Combinatorial Matrix Analysis by Sign Patterns

垣村　尚徳
（東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻　現所属・同大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻）
指導教員　岩田　覚 助教授

1. はじめに

経済活動などの社会現象を線形方程式系で定式化する時，その係数の大小関係や正負は，選好順序や変化の方向性から容易に知ることができるが，係数の正確な値を知ることが困難である場合が多い．本論文では，このような定性的情報のみが扱える状況の下で解析を行うために，その係数行列の要素の絶対値によらない性質を調べることを目的とする．

行列要素の符号情報のみから分かる性質を調べる研究は，定性的行列理論とも呼ばれ，Samuelson[6]によって経済モデルを扱うために提唱された．その後，Brualdi, Shader[1]などによる線形方程式系の符号情報に基づく解析など様々な研究がなされてきた．

本論文では，このような定性的行列理論のさらなる発展として，特に最適化問題に関連する行列の定性的解析を行う．主に二つの問題を扱う．まず，対称行列の符号指数を行列要素の正負から計算することを議論する．さらに，線形計画問題に対して，その係数行列の符号情報から最適解の符号情報が一意に定まるための条件とその解法について議論する．

2. 符号正則性判定問題

定性的行列理論における重要な問題の一つとして，行列の符号情報から要素の大きさによらず正則（符号正則性）かどうかを判定する問題がある．すなわち，行列 A と同じ符号パターンを持つ行列全体の集合を $Q(A)$ としたとき，$Q(A)$ 内の行列全てが正則かどうかを判定する問題である．この符号正則性判定問題は，様々な組合せ的問題と等価であることが知られている[4]．1913年にPólyaによって提案された行列のパーマネントの計算を行列要素のいくつかを-1倍することで行列式の計算に帰着できるか判定する問題，有向グラフに長さ偶数の初等的有向閉路が存在するか判定する問題，二部グラフがPfaffian orientationを持つか判定する問題などと等価である．その計算複雑度は長年未解決であったが，1999年にRobertson, Seymour, Thomasによって多項式時間解法が示された[5]．

3. 対称行列の符号指数

対称行列の符号指数とは，対称行列の正，負，零の固有値の数の組を指す．この値は合同変換において不変な値であり，符号指数によって二次形式を分類することができる．非線形関数において，その二階微分であるヘッセ行列の符号指数は，ある点の近傍における曲面の形状を表す．

この対称行列の符号指数を行列要素の符号情報を基に計算することを議論する．すなわち，対称行列 A と同じ符号パターンを持つ対称行列全体の集合を $Q^*(A):=\{\tilde{A}|\tilde{A}\in Q(A), \tilde{A}^\top=\tilde{A}\}$ とした時，任意の $\tilde{A}\in Q^*(A)$ が同じ符号指数を持つかどうかを判定し，もし同じならば A の要素の正負を基に符号指数を計算する方法を考える．

Hall, Li, Wang[2]は，対称行列の符号指数が行列要素の大きさによらず一意に定まるための必要十分条件を与えている．対称行列 A において，任意の $\tilde{A}\in Q^*(A)$ が正則であるとき，A は符号正則であるという．Hallらの結果より，符号正則な対称行列は符号指数が一意に定まる．

本論文ではまず，符号正則な対称行列に対する符号指数の一意性をHallらと別の方法によって示した．これは，対称行列に対応する二部グラフの完全マッチングの性質を調べることで組合せ的に導かれる．さらに，二部グラフの最大重み完全マッチングを求めるアルゴリズムを利用することで，符号正則な対称行列の符号指数を求めるための多項式時間解法を与えた．

定理1 対称行列 A が符号正則ならば，要素の大きさによらず符号指数が一意に定まる．

定理2 n 次対称行列 A が符号正則ならば，要素の符号のみから符号指数を $O(\sqrt{n}\gamma\log n)$ 時間で計算できる．ただし γ とは A の非零要素の個数を指す．

さらに，対称行列の符号指数の一意性の判定について，以下の定理が成り立つ．これは，長方行列のランクが行列要素の大きさによらずに一意に決まるか判定する問題がcoNP完全であるというKlee, Ladner, Manber[3]の結果に基づいている．

定理3 対称行列 A に対して，A と同じ符号指数を持たない $\tilde{A}\in Q^*(A)$ が存在するか判定する問題はNP完全である．

4. 線形計画法の符号可解性

線形計画問題：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & cx \\ \text{subject to} & Ax=b, \\ & x\geq 0, \end{array}$$

に対して，与えられた A, b, c の要素の符号から，最適解の符号パターンを求めることを目的とする．線形計画問題が符号可解であるとは，最適解のとり得る符号パターンの集合が，A, b, c の要素の大きさによらずに一意に定まることを言う．本論文では，符号可解な線形計画問題に対する特徴づけを行った．

そのために完全符号正則という性質を導入する．$m\times n$ 次行列 $A(m>n)$ が完全符号正則であるとは，A の任意の m 次正方部分行列の正則性が A の要素の大きさによらず一意に決まることを言う．与えられた行列が完全符号正則であるかどうかは，Robertson, Seymour, Thomasの符号正則性判定方法を用いることで多項式時間で判定可能である．符号可解性に関して，以下の定理が成り立つ．

定理4 線形計画問題は，行列 $(A\ \ b)$ と $\begin{pmatrix} c \\ A \end{pmatrix}$ がともに完全符号正則ならば，符号可解である．

この十分条件は，任意の基底に対する基底解とその簡約費用が与えられた要素の大きさによらず一意に定まるための必要十分条件であり，符号可解性を特徴付けるための最も自然な条件となっている．

線形計画問題を解くための方法の一つに単体法が知られている．定理4の条件を満たすならば，任意の基底に対する単体表の符号パターンが一意に定まるため，A, b, c の要素の符号を基に単体法を動かすことができる．単体表の符号パターンは，完全符号正則行列に対応する二部グラフ上でパスを見つけることで，要素の符号のみから組合せ的に得られる．よって，一回のピボットに対する計算量は $O(\gamma)$ となる．ただし，γ は A, b, c の非零要素数の和である．完全符号正則行列は疎であるので，数値計算を行うよりも効率的に計算することができる．ピボットの更新規則としては，変数の添字と単体表の符号のみから更新していく規則，例えば最小添字規則や十文字法，が知られており，これらは有限回の反復で終了する．よって，符号情報のみを用いて，有限回の反復で最適解の符号パターンを得ることができる．

さらに，定理4の条件を満たすとき，線形計画問題を多項式時間で解くことができる．最適解の符号パターンは，符号可解性から非零要素を全て$+1$と-1に置き換えた問題のものと等しい．この問題の入力の大きさは定数なので，楕円体法や内点法を用いて最適解の符号パターンを多項式時間で計算できる．

参考文献

[1] R. A. Brualdi and B. L. Shader: *Matrices of Sign-solvable Linear Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[2] F. J. Hall, Z. Li and D. Wang: Symmetric sign pattern matrices that require unique inertia, *Linear Algebra and Its Applications*, 338, pp. 153-169, 2001.

[3] V. Klee, R. Ladner and R. Manber: Sign-solvability revisited, *Linear Algebra and Its Applications*, 59, pp. 131-158, 1984.

[4] W. McCuaig: Pólya's permanent problem, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 11, # R 79, 2004.

[5] N. Robertson, P. D. Seymour and R. Thomas: Permanents, Pfaffian orientations, and even directed circuits, *Annals of Mathematics*, 150, No. 3, pp. 929-975, 1999.

[6] P. A. Samuelson: *Foundations of Economics Analysis*, Harvard U. P., 1947; Atheneum, New York, 1971.