矩形パッキング問題に対する厳密解法

釼持　光俊

（京都大学工学部情報学科 現所属・同大学院情報学研究科数理工学専攻修士課程）

指導教員　永持　仁 教授

1. はじめに

与えられたすべての矩形を，幅の固定された容器に高さが最小となるように詰め込む問題をストリップパッキング問題と呼ぶ．鉄鋼業や繊維産業で素材の切断を効率良く行うために応用されているだけでなく，スケジューリング問題など現実の世界で広く応用されている．ストリップパッキング問題はNP困難であることが知られており，今日までに多くの研究がある．

本論文では，矩形数が比較的小さなストリップパッキング問題に焦点を置き，厳密解を求めることを目的とする．矩形数が比較的小さな問題例が対象となる応用は多数存在し，問題規模が小さいときには厳密解法が近似解法よりも優れた性能を示す事例が様々な問題に対して報告されていることから，本研究方針は応用上も極めて重要である．矩形の向きに関しては，90度回転を許可する場合と許可しない場合の両方を考える．まず初めに，順列対と呼ばれる解の表現法を用いて，分枝限定法により厳密解を求める方法を試みる．さらに，より制限のある問題として完全パッキングと呼ばれる問題を扱う．完全パッキング問題とは，与えられたすべての矩形を幅と高さの決まった容器に隙間なく敷き詰めることができるか否かを判定する問題である．この問題に対し，分枝規則や限定操作を提案し，分枝限定法を適用することを考える．

2. 問題定義

ストリップパッキング問題とは，それぞれ幅 w_i と高さ h_i が与えられた n 個の矩形 $i \in I=\{1, 2, \cdots, n\}$ を，互いに重なり合うことなく，高さ H が最小となるように幅 W の容器に詰め込む問題である．

完全パッキング問題とは，それぞれ幅 w_i と高さ h_i が与えられた n 個の矩形 $i \in I$ を，互いに重なり合うことなく，高さ H，幅 W の容器に隙間なく詰め込むことが可能かどうかを判定する問題である．もちろん，完全パッキングが存在するためには，$\sum_{i\in I} w_i h_i = WH$ が必要である．完全パッキング問題は，ストリップパッキング問題において，最適値が自明な下界 $H=\sum_{i\in I} w_i h_i / W$ と一致するか否かを判定する問題であると考えることができる．なお，本論文では，完全パッキング問題の場合に限り，矩形と容器の幅と高さはすべて整数であると仮定する．

3. 順列対を用いた分枝限定法

まず，簡単のために90度回転を許可しない場合について述べる．順列対とは，矩形集合 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$ の順列を二つ（それぞれ σ_+, σ_- とする）用いて，矩形の相対的な位置関係を表現するものである．この二つの順列 $\sigma=(\sigma_+, \sigma_-)$ を順列対と呼ぶ．

$\sigma_+(l)=i$（$\sigma_+^{-1}(i)=l$ と同値）は，矩形 i が順列 σ_+ の l 番目に位置することを意味するものとする．σ_- についても同様に定める．順列対 $\sigma=(\sigma_+, \sigma_-)$ に対して，矩形集合 I 上の半順序 $\lessdot_\sigma^x$ と $\lessdot_\sigma^y$ を以下のように定義する．

$$\sigma_+^{-1}(i) \le \sigma_+^{-1}(j) \text{ かつ } \sigma_-^{-1}(i) \le \sigma_-^{-1}(j) \Longleftrightarrow i \lessdot_\sigma^x j,$$

$$\sigma_+^{-1}(i) \ge \sigma_+^{-1}(j) \text{ かつ } \sigma_-^{-1}(i) \le \sigma_-^{-1}(j) \Longleftrightarrow i \lessdot_\sigma^y j.$$

このとき $i \neq j$ なる全ての i, j の組に対して，$i \lessdot_\sigma^x j$, $j \lessdot_\sigma^x i$, $i \lessdot_\sigma^y j$, $j \lessdot_\sigma^y i$ の四つのうちちょうど一つが成立する．よって

$$i \lessdot_\sigma^x j \text{ かつ } i \neq j \Longrightarrow x_i + w_i \le x_j,$$

$$i \lessdot_\sigma^y j \text{ かつ } i \neq j \Longrightarrow y_i + h_i \le y_j$$

をともに満たすように矩形を配置すれば，任意の二つの異なる矩形が互いに重なり合わないことを保証できる．分枝限定法では，探索木の根として矩形1のみから成る長さ1の順列二つで構成される順列対 $\sigma=(\sigma_+=(1), \sigma_-=(1))$ から始め，それぞれの順列 σ_+, σ_- に次の矩形をどこに挿入するかで分枝操作を行う．この規則に従うと，矩形間の相対的位置関係は探索木の子孫においても保存されるため，一旦実行不可能である，あるいは最適解を与えないと判定した節点を終端できる．

90度回転を許可する場合は，分枝を行うときに挿入する矩形の回転を考慮して，2通りの節点を生成すれば，同様のアルゴリズムが設計できる．

4. 完全パッキングに対する分枝限定法

本節では，完全パッキング問題に対する分枝限定法について考察する．矩形の相対的な位置関係を固定していく前節の分枝限定法とは異なり，ここでは矩形の絶対的な位置（座標）を一つずつ固定していく．深さ d の各節点では d 個の矩形の位置が固定されているものとする．分枝操作は以下に述べる分枝規則に従って，d 個目の矩形の座標を決定することに対応する．

分枝規則 BL 法の考え方に基づくものと，階段状を維持するものの 2 通りについて説明する．

矩形が未配置の領域において，最も高さが低く，かつ最も左にある点を BL 点と定義する．BL 法の考え方に基づく分枝規則では，この BL 点に配置する矩形によって分枝を行う．

ある配置が階段状であるとは，矩形が配置されている領域と配置されていない領域との境界が右下がりの階段状になっていて，かつ境界の左下の領域が配置済みの矩形で隙間なく埋まっていることであると定義する．この階段状を維持するような矩形の配置に対して分枝を行う．また，完全パッキングを早く見つけるために階段の段数に制限を加え，段数の小さい場合から探索を初めて制限を徐々に緩和していく方法を取る．

動的計画法による限定操作 完全パッキング問題では，各部分問題において矩形がいくつか配置されており，残りの矩形によって埋めなければならない隙間が存在する．そのような隙間は，容器の上辺と矩形との隙間や，容器の左右の辺と矩形によって凹形に囲まれた部分である．このとき，残りの矩形の幅や高さの部分和で実現できない長さの隙間が存在するならば，完全パッキングは存在せず，その節点を終端できる．

まず，90 度回転を許可する場合を説明する．簡単のため，ある活性節点においてまだ配置されていない矩形を $i=1, 2, \cdots, m$ とする．このとき埋めるべき長さを実現できるかどうか判定する問題は SUBSET-SUM（部分和問題）とほぼ同様の問題として定式化でき，動的計画法（DP）の考え方を用いて解くことができる．すなわち，全ての整数 p に対して

$$v_0(p)=\begin{cases}1, & p=0\text{ のとき}\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$$

$$v_k(p)=\max\{v_{k-1}(p), v_{k-1}(p-w_k), v_{k-1}(p-h_k)\},\quad k=1,2,\cdots,m$$

と定義するとき，長さ p が実現できるかどうかは，$v_m(p)=1$ ならば yes，そうでなければ no であると判定できる．回転を許可しない場合は，DP の漸化式が容器の垂直方向と水平方向でそれぞれ異なり，別々に計算を行う必要がある．

表 1 完全パッキング問題に対する計算結果

問題例	n	順列対	BL+DP	階段	文献[1]
9perfect	9	0.01	0.00	0.00	—
n1	17	—	0.24	0.00	< 1.00
n2	25	—	(3/5)	0.03	< 120.00
n3	29	—	(1/5)	0.14	(4/5)

5. 計算結果

提案アルゴリズムに対する実験結果の一部を紹介する．用いた問題例は，自作のもの（9 perfect）と文献[1]でも用いられている Hopper によるベンチマーク（n 1, n 2, n 3）である．表 1 に 90 度回転を許可しない場合の結果を与え，文献[1]と比較する．BL 点による分枝を用いたものを BL，階段状を維持する分枝を用いたものを階段，動的計画法による限定操作を DP と記す．計算時間の単位は秒である．n 1, n 2, n 3 はそれぞれ同じ規模の問題例を 5 問ずつ含むため，1 時間以内にすべて解けたものに対しては平均の計算時間を与えた．一方，一部解けなかったものに対しては括弧内に解けた問題数を示した．例えば（3/5）は 5 問中 3 問が 1 時間以内に解けたことを表す．

用いた PC は，本研究では Pentium 4，2.8 GHz，文献[1]では Pentium, 2.0 GHz であるが，この差を考慮しても比較しても，階段状を維持する分枝によって計算時間を大幅に短縮することができている．特に，矩形数 29 の問題例については，文献[1]では 5 問中 4 問しか解けなかったのに対し，提案手法ではすべて 1 秒以内に解くことができた．

6. まとめ

本研究では，矩形パッキング問題の厳密解を分枝限定法で求めるための方法を考察し，完全パッキング問題に対する分枝規則や限定操作を提案した．計算実験により，完全パッキングが存在するベンチマーク問題に対して，従来手法よりも高速に解を求めることに成功した．

参考文献

[1] N. Lesh, J. Marks, A. McMahon and M. Mitzenmacher, "Exhaustive Approaches to 2D Rectangular Perfect Packings," *Information Processing Letters* 90, 2004, pp. 7-14.