Minimum Cost Source Location Problems with Flow Requirements

坂下麻里子
(大阪大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻　現所属・京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻博士後期課程)
指導教員　牧野和久 助教授，乾口雅弘 教授

1. はじめに

ソース配置問題とは，与えられたネットワークにおいて，フロー（連結度）に基づく制約条件の下で最小コストを与えるソース集合（配置）を求める問題である．この問題は，例えば，マルチメディアネットワーク中にサービス要求量を指定した複数のクライアントが与えられたとき，その要求を満足しながら最小コストで（ミラー）サーバを配置するという問題をモデル化したものであり，信頼度を考慮に入れた施設配置問題として近年盛んに研究されている（例えば，[1, 2]）．また，ネットワーク理論で有名な連結度増大問題とも深く関連している．

ソース配置問題における制約条件としては，枝連結度，および，点連結度に基づくものがある．枝連結度要求はリンク故障に対する信頼度，点連結度要求は点故障に対する信頼度に対応しており，点連結度要求に対しては，ソース故障の存否に関して2種類の要求が考察されている．

本論文では，未解決問題として残されていた，無向ネットワーク中の枝連結度に基づくソース配置問題の強NP困難性，および，近似困難性を示す．また，すべてのNP困難な場合に適用可能な精度保証付きの近似アルゴリズム，木構造ネットワークに対する効率的なアルゴリズムを開発する．我々はさらに，コスト関数として，建設費用に加え，供給量にも依存するソース配置問題を考察し，様々な結果を得る．

2. ソース配置問題とその拡張

点集合 V と枝集合 A をもつグラフ G に容量関数 $u: A \to \mathbb{R}_+$ を付与したネットワーク $\mathcal{N}=(G=(V, A), u)$ を考える．ただし，$\mathbb{R}_+$ は非負実数の集合である．このネットワーク $\mathcal{N}$，要求関数 $d^-, d^+: \mathrm{V} \to \mathbb{R}$，コスト関数 $c: V \to \mathbb{R}_+$ が与えられたとき，ソース配置問題は以下のように記述できる．

$$\text{Min.} \sum_{v \in S} c(v)$$

$$\text{s.t.} \quad \psi^-(S, v) \geq d^-(v),\ \psi^+(v, S) \geq d^+(v) (v \in V),$$
$$S \subseteq V.$$

ただし，$\psi^-(X, Y)$，$\psi^+(X, Y)$ は点集合 X から Y への連結度を表す．また，$\psi^-(S, \{v\})$，$\psi^+(\{v\}, S)$ をそれぞれ簡潔に $\psi^-(S, v)$，$\psi^+(v, S)$ と書く．本論文では，$\psi^\pm$ として，次の3種類の連結度を考察する．

(i) $\psi^-(S, v)=\lambda(S, v), \psi^+(v, S)=\lambda(v, S)$,

(ii) $\psi^-(S, v)=\kappa(S, v), \psi^+(v, S)=\kappa(v, S)$,

(iii) $\psi^-(S, v)=\hat{\kappa}^-(S, v), \psi^+(v, S)=(\hat{\kappa}^+(v, S)$,

ただし，$\lambda(X, Y)$ は点集合 X から Y への最大フロー値で，$X \cap Y \neq \emptyset$ のとき $\lambda(X, Y)=+\infty$ とする．また，$\kappa(X, Y)$ は X から Y への端点以外の点を共有しない最大パス数で，$X \cap Y \neq \emptyset$，または，$v \in X$, $w \in Y$ である枝 $(v, w) \in A$ が存在するとき，$\kappa(X, Y)=+\infty$ とする．$\hat{\kappa}^-(S, v)$，および，$\hat{\kappa}^+(v, S)$ は，それぞれ点集合 S から点 v，および，v から S への v 以外の点を共有しない最大パス数を表し，$v \in S$ のとき $\hat{\kappa}^-(S, v)=\hat{\kappa}+(v, S)=+\infty$ とする．(i)は枝連結度，(ii)はソース故障を許さない点連結度，(iii)はソース故障を許す点連結度を表す．

問題の拡張：上記のソース配置問題では，コスト関数として施設の建設費用（v における建設費用 $c(v)$）のみを扱っている．しかしながら，現実的なコスト関数として，建設費用に加え，供給量にも依存するものを考察することが求められている．従って，本論文では以下のように供給量を考慮したソース配置問題を考察する．ここでは，頁数制限のため，枝連結度 λ に対する拡張についてのみ述べる．

ネットワーク $\mathcal{N}$ 中のフロー $\varphi: A \to \mathbb{R}_+$ が以下の条件を満たすとき，供給 $x: V \to \mathbb{R}_+$ に対して実行可能であると呼ぶ．

$$-x(v) \leq \partial\varphi(v) \leq x(v) \quad (v \in V) \tag{1}$$

$$0 \leq \varphi(a) \leq u(a) \qquad (a \in A) \tag{2}$$

ただし，$\partial\varphi(v)$ はフロー φ の点 v における境界を示し，$\partial\varphi(v)=\sum_{(v, w) \in A} \varphi(v, w)-\sum_{(w, v) \in A} \varphi(w, v)$ と定義される．$\lambda^-(x; v)$ と $\lambda^+(x; v)$ をそれぞれ供給 x

における点 v への最大流入量 $(-\partial\varphi(v)+x(v))$ と v からの最大流出量 $(\partial\varphi(v)+x(v))$ とする．枝連結度要求を持つ拡張されたソース配置問題は，ネットワーク $\mathcal{N}=(G=(V,A),u)$，要求関数 $d^-, d^+ : V\rightarrow\mathbb{R}_+$，各点 $v\in V$ におけるコストを表す単調な凹関数 $c_v : \mathbb{R}_+\rightarrow\mathbb{R}_+$ が与えられたとき，以下のように記述できる．

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min.}\ \textstyle\sum_{v\in V} c_v(x(v)) \\ &\mathrm{s.t.}\quad \lambda^-(x\,;\,v)\geq d^-(v), \lambda^+(x\,;\,v) \\ &\qquad \geq d^+(v)(v\in V), x(v)\geq 0(v\in V). \end{aligned}$$

ここで，c_v の単調凹性は，ネットワーク設計問題などでよく扱われる自然な仮定である．

3. ソース配置問題に対する成果

無向・枝連結度要求をもつ場合の計算困難性：無向ネットワーク中の枝連結度要求（すなわち，$\psi(=\psi^-=\psi^+)=\lambda$，$d=d^+(=d^-)$）を持つソース配置問題に対して，以下の定理が成立する．

定理 1．無向ネットワーク中の枝連結度要求を持つソース配置問題は強 NP 困難である．

これは，[1]で提示されていた未解決問題を解くものである．この定理は，NP 困難問題として有名な集合被覆問題をソース配置問題に帰着させることによって示される．さらに，我々は，集合被覆問題の近似困難性，および，帰着のギャップ保存性より以下の定理を得る．

定理 2．$\mathrm{NP}\not\subseteq\mathrm{DTIME}(N^{-\mathrm{lob}\log N})$ ならば，ある定数 $c>0$ が存在して，無向ネットワーク中の枝連結度要求を持つソース配置問題に対する多項式時間 $c\ln\sum_{v\in V}d(v)$-近似アルゴリズムは存在しない．

ここで，$\mathrm{NP}\not\subseteq\mathrm{DTIME}(N^{\log\log N})$ とは，N を入力長としたとき，任意の NP 完全問題が $O(N^{\log\log N})$ 時間の決定性アルゴリズムを持たないことを意味し，多くの計算量理論の研究者によって信じられている．また，α-近似アルゴリズム A とは，近似比（すなわち，(A の出力する解のコスト値)/(最適値)）が必ず α 以内である解を出力するアルゴリズムのことをいう．

木構造ネットワーク中のソース配置問題：また，与えられたネットワーク $\mathcal{N}$ が木構造であるとき，以下の肯定的な定理が成立する．

定理 3．木構造ネットワーク $\mathcal{N}$ において枝連結度要求をもつソース配置問題は，容量関数と要求関数が整数のとき，擬多項式時間で解ける．

定理 4．木構造ネットワーク $\mathcal{N}$ 中の点連結度要求 κ，$\hat{\kappa}$ をもつソース配置問題はともに多項式時間で解ける．

[1]の弱 NP 困難性の結果から，定理 3 の擬多項式時間は計算限界である．また，定理 4 は，点連結度要求を持つソース配置問題に対する初めての効率的に計算可能な部分クラスを示している．

4. 拡張されたソース配置問題に対する成果

近似アルゴリズム：本論文では，拡張されたソース配置問題を劣モジュラ被覆問題として定式化し，貪欲アルゴリズムを開発することで，以下の定理を得る．

定理 5．(拡張された) ソース配置問題は，容量，および，要求関数が整数である場合，多項式時間で $(1+\ln\sum_{v\in V}(d^-(v)+d^+(v)))$-近似可能である．

定理 2 より，この貪欲アルゴリズムは枝連結度要求に対して，(オーダーの意味で) 最適である．

無向・一様な枝連結度要求をもつ拡張ソース配置問題：無向ネットワークにおいて一様な枝連結度要求（すなわち，$d(v)=k(v\in V)$）をもつ拡張されたソース配置問題をラミナー被覆問題として定式化し，以下の定理を得る．

定理 6．無向ネットワーク中の一様な枝連結度要求を持つ拡張されたソース配置問題は，

1. $O(nm+n^2(q+\log n))$ 時間で解ける．
2. 各コスト関数 c_v が固定費つき線形関数として記述できる場合は，$O(n(m+n\log n))$ 時間で解ける．
3. より一般的なコスト関数（すなわち，F が一般の凹関数）のとき，計算困難である．

謝辞　本研究を行うにあたり，多くのご指導を頂きました京都大学の藤重悟先生に感謝いたします．

参考文献

[1] K. Arata, S. Iwata, K. Makino, S. Fujishige: Locating sources to meet flow demands in undirected networks, *J. Algorithms*, 42 (2002), 54-68.

[2] M. Bárász, J. Becker, A. Frank: An algorithm for source location in directed graphs, *OR Letters*, 33 (2005), 221-230.