止時間、出力制約及び起動費を考慮した生産・在庫システムの一考察と揚水発電所を含む電力系統への一応用

北海道大学　大内東・加地郁夫

A PRODUCTION AND INVENTORY SYSTEM MODEL WITH MINIMUM SHUTDOWN TIME, STARTUP COST AND CONSTRAINTS FOR PRODUCTION LEVEL AND ITS APPLICATION TO POWER APPARATUS SYSTEMS

AZUMA OOUCHI and IKUO KAJI, *Hokkaido University*

(Received April 28, 1975; Revised September 26, 1975 and November 10, 1975)

Abstract. A new deterministic production and inventory system model is studied. The model differs from earlier well-known models involving minimum shutdown time, startup cost and constraints for production level.
A branch-and-bound algorithm for the optimal schdule of this model and some computational results are stated.
And an application to a power apparatus model system constructed with three thermal generators and one pumped storage hydro is also considered.

1. まえがき

決定論的生産・在庫モデルに関して多くの論文が発表されている。〔3〕〔11〕〔13〕〔14〕〔15〕 これらの論文で取り扱われているモデルは主として在庫に対する制約や目的関数の非線型性に注目したものが多い。著者等は主として生産条件に注目して種々の実システムを検討してみたがその結果，次のような制約を考慮した取り扱いが必要なシステムも多く存在することがわかった。

制約 1. 生産機構は生産出力がゼロ（ゼロレベル生産）か又は最小，最大生産量の範囲（正レベル生産）でのみ生産可能である。

制約 2. 生産機構は正レベル生産からゼロレベル生産へ移行した直後，少なくてもある一定の期間（最小停止時間）は再び正レベル生産を行うことはできない。

制約 3. 生産機構がゼロレベル生産から正レベル生産へ移行する時，起動費がかかる。しかもこの起動費は停止時間の関数として表わされる。

一般に決定論的立場をとる場合は考察期間が短期間であることが多いので制約 2 や制約 3 は特に考

慮する必要があると思われる。

本論文の第2章は上述の制約を考慮した生産・在庫システムの数理モデルを与え，第3章ではこのシステムの最適生産・在庫計画を求めるためのアルゴリズムとその数値実験の結果を述べている。また第4章では以上の理論の応用として，火力発電機3台，揚水発電所1ケ所のモデル電力系統の解析を行っている。

2. 問題の定義と定式化

2・1 問題の定義

本論文において考察の対象とするモデルはMケ所の生産機構とNケ所の在庫機構とから構成される離散時間，決定論的，生産・在庫システムである。考察期間をT区間に等分割して $t=1,\cdots,T$ とし，各時間帯tにおいて次の事柄を仮定する。

仮定1. 生産は各期首においてその期間の全量を生産し，在庫量は期末における量として考える。

仮定2. 各時間帯における需要量は既知とする。

仮定3. 生産機構の生産量制約：　各生産機構はゼロレベル生産と正レベル生産のみが許される。

仮定4. 生産機構の最小停止時間制約：　各生産機構はまえがきの2で述べた最小停止時間制約を満足しなければならない。なお，停止期間は時間帯を単位にとりその整数倍で表わす。

仮定5. 生産費用関数：　生産費用は起動費と生産量に対する費用との和で表わし，起動費は停止時間（起動する以前の連続するゼロレベル生産の時間帯数）に比例するものとする。また生産量に対する費用としては，ゼロレベル生産の時はゼロ，正レベル生産の時は固定費と生産量に比例する費用の和として表わす。

仮定6. 在庫費は在庫量に比例するものとする。

仮定7. 納入遅れ（back logging）は許さない。〔11〕〔14〕〔15〕

以上のような仮定のもとで総生産費，総起動費，総在庫費の和を最小にする計画を求める。

2・2 定式化

本論文で用いる記号を以下のように定義する。

t：　時間帯番号

m：　生産機構番号

n：　在庫機構番号

M：　生産機構の個数

N：　在庫機構の個数

T：　時間帯数

r^t：　t時間帯における需要量（非負）

x_m^t：　t時間帯における第m生産機構の生産量

q_n^t：　t時間帯からt＋1時間帯への第n在庫機構の在庫量

α_n，β_n：　第n在庫機構の初期在庫及び最終在庫

v^t_m, V^t_m ： t時間帯における第m生産機構の正レベル操業時の最小生産出力及び最大生産出力

W^t_n ： t時間帯からt＋1時間帯への第n在庫機構の最大許容在庫量

K_m ： 第m生産機構の最小停止時間

d^t_m ： t時間帯における第m生産機構の固定費

c^t_m ： t時間帯における第m生産機構の単位生産費

a^t_n ： t時間帯からt＋1時間帯への第n在庫機構における単位在庫費

b_m ： 第m生産機構の単位起動費

s^t_m ： t時間帯における第m生産機構の起動費関数

f^t_m ： t時間帯における第m生産機構の生産費用関数（図1に起動費も含めたf^t_mを示す。Aは起動費がゼロの場合，Bはある停止時間後再起動した場合のそれぞれの生産費用関数である）

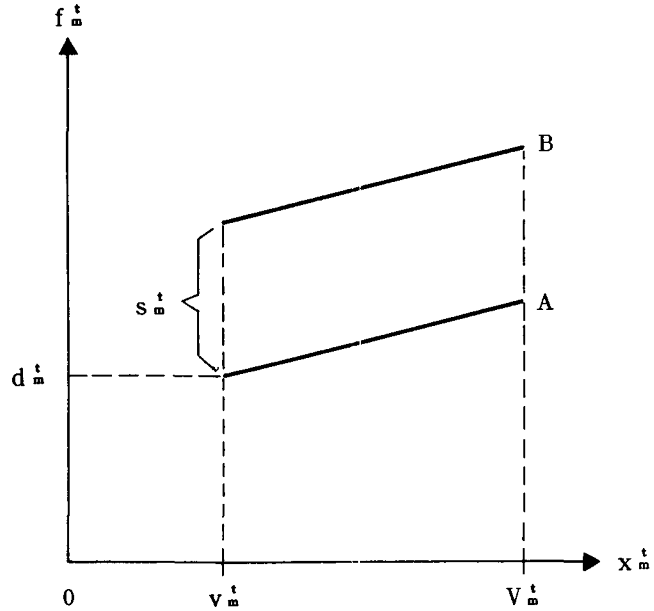

図1.　起動費を含めた生産費用関数

Aは起動費がゼロの場合

Bは起動費がs^t_mである場合

h^t_n ： t時間帯からt＋1時間帯への第n在庫機構における在庫費用関数

$\vec{x}^t$ ： $\vec{x}^t=(x^t_1, x^t_2, \cdots, x^t_M)$

$\vec{q}^t$ ： $\vec{q}^t=(q^t_1, q^t_2, \cdots, q^t_N)$

$\vec{x}$ ： $\vec{x}=(\vec{x}^1, \vec{x}^2, \cdots, \vec{x}^T)$

$\vec{q}$ ： $\vec{q}=(\vec{q}^1, \vec{q}^2, \cdots, \vec{q}^T)$

以上の記号を用いて問題は次のように定式化される。

〔問題P〕

目的関数：

(1)　$F(\vec{x}, \vec{q}) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{m=1}^{M} f_m^t(x_m^t) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{n=1}^{N} h_n^t(q_n^t) \rightarrow$ 最小

拘束条件：

(2)　$\sum_{m=1}^{M} x_m^t + \sum_{m=1}^{N} q_n^{t-1} - \sum_{n=1}^{N} q_n^t = r^t, \quad t=1, \cdots, T$

(3)　$x_m^t = 0$　又は　$v_m^t \leqq X_m^t \leqq V_m^t, \quad m=1, \cdots, M$

$t=1, \cdots, T$

(4)　$0 \leqq q_n^t \leqq W_n^t, \quad n=1, \cdots, N$

$t=1, \cdots, T$

(5)　$q_n^0 = \alpha_n, \quad q_n^T = \beta_n, \quad n=1, \cdots, N$

(6)　$r^t \geqq 0, \quad t=1, \cdots, T$

(7)　もし　$v_m^{t-1} \leqq X_m^{t-1} \leqq V_m^{t-1}$　で且つ$X_m^t = 0$ならば　$X_m^{t+1} = X_m^{t+2} = \cdots = X^{t+K_m} = 0, \quad m=1, \cdots, M, \quad t=2, \cdots, T$

但し，$t+i \geqq T, \ i=1, 2, \cdots$の時は$t+i$をTとおくことにする。

ここでf_m^tは$u(x)$を

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{の時} \\ 0, & x = 0 \text{の時} \end{cases}$$

なる関数とする時，次の(8)式によって与えられる。

$$(8)\quad f_m^t(x_m^t) = \begin{cases} 0, & x_m^t = 0 \text{の時} \\ d_m^t + c_m^t(x_m^t - v_m^t) + s_m^t(1 - u(x_m^{t-1})), & v_m^t \leqq X_m^t \leqq V_m^t \text{の時} \end{cases}$$

また，

(9)　$h_n^t(q_n^t) = a_n^t q_n^t$

であり，s_m^tはx_m^tに先行する停止時間をyとすれば

(10)　$s_m^t = b_m y$

である。(但し，$b_m > 0$)

問題Pにおける制約式(3)と(7)は0－1整数変数δ_m^tを導入して次のように定式化することもできる。〔8〕

今，簡単のために$K_m = 1, \ m=1, \cdots, M$とする。生産量制約は次のように書ける。

$v_m^t \ \delta_m^t \leqq X_m^t \leqq v_m^t \ \delta_m^t$

また，

$\triangle_m^t = (\delta_m^t - \delta_m^{t-1}) - (\delta_m^{t-1} - \delta_m^{t-2})$

と定義すれば最小停止時間制約は

$\triangle_m^t \leqq 1$

と表わすことができる。

このような定式化は例えば起動費を考慮しないで f_m^t や h_m^t が線型の時は問題Pを0－1混合整数線型計画問題として取り扱うことになるので既存のアルゴリズムを利用できる長所がある。しかしながら，それにしても δ_m^t を用いた定式化は，3MT本の制約式とMT個の0－1整数変数を加えることになり有効な結果は望めない。

本論文では分枝限定法を用いて最小停止時間の制約や生産出力制約をアルゴリズム自体に埋め込むことによって問題Pを解くことを可能にしている。

3. アルゴリズム

ここで述べるアルゴリズムは次の観察に基いている。2・2で述べた問題Pで変数 x_m^t，$m=1, \cdots, M$，　$t=1, \cdots, T$　を $x_m^t \in [0,\ 0]$ か又は $x_m^t \in [v_m^t,\ V_m^t]$ のいずれか一方に制約固定したすべての組合せを考える。この組合せは全部で 2^{MT} 通りあるが，このうち最小停止時間制約（7）式を満足する組合せのみを考え，その集合を $S=\{s\}$ とする。$s \in S$ に対して次の問題 ω を対応させる。

〔問題 ω〕

目的関数：（1）式 → 最小

拘束条件：　x_m^t，$m=1, \cdots, M$，　$t=1, \cdots, T$　は組合せ s により与えられる制約に従う。

（2），（4），（6），（8），（9），（10）式

組合せ s で表現される制約のもとで目的関数（1）を含めて，（2），（4），（5），（8），（9），（10）の各式はすべて線型となり組合せ s に対応する問題 ω は1つの線型計画問題を形成する。Sの元 s に対応する問題 ω の集合 Ω を考え，これを問題集合（有限集合）と呼ぶ。問題 $\omega \in \Omega$ の実行可能解は明らかに原問題Pの実行可能解であり，また逆に問題Pの任意の実行可能解に対して，これを実行可能解とする問題 ω が必らず Ω の中に存在する。更にこの時，1つの実行可能解を問題Pの実行可能解とみて計算した目的関数の値と，問題 ω の実行可能解とみて計算した目的関数の値は等しい。それ故，Ω に属する少なくても1つの問題 ω^* の解が原問題Pの最適解を与えることになる。問題 ω^* を最適問題と呼ぶことにし，この最適問題を分枝限定法により求め，最適問題 ω^* の解をシンプレックス法により求めると問題Pを解くことが可能である。

3・1　分枝限定法による最適問題の求め方

次の定義を行っておく。

部分問題集合 Ω_J：　Ω の部分集合を Ω_J や Ω_K とアルファベット大文字の添字を付けて表わす。

Ωの分割：　ΩからΩ_J，Ω_K，・・・，Ω_Lへの排他的な分割をΩの分割と呼ぶ。すなわち，

$$\Omega_J \cup \Omega_K \cup \cdots \cup_L = \Omega$$

$$\Omega_J \cap \Omega_K = \phi, \quad J \neq K$$

$L(\Omega_J)$：　部分集合Ω_Jに属するすべての問題ωの最適値の下限値を$L(\Omega_J)$と表わす。

Ω_Jからの分枝：　部分集合Ω_Jを２つの部分集合Ω_{J_1}とΩ_{J_2}へ分割することを分枝と呼ぶ。ここで，

$$\Omega_{J_1} \cup \Omega_{J_2} = \Omega_J$$

$$\Omega_{J_1} \cap \Omega_{J_2} = \phi$$

Ω_Jの限定：　$L(\Omega_J)$を求めることをΩ_Jを限定するという。

分枝限定法の一般原理や詳細についてはすでに述べられているので，ここでは簡単に分枝と限定の方法について述べることにする。〔５〕〔６〕〔７〕

a　部分問題集合Ω_Jを表わす行列の定義

指標０，１，２に対して３つの閉区間，$I(m, t, 0) = [0, V_m^t]$，$I(m, t, 1) = [0, 0]$，$I(m, t, 2) = [v_m^t, V_m^t]$を導入する。分枝限定法の過程において現われる部分問題集合Ω_Jは（１１）式に述べる$M \times T$次の指標の行列Ｊを用いて簡潔に表現できる。

$$(11)\quad J = \begin{bmatrix} j_1^1 & j_1^2 & \cdots & j_1^{l_1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ j_m^1 & j_m^2 & \cdots\cdots\cdots & j_m^{l_m} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ j_M^1 & j_M^2 & \cdots & j_M^{l_M} & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ここで，Ｊのｍ行ｔ列の要素j_m^tは

$$(12)\quad j_m^t = \begin{cases} 1\text{又は}2, & 1 \leqq t \leqq l_m\text{の時} \\ 0, & l_m + 1 \leqq t \leqq T\text{の時} \end{cases}$$

である。

行列Ｊにはそのすべての非ゼロ要素j_m^tに対応する変数x_m^tが$x_m^t \in I(m, t, j_m^t)$に制約されているような問題ωの集合，すなわち部分問題集合Ω_Jが対応している。

b　部分問題集合Ω_Jからの分枝規則

$l_k = \min_m \{l_m\}$とし，Ｊのｋ行$l_k + 1$列要素を１か又は２とすることによってそれぞれ２つの行列J_1とJ_2を作れば，このJ_1とJ_2に対応してΩ_JからΩ_{J_1}とΩ_{J_2}への分枝が行える。

このJ_1とJ_2の決定を更に詳しく述べれば，まずJ_1については最小停止時間を考慮して$j_k^{l_k}$が１か又は２によって次のように決定する。

$j_k^{l_k} = 1$のとき，$j_k^{l_k+1} = 1$と置いて

$$
(13)\quad J_1 = \begin{pmatrix}
j_1^1 & j_1^2 & \cdots\cdots & j_1^{l_1} & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \cdots\cdots & & & & \\
j_k^1 & j_k^2 & \cdots & j_k^{l_k} & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\
 & & \cdots\cdots & & & & \\
j_M^1 & j_M^2 & \cdots\cdots & j_M^{l_M} & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

とする。（分枝規則１）

また $j_k^{l_k} = 2$ のときは $j_k^{l_k+1} = j_k^{l_k+2} = \cdots = j_k^{l_k+K_k+1} = 1$ と置いて

$$
(14)\quad J_1 = \begin{pmatrix}
j_1^1 & j_1^2 & \cdots\cdots & j_1^{l_1} & 0 & \cdots & & & 0 \\
 & & \cdots\cdots & & & & & & \\
j_k^1 & j_k^2 & \cdots & j_k^{l_k} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \cdots\cdots & & & & & & \\
j_M^1 & j_M^2 & \cdots & j_M^{l_M} & 0 & \cdots & & & 0
\end{pmatrix}
$$

とする。（分枝規則２）

次に J_2 については単に $j_k^{l_k+1} = 2$ とする。すなわち，

$$
(15)\quad J_2 = \begin{pmatrix}
j_1^1 & j_1^2 & \cdots\cdots & j_1^{l_1} & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \cdots\cdots & & & & \\
j_k^1 & j_k^2 & \cdots & j_k^{l_k} & 2 & 0 \cdots\cdots & 0 \\
 & & \cdots\cdots & & & & \\
j_M^1 & j_M^2 & \cdots\cdots & j_M^{l_M} & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

とする。（分枝規則３）

部分問題集合 Ω_J（$\subset\Omega$）は最小停止時間制約を満たす変数の組合せを持つ問題 ω のみから形成されていることに着目すれば，上で決定した行列 J_1，J_2 に対応する部分問題集合 Ω_{J_1}，Ω_{J_2} は互に排他的な Ω_J の分割を形成していることは明らかである。それ故，行列 J_1 と J_2 を作ることは部分問題集合 Ω_J から Ω_{J_1} と Ω_{J_2} への分枝となっている。

c　下限値 $L(\Omega_J)$ の計算手続き

部分問題集合 Ω_J に属するすべての問題の最適値の下限値は Ω_J に対応する行列 J を用いて計算することができる。行列 J の要素を j_m^t として，変数 x_m^t を $x_m^t \in I(m,\ t,\ j_m^t)$，$m=1,\cdots,M$，$t=1,\cdots,T$ に制約する。また，目的関数としては $j_m^t \fallingdotseq 0$ である m，t については $f_m^t(x_m^t)$ をそのまま用い，$j_m^t = 0$ である m，t については全区間〔0，V_m^t〕に対して f_m^t の原点を通るできるだけ良い下限近似を与える直線の傾きを p_m^t として $p_m^t x_m^t$ を用いる。このような p_m^t として（17）式で与えられるものを採用した。そして次の問題 P_J を解けば問題 P_J の最小値が下限値 $L(\Omega_J)$ を与える。

〔問題 P_J〕

目的関数：

$$
(16)\quad \hat{F}(\vec{x},\ \vec{q}) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{l_m} f_m^t(x_m^t) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=l_m+1}^{T} P_m^t x_m^t
$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} h_n^t(q_n^t) \rightarrow \text{最小}$$

拘束条件：

（2），（4），（5），（6）式

$x_m^t \in I(m,\ t,\ j_m^t)$, $m=1, \cdots, M$

$t=1, \cdots, T$

但し，j_m^t は行列Jの要素である。

ここで，f_m^t は（8）式で，p_m^t は次式で与えられる。

$$(17)\quad p_m^t = \max\{p \mid p\, x_m^t \leqq d_m^t + c_m^t(x_m^t - v_m^t),\ x_m^t \in [v_m^t,\ V_m^t]\}$$

$$= \begin{cases} d_m^t / v_m^t, & d_m^t / v_m^t \leqq c_m^t \text{の時} \\ (d_m^t + c_m^t(V_m^t - v_m^t))/V_m^t, & d_m^t / v_m^t \geqq c_m^t \text{の時} \end{cases}$$

問題P_Jは線型計画問題となるからシンプレックス法等によりその最適解を求めることは容易である。

問題P_Jの最小値が下限値となることは，問題P_Jの実行可能解の集合がΩ_Jに属するすべての問題の実行可能解を含み，しかも$x_m^t \in I(m,\ t,\ 0)$に制約されている変数に対しては目的関数としてf_m^tの下限近似直線を用いていることより明らかである。

3・2　アルゴリズムの記述

以下にアルゴリズムを示す。それまでに得られた最良の実行可能解を$\overrightarrow{x}^*$，その目的関数値をF^*とする。

初期解の計算

手順1.　Jの初期値をセットする。この時，初期状態に対して制約がある場合，例えば第1時間帯において全生産機構が正レベル運転とするような場合はJの第1列要素をすべて2とし，他はすべて0とする等である。

$F^* = \infty$にセットする。

手順2.　初期セットしたJに対応する問題P_Jを解いて$L(\Omega_J)$を求める。問題P_Jが実行可能解を持たなければ原問題は実行不可能であるから計算を終了する。実行可能解を持てばJと$L(\Omega_J)$を記憶する。

分枝・限定のくり返えし手順：

手順3.　記憶されているJがあるかどうかを調らべる。あれば手順4へ行く。なければ手順9へ行く。

手順4.　記憶の中から最小の$L(\Omega_J)$を持つJと$K(\Omega_J)$を取り出す。取り出したJと$L(\Omega_J)$は記憶から消す。$F^* \leqq L(\Omega_J)$であればF^*が最適値であり$\overrightarrow{x}^*$が求める解である。計算終了。そうでなければ$i=1$として手順5へ行く。

手順5.　JからJ iへ分枝する。

手順6. J i に対して問題P $_{J_i}$ を解きL (Ω_{J_i})を求める。実行可能解があれば手順７へ，なければ手順８へ行く。

手順７. J i のすべての要素が非ゼロであるならば手順１０を実行する。そうでなければL(Ω_{J_i})とF* を比較してF* ＞L (Ω_{J_i}) ならばJ i とL (Ω_{J_i})を記憶して手順８へ行く。F* $\leqq$ L (Ω_{J_i})ならばJ i やL (Ω_{J_i})は記憶する必要はない。手順８へ行く。

手順8. $i=1$ であれば $i=2$ として手順５へもどる。$i=2$ であれば手順３へもどる。

手順９. F* ＝∞ならば原問題は実行可能解を持たない。計算終了。F* ＜∞ならば最適解は $\vec{x}^*$ で最適値はF* である。計算終了。

手順１０. L (Ω_{J_i}) $\geqq$ F* であれば手順８へ行く。そうでなければF* ＝L (Ω_{J_i})として問題P $_{J_i}$ の解を $\vec{x}^*$ とする。手順８にもどる。

３・３ 数値実験

表１に示すM＝３，N＝２のモデルに対してT＝７〜１２として計算したときの計算時間を図２に示す。また例としてT＝７の時の最適解を表２に示す。

表1. 数値計算に使用したモデルのデータ [2)]

$M=3,\ N=2,\ \alpha_n=\beta_n=0,\ n=1,\ 2$

m	c_m	v_m	V_m	K_m	d_m	b_m
1	4	40	125	3	12.96	5.2
2	2	20	75	2	6.9	3.2
3	3	20	75	2	12.4	3.0

n	a_n	W_n
1	1	100
2	0.1	20

表2. 表１に示したモデルに対する最適解（ T＝７の場合）

最適値＝３８１７.７８

t	m 1	m 2	m 3	n 1	n 2	r^2
1	110	75	75	0	0	260
2	70	〃	〃	20	20	180
3	0	〃	〃	20	20	150
4	0	〃	〃	20	20	150
5	0	〃	〃	10	20	160
6	0	〃	〃	0	0	180
7	50	〃	〃	0	0	200

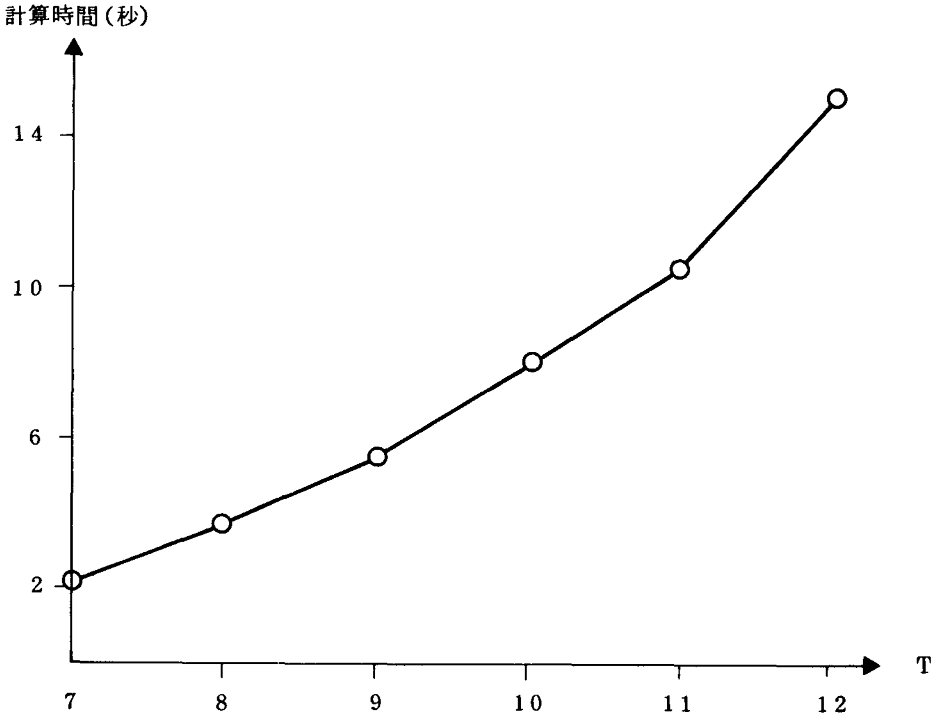

図 2. 表 1 のモデルを使用した時の T と計算時間の関係

次に分枝回数が最小停止時間の変化によりどのように変わるかを調べるために，表 3 で与えられる 1 生産機構，1 在庫機構モデルの場合について計算してみると図 3 のような結果が得られた。これは最小停止時間が長くなれば実行可能解に対してより強い制約が加わるために，分枝回数が少なくてすむためであると説明できる。

表 3. M＝1，N＝1 のモデルのデータ

t	v^t	V^t	d^t	b^t	c^t	W^t	a^t	r^t
1	90	690	300	2	0	600	2	90
2	125	600	〃	〃	〃	475	〃	125
3	140	475	〃	〃	〃	335	〃	140
4	100	335	〃	〃	〃	235	〃	100
5	45	235	〃	〃	〃	190	〃	45
6	60	190	〃	〃	〃	130	〃	60
7	130	130	〃	〃	〃	0	〃	130

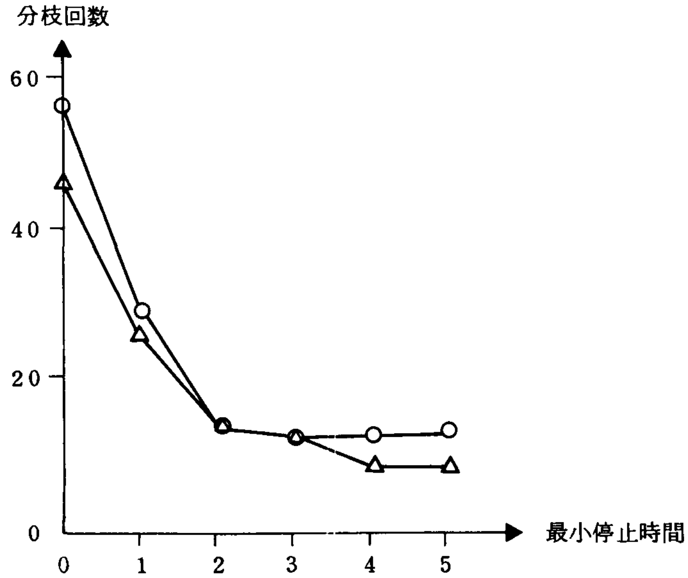

図 3.　最小停止時間と分枝回数

△　固定費が５００の場合

○　固定費が３００の場合

4.　揚水発電所を考慮した火力発電機群の起動停止問題に対する応用

火力発電機群の起動停止問題とは“考察期間内で系統の電力需要を満たしながら，総運転費を最小にするために火力発電機群の起動停止をどのように行なえば良いかを決定する問題”である。この問題において火力発電機を生産機構とみると，ちょうど第２章で述べた性質を有する生産機構に対応する。〔９〕〔１０〕〔１２〕

ところで，これまで電力系統の特徴として貯蔵機能のないシステムであると言われてきたが(〔１０〕)最近注目されている揚水発電所を考慮すると，他の生産システムと同様に貯蔵機能を有するシステムとして考えることができる。すなわち，揚水発電所は電力エネルギーを水の位置エネルギーとして貯蔵しておき，必要に応じて再び電力エネルギーに変換して供給を行なう在庫機構であると言える。

このように揚水発電所は在庫機構に対応するが，エネルギー形態を変えて貯蔵するために，エネルギー変換に伴なう損失があり，また揚水量や使用水量，貯水量にも制限があるためこれらの諸制限を考慮した上で問題を次のように定式化することができる。

いま火力発電所にm（m＝１，・・・，M），揚水発電所にn（n＝１，・・・，N）なる番号を付け，時間帯tに関する諸量であることをt（t＝１，・・・，T）を付けて表わし，各時間帯における諸量はその時間帯では一定とする。各変数を以下のように定義する。

q^t_n ：　n揚水発電所貯水池の貯水量（m^3）を時間帯幅で除した値（m^3／s）[1]，なお，初期水位 q^0_n，および最終水位 q^T_n は与えられるものとする。

${}_Ip^t_n$，${}_Iy^t_n$ ：　n揚水発電所への入力（MW）および揚水量（m^3／s）

${}_{o}p_{n}^{t}$, ${}_{o}y_{n}^{t}$ ： n揚水発電所の出力（MW）および使用水量（m^3／s）

ρ_n ： n揚水発電所の単位使用水量当りの出力（MW／m^3／s）すなわち，

$${}_{o}p_{n}^{t}=\rho_n \times {}_{o}y_{n}^{t}$$

η_n ： n揚水発電所の単位入力量当りの揚水量（m^3／s／MW）すなわち，

$${}_{i}y_{n}^{t}=\eta_n \times {}_{i}p_{n}^{t}$$

x_{m}^{t} ： m火力発電機の出力（MW）

r^{t} ： 時間帯 tにおける負荷電力（電力需要）（MW）

k_m ： m火力発電機の最小停止時間

また，${}_{i}\bar{p}_{n}$，$\bar{q}_{n}$，${}_{o}\bar{y}_{n}$，$\bar{x}_{m}$ でそれぞれの上限を，${}_{i}\underline{p}_{n}$，$\underline{q}_{n}$，${}_{o}\underline{y}_{n}$，$\underline{x}_{m}$ でそれぞれの下限を表わすことにする。但し，${}_{i}\underline{p}_{n}={}_{o}\underline{y}_{n}=0$とする。

なお，$\eta_n \times \rho_n$は揚水効率とよばれる効率であり，物理的にはn揚水発電所に対する入力と，その入力により発電できる出力との比を表わしていて，通常は60％～70％である。

拘束条件：

$t=1,\ \cdots,\ T$に対して

$$\underline{q}_{n} \leqq q_{n}^{t} \leqq \bar{q}_{n},\quad n=1,\ \cdots,\ N \text{（貯水量制限）}$$

$$0 \leqq {}_{o}y_{n}^{t} \leqq {}_{o}\bar{y}_{n},\quad n=1,\ \cdots,\ N \text{（使用水量制限）}$$

$$0 \leqq {}_{i}p_{t}^{n} \leqq {}_{i}\bar{p}_{n},\quad n=1,\ \cdots,\ N \text{（入力制限）}$$

$${}_{i}y_{n}^{t}=\eta_n \times {}_{i}p_{n}^{t},\quad n=1,\ \cdots,\ N \text{（入力－揚水量関係式）}$$

$${}_{o}p_{n}^{t}=\rho_n \times {}_{o}y_{n}^{t},\quad n=1,\ \cdots,\ N \text{（出力－使用水量関係式）}$$

$${}_{i}y_{n}^{t}+q_{n}^{t-1}-{}_{o}y_{n}^{t}=q_{n}^{t},\quad n=1,\ \cdots,\ N \text{（貯水量関係式）}$$

$$\sum_{m=1}^{M} x_{m}^{t}+\sum_{n=1}^{N} {}_{o}p_{n}^{t}=r^{t}+\sum_{n=1}^{N} {}_{i}p_{n}^{t},\quad m=1,\ \cdots,\ M,\quad n=1,\ \cdots,\ N$$

（電力需要平衡式）

$$x_{m}^{t}=0 \quad \text{又は}\ \underline{x}_{m} \leqq x_{m}^{t} \leqq \bar{x}_{m},\quad m=1,\ \cdots,\ M \text{（火力発電機出力制約）}$$

$t=2,\ \cdots,\ T$に対して

もし，$\underline{x}_{m} \leqq x_{m}^{t-1} \leqq \bar{x}_{m}$で且つ，$x_{m}^{t}=0$ならば，$x_{m}^{t+1}=x_{m}^{t+2}=\cdots=x_{m}^{t+k_m}=0$

$m=1,\ \cdots,\ M$

但し，$t+i \geqq T,\ i=1,\ 2,\ \cdots$ の時は，$t+i$をTとおくことにする。（火力発電機の最小停止時間制約）

目的関数：

火力発電機の運転費としては，停止時にはゼロ，正レベル出力時には固定費と出力に比例するものとし，これに起動費を加えて総運転費とする。（一般には運転費は出力の２次関数として表わされるが，最大，最小出力の間ではかなり直線に近いので，このような近似は充分成り立つ）

また，揚水発電所の運転費は火力発電機に比らべて無視できるのでゼロとする。

このようにすると目的関数としては第２章の（1）式中，在庫費用関数をゼロとおいたものになる。すなわち，

$$F=\sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T} f_m^t(x_m^t) \rightarrow \text{最小}$$

但し，$f_m^t(x_m^t)$は第２章の（7）式，（9）式で定義される。

この問題を第２章で定式化した問題Ｐと比較すると変数や線型の制約式が新たに加わっているが，x_m^tに注目することにより明らかに第２章で述べた分枝限定法のアルゴリズムを適用することが可能である。

4・1 モデル系統に対する解析

表４に示す諸特性を持つモデル系統に対して計算を行なった。

表４．モデル系統の諸特性

（ｔ＝１，・・・，Ｔにおいて一定）

火力発電機

発電機番号	1	2	3
出力下限（ＭＷ）	40	20	20
出力上限（ＭＷ）	125	75	75
費用係数（千円／ＭＷ）	1.2	1.6	1.35
固定費（千円／時間帯）	0	4	11
起動費単価（千円）	10.4	6.4	6.0
最小停止時間（時間）	6	4	4

揚水発電所

発電所番号	1
最大貯水量（m^3／s）	1200
最小貯水量（m^3／s）	800
最大使用水量（m^3／s）	420
最大入力（MW）	150
ρ（MW／m^3／s）	0.25
η（m^3／s／MW）	2.8

１時間帯を４時間として，Ｔ＝６の場合の最適解と計算に使用した負荷電力を表５に示す。表５から明らかなように，この場合はすべての需要を火力発電機だけで満たしているが，これは正レベル出力時における固定費が小さいためであると考えられる。なぜなら，正レベル出力時における固定費が大きいと，できるだけ正レベル出力の時間帯を少なくして，揚水発電を多用するような運用になるこ

表 5.　T＝6 における計算例 1

計算時間　1 2 秒

最適値　1665.8（千円）

時間帯	貯水量	揚水入出力 入力	揚水入出力 出力	火力出力 1	火力出力 2	火力出力 3	起動費	固定費	運転費	総運転費	負荷電力
1	800	0	0	125	50	75	0	15	331.25	346.25	250
2	800	0	0	125	70	75	0	15	363.25	378.25	270
3	800	0	0	125	0	35	0	11	197.25	208.25	160
4	800	0	0	100	0	0	0	0	120.0	120.0	100
5	800	0	0	125	35	0	12.8	4	206.0	222.8	160
6	800	0	0	125	70	75	12.0	15	363.25	390.25	270

とが予想されるからである。そこで各火力発電機の正レベル出力時における固定費をすべて２０増加させた場合について計算を行なった結果が表６である。予想通り，正レベル出力の時間帯数が減って，

表 6.　T＝6 における計算例 2

計算時間　1 2 秒

最適値　1935.95（千円）

時間帯	貯水量	揚水入出力 入力	揚水入出力 出力	1	2	3	起動費	固定費	運転費	総運転費	負荷電力
1	800	0	0	125	50	75	0	75	331.25	406.25	250
2	800	0	0	125	70	75	0	75	363.25	438.25	270
3	870	25	0	125	0	60	0	51	231.0	282.0	160
4	940	25	0	125	0	0	0	20	150.0	170.0	100
5	800	0	35	125	0	0	31.2	20	150.0	201.2	160
6	800	0	0	125	70	75	0	75	363.25	438.25	270

揚水発電を使用する運用となっている。試みに表５の解で各火力発電機の正レベル出力時の固定費をすべて２０増加させた場合の総運転費を計算すると，

運転費＋起動費＋固定費＝1581＋24.8＋340＝1945.8

となる。これに対して表６の解では，

運転費＋起動費＋固定費＝１５８８.７５＋３１.２＋３１６＝１９３５.９５

であるから，運転費＋起動費の値は１６０５.８と１６１９.９５で表５の解の方が小さいが，固定費を含めた総運転費では表６の解の方が小さくなっている。このように固定費が大きくなれば，ゼロレベル出力の時間帯数が多くなり，揚水発電による効果が現われてくる。

次に１時間帯を２時間として，T＝１２の場合に計算時間１０分打ち切りで計算したが真の最適解までは到達できなかった。この場合の計算打ち切りまでに得られた最良の解を表７に示す。また，この時点で第３章で述べたアルゴリズムの手順４により取り出された最小の下限値を持つ行列Jとその下限値は図４に示すとうりである。これから最適値は３２９６と３３４８.６６の間にあることが分る。

表7. T＝１２の計算例で得られた最良の解

計算時間　１０分

最良値　3348.66（千円）

時間帯	貯水量	揚水入出力 入力	揚水入出力 出力	火力出力 1	火力出力 2	火力出力 3	起動費	固定費	運転費	総運転費	負荷電力
1	800	0	0	125	75	75	0	15	371.25	386.25	275
2	856	20	0	125	20	75	0	15	283.25	298.25	200
3	856	0	0	125	75	75	0	15	371.25	386.25	275
4	856	0	0	125	50	75	0	15	331.25	346.25	250
5	856	0	0	125	0	75	0	11	251.25	262.25	200
6	1,046	67.86	0	125	0	62.86	0	11	234.86	245.86	120
7	1,116	25	0	125	0	0	0	0	150.0	150.0	100
8	1,186	25	0	125	0	0	0	0	150.0	150.0	100
9	1,200	5	0	125	0	0	0	0	150.0	150.0	120
10	1,200	0	0	125	0	75	18	11	251.25	280.25	200
11	1,000	0	50	125	0	75	0	11	251.25	262.25	250
12	800	0	50	125	75	75	44.8	15	371.25	431.05	325

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

図4. 計算時間１０分打ち切りの時点で取り出された最小の下限値を持つ行列J

下限値＝3,２９６

5. あとがき

本論文では生産出力の上下限制約，最小停止時間制約，起動費を考慮した生産・在庫システムについて述べ，このシステムの最適生産・在庫計画を求める分枝限定法によるアルゴリズムを与え，数値実験を行なった。更に，このようなシステムの１例として電力系統における揚水発電所を考慮した火力発電機群の起動停止問題を解いた。

本論文で述べたモデルとして考えられる例は他にも多くあり，それぞれ特有の条件は考慮しなければならないものの，本質的にはここで述べたアルゴリズムが適用できるものと思われる。しかしながら，計算量（計算時間，記憶容量）については分枝限定法を用いる限り指数関数的に増大することになるので個々の問題の特徴を有効に用いて計算量を減少する工夫が必要であろう。

火力発電機の起動停止問題については，実運用において起動停止の対象とする台数は数台であるからここで述べた形でもかなり実用的なものであると思われるが，さらに実システムへ近づけるために２次関数で表わされる火力発電機の運転費を折れ線で近似することを考慮中である。

最後に本研究に対して御助言，御協力いただきました，北海道大学工学部電気工学科長谷川淳助教授，ならびに北海道電力中央給電指令所伊東仁氏に厚く感謝の意を表します。

尚，本論文中の計算は北海道大学大型計算機センター　FACOM 230－75を使用した。

参考文献

〔１〕 秋山哲夫，関根泰次，“揚水発電所を含む電力系統の経済運用”電気学会誌，８６，１１（１９６６），１９４８－１９５７

〔２〕 深尾毅，豊田淳一，電力系統へのコンピュータの応用，産業図書，１９７２

〔３〕 Florian, M. and M. Klein, “Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints”Management Science, 18, 1（1971), 12－20

〔４〕 Hadley, G., Nonlinear and Dynamic Programming, Addison－Wesley Publishing Co., 1964

〔５〕 Jones, A, P, and R, M, Soland, “A Branch and Bound Algorithm for Multi－Level Fixed－Charge Problems,”Management Science, 16, 1（1969), 67－76

〔６〕 Lawler, E. L. and D, E, Wood, “Branch－and－Bound Methods：A Survey,”Operations Research, 14, 11（1966), 699－719

〔７〕 Mitten, L. G., “Branch－and－Bound Method：Generol Formulation and Properties,”Operations Research, 18, 1（1970), 24－34

〔８〕 大内東，加地郁夫，“最小停止時間と出力制約のある生産・在庫モデル，”ＯＲ学会春季研究発表会（１９７４）

〔９〕 大内東，加地郁夫，“火力発電機群の起動停止問題に対する分枝限定法による解法”ＯＲ学

会秋季研究発表会（１９７４）

〔１０〕 関根泰次，電力系統工学，電気書院，１９６６

〔１１〕 反町迪子，“ＯＲの潮流，在庫管理編，”経営科学，１８，１（１９７４），３８－４４

〔１２〕 山城迪，“火力発電機群の起動停止問題の一解法， 電気学会誌９３－Ｂ，９（1973），３９１－３９８

〔１３〕 Wagner, H.M. and T.M.Whitin, “Dynamic Version of the Economic Lot Sige Model,”Management Science, 5, 1(1959), 86－96

〔１４〕 Zangwill, W.I.“A Deterministic Multiperiod Production Scheduling with Backlogging,”Management Science, 13, 1(1966), 506－527

〔１５〕 Zangwill, W.I.“A Backlogging Model and A Multi－Echelon Model of A Dynamic Economic Lot Size Production System－A Network Approach,”Management Science, 15, 9(1969), 506－527

1） 貯水量，揚水量，使用水量の単位は量（m^3）ではなく，秋山氏の論文〔１〕に従って，量率ともいうべき（m^3／ｓ）を用いる。これは普通，単にＭＷと書かれている電力の単位が正確には（ＭＷ／ｓ）と書かれるべきものであるため，この単位にそろえるためである。

2） 第１期における起動費はゼロとする。