OR 40 年 (16)

日本OR学会会長
中央大学　教授
今野　浩

16．整数計画法の大逆転

1970年末から80年代初めにかけて，私は整数計画法の理論研究に“はまりこんで”いた．

私がこの分野を本格的に研究することになったきっかけは，69年に出たT.C. Huの教科書，「整数計画法とネットワーク・フロー」の翻訳作業を行ったことである．著者であるフー教授は，ウィスコンシン大学数学研究所の教授で，IBMワトソン研究所時代に，整数計画法の創始者であるラルフ・ゴモリーと，ネットワーク・フローの分野で歴史に残る論文を書いた「超」秀才である．

さてこの本は，第1部「線形計画法」，第2部「ネットワーク・フロー」，第3部「整数計画法」の3部構成であるが，“教科書”として採点すると，第1部は○，第2部は◎，しかし第3部には×を付けざるを得ないできだった．×をつけた理由は，役に立ちそうもない代数的な解法に多くのスペースを割く一方で，実用性の高い分枝限定法に関する記述が，たったの5ページしかないことである．

分枝限定法には数学的な深味がない，というのがその理由だったが，結果的にこの人は，70年代以降の分枝限定法の大発展と，代数的方法の衰退を見誤ったのである．急激に変化する分野の教科書を書くことがいかにリスキーかを示す見本のような本である．このためこの本は，72年に出たGarfinkel-Nemhauserの，より分かりやすくバランスの取れた教科書に完敗してしまった．

当然ながら，75年に出た訳書はまったく売れなかった．ところが，この本を翻訳したということ（だけ）で，私は整数計画法（の中の代数的方法）の専門家ということになってしまうのである．実際，この頃（そして今も）この本の内容を完全に理解している人はほとんどいなかったから，全くの嘘というわけではないが，これは“専門家の中もピンキリ”ということの証明である．

さて，この訳本が出た頃日本を訪れたのが，カーネーギー・メロン大学のエゴン・バラス教授である．この人は，1965年に発表した0-1整数計画法問題に対する「加法的解法」で一躍有名になった人であるが，70年代に入ってからは，ゴモリーが先鞭を付けてまもなく手を引いた整数多面体……整数計画問題の実行可能点集合の凸包……のファセット構造の研究をやっていた．

情報処理開発協会の招きで訪日したバラス教授は，分枝限定法や整数多面体のファセットに関する一連の講義で，若い研究者たちを魅了した．そしてこれを機会に設立されたのが，OR学会の「整数計画法研究部会」である．

ここに集まった十数人のメンバの関心の対象は，分枝限定法だったが，私はバラス・グループ（R. Jeroslow, M. Padberg, L. Wolsey, R. Blairら）の代数的方法の研究に集中した．しかし残念なことに，このグループの研究成果を吸収するのに精一杯で，その先を行く成果を挙げることはできなかった．

この研究部会は3年にわたって継続し，全メンバの協力の下で「整数計画法と組み合わせ最適化」（日科技連，1982年）をまとめて散会した．そしてほとんどのメンバは，別の分野に転進していった．各自それぞれの理由があったのだろうが，ともかくこの時代は，計算機が高価な上にとても遅かったから，実用規模の問題はなかなか解けなかったし，自分で考案したアルゴリズムを検証するのも容易でなかったのである．

私が転進（撤退）した理由は，バラス・グループの研究の後追いに疲れてしまったことと，コーネル大学のネムハウザーが，バラスたちの研究を，“悪しきORの見本”と批判しているのを耳にしてショックを受けたためである．

こうして私は整数計画法から手を引いた．しかしこの頃バラスの理論的研究は，実用規模の組み合わせ最適化問題に応用され，成果を挙げ始めていたのである．

ダンツィクの一番弟子であるE. Johnsonと，バラスの一番弟子であるM. Padbergが協力して，大規模な巡回セールスマン問題を解くことに成功したのは，80年代前半のことである．そしてそこに使われたのが，バラス・グループの研究……ファセット・カットとその持ち上げ技術，および離接カット……だった．

しかしこの話を聞いても，私はこの分野に戻る気にはなれなかった．なぜならここで使われたファセット・カットは，巡回セールスマン問題のネットワーク構造を利用した巧妙かつ難解なもので，私にはそのかけらも理解できなかったからである．一方，E. Johnsonらが80年代半ばに，5,000変数からなるスケジューリング問題を解いたときには心が揺れた．なぜならそこに使われたのは，私が十分に理解したナップサック多面体のファセットと，離接カットだったからである．

ナップサック問題はNP完全問題であるが，ほとんどの問題は分枝限定法で簡単に解ける．それにもかかわらず，なぜバラス教授はこの問題のファセット構造を研究しているのか．理由はよく分からなかったが，私にとってとてもおもしろい研究だった．

一方の離接カットは，1974年に発表されたものだが，バラス教授から送られてくるおびただしい論文群の中でも，突出して難解かつ長大なものだった．全部で31個の定理が埋まっているこの論文を読破するには，1年以上の時間が必要だった．やっと理解はしたものの，これが実用上どのような意味があるのかはよく分からなかった．数学的に奥深いが，実用性があるかどうか分からない理論．おそらくネムハウザーのターゲットは，この論文だったのではないだろうか．

ところがこれらの理論が，大規模スケジューリング問題を解く上で，決定的な役割を果たしたというのである．ネムハウザーの批判をものともせず，バラス・グループがこの研究を継続したのは，いずれ実用上重要な役割を果たすことが分かっていたからだろう．

ちなみに，74年に書かれた離接計画法論文が日の目を見たのは，24年後の98年のことである．長い間放置されていたのは，ある有力ジャーナルで拒絶査定を受けたためだが，この論文は整数計画法の歴史を書きかえる記念碑的論文だったのである（なおこの論文は，98年のDiscrete Applied Mathematics誌に招待論文として掲載された）．

それから15年間，私は整数計画法とは無縁な生活を続けていた．金融工学と大域的最適化法の研究に集中していたからである．そして90年代半ば以降，私は残された最大の難問，“凹型取引コストの下でのポートフォリオ最適化問題”に取り組んだ．そして60年半ばに提案された，J. Falkらの超直方体分割法を改良することによって，幸運にも，この問題を解くことに成功した．提案された当時は，全く役に立たないと思われていた方法が復活したのだから，世の中は何が起こるか分からないものである．

一方，凹型関数最小化問題を解く方法としては，古くからよく0-1整数変数を導入して折れ線近似する方法が知られている．しかしこの方法は，実際にはうまくいかなかった．非線形関数を折線近似するには，一つの変数につき最低でも5個の0-1変数が必要となるから，変数が1,000個あれば，数千個の0-1変数を取り扱わなくてはならない．こんな問題は絶対に解けない．これが80年代初めの常識だった．

ところが，この解けないはずの問題を，新たにリリースされたCPLEX 8.1に食べさせたところ，大域的最適化法より10倍速く解けてしまったのである．ショックを受けた私は，この前年に出た労作，「応用数理計画法事典」（朝倉書店，2002年）の整数計画法の章を執筆した松井知己氏にメールを打った．

> 松井兄
>
> その後如何お過ごしでしょうか．少々お尋ねしたいことがありメールします．このところ取引コストの下でのポートフォリオ最適化問題を0-1整数計画問題として定式化して，CPLEXで解かせたところ，その余りの速さにビックリしています．こんなことは常識なのでしょうか．貴兄が書かれた整数計画法の章を読み直してみましたが，一言もその種の記述がないのが気になります．またこのソフトは，一体どんな方法を使っているのでしょうか．

わずか10分後にトロントから戻ってきた返事は，驚くべきものだった（それにしても，インターネットはありがたいものです）．

今野先生

CPLEXが驚くほど速いという話は，今でも良く耳にしますので，まだ常識とはいえないでしょう．しかし少なくとも，あの本に関わった若手たちの間では常識です．私は先生から引き継いだT社の実務家研修では，3000変数までの0-1整数計画問題は，何も考えずにCPLEXに食わせればいいと言っています．

さて何故速いかですが，その秘密は単体法ルーチンの中のピボット選択と，分枝カット法におけるゴモリー・カットだということです．しかしこのあたりの事は良く分かりません．大きな問題が解けることは事実ですが，それができるのはCPLEXという商品だけで，他にそれと太刀打ちできるソフトがないため，出てきた答が正しいかどうか検証しようがありません．ここでCPLEXが速いと書くと，ILOG社の宣伝になってしまうので，学術的な記述の中にはそのことを書くわけにはいかなかったのです．

40年前のゴモリー・カットが決定的役割を果たしていると聞いて，私は仰天した．この方法は，60年代半ばに理論倒れの代表と批判され，ORの地盤沈下に一役買った方法だからである．この手紙の数ヵ月後，私はCPLEXを開発したライス大学のR. Bixby教授の講演を聞いて，松井氏の言っていることが事実であることを確認した．

その後間もなく，CPLEX以上に強力と称せられるソフトウェアXPRESSが登場した．実際に使ってみると，噂どおりこちらの方が少しばかり早い上に，打ち出してくる答は全く同じである．この結果，一般の整数計画問題に対する比較検証を行うことが可能になった．今後は，かつて線形計画法の分野で繰り広げられた，単体法ベースのCPLEXと内点法ベースのOB-1のバトルが，整数計画法の分野で繰り返されることになるのかもしれない．事実，2003年にリリースされたCPLEX 9.0は，8.1より数倍速い．

最後に，整数計画法におけるもう一つの仰天ニュースを紹介することにしよう．それはスーパースター，ゴモリーの現役復帰である．60年代末にワトソン研究所長に就任した後，IBM副社長，スローン財団理事長，大統領特別顧問を務めたゴモリーが，70歳になったのを機にすべての公職を辞し，整数計画法の研究に復帰したのである．

ゴモリーは，91年に次のように書いている．“私の整数計画法に関する研究は，IBMの研究部門のヘッドに就任した1970年に打ち切られた．そしてそれから後，少なくとも現在まではそのままになっている”と．

ところがそれから10年ほどして，米国OR学会の誕生50周年を記念して発行された，『Operations Research』誌の50巻第1号の中で，ゴモリーはこの文章を引用しながら次のように書いている．

「私は1991年に，“少なくとも現在までのところ”と書いた．このとき私は，いつの日か未完のままになっている研究に復帰したいと考えていた．その希望はついに実現された．今私は，かつての同僚であるエリス・ジョンソンらと研究活動を再開した．そして近々，整数多面体（コーナー多面体）の理論と実用性に関する論文を発表する予定である．」

私はこの論文が出るのを首を長くして待っていた．そして2003年の秋，Johnson, Araozと共著で書いた3篇の論文が『Mathematical Programming』誌に発表されたのを見て，ゴモリーのあふれるばかりの情熱に圧倒された．

ゴモリーは書いている．「ここには大きな鉱脈が埋まっている．みんなで力をあわせて宝物を掘り出そう」と．残された時間が少ないことを考えれば，自分たちだけでは掘りつくせそうもない．だから皆さん一緒にやりましょう，と若者たちに呼びかけているのである．パーティでのスピーチならともかく，正式の論文の中でこのような呼びかけを行うのは，異例のことである．

果たしてゴモリーの研究は，新たなブレークスルーに結びつくのだろうか．そして2002年にBixbyが書いたように，誰かが10年後に再び，“10年前には誰も解けるとは思わなかった問題が解けるようになった”と書くのだろうか．私はもうこの研究に加わることはできないが，せいぜい健康に注意して，10年後を見届けたいものだと考えている．

（なお，整数計画法に関わるドラマについては，10月末に刊行予定の「役立つ1次式：整数計画法の物語」（日本評論社）を御覧いただきたい．）