

モデルの効用

逆瀬川 浩孝

1. はじめに

オペレーションズリサーチにおけるモデル分析は、しばしば物理・化学における実験に準えられます。自然観察あるいは実験の結果から作業仮説を作り、実験を積み重ねることによりその仮説を検証し、必要ならば修正を施し、さらに実験を繰り返す、という作業の連鎖によって理論的体系が豊かなものになって行くのと同じように、オペレーションズリサーチでもモデルを使った「実験」が推進エンジンになっています。

物理・科学の実験に比べて（もっとも、最近の化学実験はコンピュータプログラミングが必要という話を聞きますが）オペレーションズリサーチにおける実験は特別な実験装置を使わずに、多くの場合コンピュータを頼りに実施されます。つまり、数理的なモデルたちを作り、それらの動きを見ながら問題の解決法を探るというわけです。

本誌数号前の「モデリング」特集号[3]に、学会を代表する「モデラー」の方々のモデルに対する考察が書かれていて興味深いのですが、それらの中から共通項として、「抽象化」と「汎用性」というキーワードを取り出すことができます。

この小論では、数理モデルの特徴としての「抽象化」のレベルと、モデルの「汎用性」について説明しながら、モデルの効用について考えます。

2. モデルと抽象化

モデルを使って問題を考えるという思考法は何もオペレーションズリサーチの専売特許ではなく、いろいろな学問分野で行われていることですが、オペレーションズリサーチの中では特に重要性が強調されています。オペレーションズリサーチが「問題解決の科学」とも呼ばれていることと関わりがあるのでしょう。現場から問題を発掘して定式化し、合理的な解決を目

指すということがオペレーションズリサーチの基本的アプローチですが、その対象は千差万別、そのつど、その問題固有の解決法を考えていたのでは大変です。問題の本質を掴み、必要な機能を持ったスケルトンモデルを作っておけば、表面上は違う状況設定であっても、同じモデルを使って考えることができる、という経験が積み重なり、モデルの重要性が強調されているのだと思います。

オペレーションズリサーチの教科書を読んでいると、多くの著者は実施の難しさを強調しています。そのような事態を想定して、なるべく現場に近いモデル作りを意識しているのはシミュレーションモデルでしょう。例えば空港建設のような巨大プロジェクトにはシミュレーションによるアセスメントが義務づけられていると聞きます。そのシミュレーションは実際にモノがスムーズに流れている、仕様を満たすような能力を備えている、事故対策も万全である、ということアピールするためのものですから、意思決定者、つまりモデルを利用するだけの人たち、がそれを認識できなければ困ります。ということは、あまり抽象的なシミュレーションモデルを作って「シミュレーションしました」と言っても受け入れられないでしょう。

そこで、このような目的のために作られた離散事象シミュレーション用のソフトウェアはモデルの動きを視覚化したアニメーションツールを備えていて、何が起きているのか、パラメータを変えると何がかわるのかが一目で分かるようなモデルを簡単に作るできるようになっています。

しかし、この「現場対応」のシミュレーションモデルでも、アニメーションで動いているのは実際のモノではなく、その動きは実際の動きと似せていますが、現実そのものではありません。必要な要因のみをピックアップして現実を抽象化し、シミュレーションモデルに落とし込むというプロセスを通っているのです。

このような、いわば現場密着型のシミュレーションモデルの多くは、その問題固有の特徴を生かし、より現実のオペレーションに近い、操作性の良いモデルを

さかせがわ ひろたか
早稲田大学 理工学部
〒169-8555 新宿区大久保3-4-1

目指すので、抽象化の度合いは低いのが普通です。これに対して、現場から少し離れてものが考えられるような問題、あるいはルーティン化されたオペレーショナルな問題では、「抽象化」の度合いを強めることにより、要因間のつながりが浮き彫りにされ、数理モデルとして定式化の可能性が見えてきます。

抽象化することによって次に見えてくるのが「汎用性」です。もともと一つ一つのモデルはある問題を解くために作られたものですが、別の問題を解くために抽象化してモデルを作ったら同じモデルになってしまったということがあります。例えば、銀行の窓口の混雑を分析するための $M/M/s$ モデルは修理工場の混雑でも、タンカーの荷下ろしの混雑でも、同じモデルを使うことができるというわけです。いわば、モデルは問題を捕まえる網のようなもので、問題の「海」に網を打って捕まえることができる問題が、そのモデルの適用範囲ということになります。

この喩えを使うと、打った網にとんでもないモノが引っかかってくる可能性がないわけではない、というのが次の二つの例です。

3. 新聞売り子モデルとレベニューマネジメント

オペレーションズリサーチの勉強をした人ならば誰でも知っている有名なモデルの一つとして、新聞売り子モデル（問題）があります。

毎朝街角で新聞を売っている健気な少年がいる。午後になってもまだ全部売れずに声をからしているかと思えば、早々に売り切れてしまい、もっとあればもうけも大きいのに、と臍を噛むことも多らしい。仕入れ部数に関して何か有効なアドバイスは出来ないだろうか

という問題です。仕入れ値が 30 円、売値が 100 円とすると、売れ残った場合の損失は 30 円、売り損なった場合の損失は 70 円と計算されます。問題は、気まぐれな客の購買行動です。そのため、仕入れ過ぎても、仕入れ足りなくても損するので折り合いを付けなければいけないという「トレードオフ」状況が発生します。もし、毎日の需要がランダムに決まり、トレンドがないのであれば、明日の需要量は確率的にしか予測できないので、過去の需要記録を少ない順番に並べて、そ

れを損失の比である 70:30 に分かち需要量を求め、それを毎日仕入れなさい、というのが「最適戦略」ということになることが知られています。

「新聞」売り子モデルの特徴の一つは、ある時期を過ぎると無価値になる（陳腐化する）商品を扱っているというところにあります。そういう観点から見ると、陳腐化する商品はいくらでもあるわけで、この考え方はそれらの商品の仕入れ問題に適用できるはずだ、として考えられたのが航空機チケットの割引販売問題です。

フライトチケット問題 航空機会社の価格設定の自由化により、ディスカウントチケットが出回ることになりました。フライトのチケットはそのフライトだけに有効で、その便が飛んでしまえば売れ残りは無価値になります。一方、ディスカウントチケットが売れるからといって、売れ残りを恐れて事前に割引で売ってしまうと、間近になって正規運賃でも売れるビジネス客の需要に応えることができず、正規運賃と割引運賃の差額をもうけ損なうことになります。

新聞を仕入れて売る、という行為と、数の決まった座席のチケットを売る、という行為は一見結びつかないように思われますが、売れ残ったら捨てるしかない、つまり、陳腐化する商品を売るという点で共通点があります。さらに、需要があってもモノがなければ売り損なう、という点でも共通です。しかし、新聞は同じ値段で売ることに対して、チケットの方は割引運賃と正規運賃の 2 通りの価格があり、単純に対応付ける訳には行きません。

二つの状況比較 チケットの場合は何が問題だったかということ、先に割り引きでチケットを売ってしまうと、後から来るかもしれない正規運賃を払っても購入する客を逃すことになる、ということでした。割引運賃販売による代金は回収済みですから、もうけ損なった差額運賃が機会損失となります。

こう考えることにより、新聞売り子問題との対応関係が見えてきます。つまり、チケットを正規運賃で売る人を新聞売り子とみなして、正規運賃枠をいくつ確保すべきか、という問題を立てることにします。

いろいろな制約から、割引運賃の販売期間が限られていて、正規運賃のチケットは売れなかったら空席で飛ばすしかない、と仮定すると、新聞の仕入れ量と正規運賃枠、新聞を買いに来る客と正規運賃でチケットを買いに来る客、という対応が取れ、売れ残った場合の損失は、新聞の場合が仕入れ値、フライトチケット

の場合は割引運賃，売り損なった場合の損失は正規運賃と割引運賃の差額，という対応関係でまとめることができます。

その結果，最適な正規運賃枠は，新聞売り子問題の最適戦略をそのまま適用することができることとなります。つまり，正規運賃を A ，割引運賃を B とすると，正規運賃を利用する客の需要に関する過去のデータを小さいものから順に並べ， $A-B : B$ に分ける数を正規運賃枠として確保する，というのが最適戦略となります。

4. 待ち行列モデルとリスクモデル

待ち行列モデルの分析ツールの中に「残余仕事量」あるいは「仮待ち時間」というものがあります。処理中の客の残りサービス時間を含めて，系内にいる客が要求している仕事量（サービス時間）の合計が残り仕事量です。もし，サービスする人が一人で，サービスは先着順に行われ，客がいる間は働き続けると仮定すると，ある時刻 t における残り仕事量は，「仮に」時刻 t に客が到着したとすると，その客の待ち時間になる，という意味で「仮待ち時間」と呼ばれることもあります。仮待ち時間のサンプルパスは客の到着時点でその客の持ってきた仕事量，すなわちサービス時間だけ上にジャンプし，新たな客が到着するか，仕事量が 0 になるまで， -1 の傾きで減り続ける，という動きをします。

経過時間プロセス これに対して，仮待ち時間ほど有名ではありませんが，「経過時間」という考え方があります。現在サービス中の客のシステムに滞在している時間を表すものです。そのサンプルパスはサービス開始直後に，サービスを開始した客のそれまでの待ち時間からスタートし，傾き 1 で増え続け，サービスが終了すると，次の客の待ち時間まで下にジャンプする，という動きをします。

仮待ち時間と経過時間のサンプルパスを比較した場合，もし誰もいないところに到着し，退去するまで次の客が到着しなければ，両方とも直角三角形のような

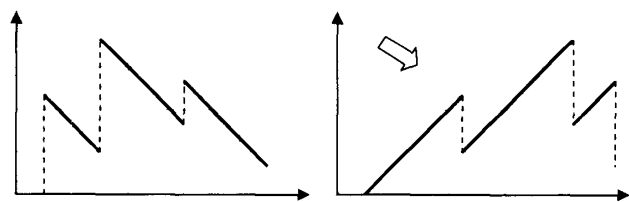


図1 仮待ち時間プロセス

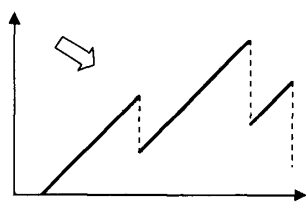


図2 経過時間プロセス

グラフになり，グラフの面積は全く同じになります。客が待っているところに到着した場合も，この二つの確率過程のサンプルパスは見方を変えたと同じ動きをしていることが言えるのです。

実際，仮待ち時間のサンプルパスを直交メッシュ状の餅網に貼り付けて，左上隅を右下へ向けて押しつけ，縦横の針金が 45° で交わるような菱形に歪めてみると，経過時間のようなサンプルパスになるでしょう（図1→図2）。つまり，それまで垂直にジャンプしていたところが傾き 1 のスロープになり，傾き -1 で減少していた部分が一挙に垂直にジャンプして減少するようになります。数学的に言えば，経過時間のグラフを x 軸 y 軸が 45° で交わる斜交座標によって変換すると，仮待ち時間のサンプルパスと 1 対 1 対応するということなのです。

リスクプロセス 話変わって，保険会社の金の動きを簡単な数学モデルで記述することを考えます。収入は保険料，支出は保険金支払いだけとしましょう。保険料はもちろん契約の時期によって，あるいは保険金の額によって変わってきますから，丁寧に考えようと思えばいろいろあるでしょうが，契約者が無数と言ってもいいほどたくさんいるとすれば，おおよそに言って一定金額が「流入」して来ると見なしても良いでしょう。支払いの方はもちろん支払い請求（支払い）があった場合で，これはいつ起きるか分かりません。また，支払額も，ケースバイケースで異なります。そこで，次のようなモデルが考えられます。システムの状態（つまり，資金量）は一定スピードで増え続け，離散的にランダムなタイミングでランダムな量減少する，という動きを繰り返す。このような動きを繰り返す確率過程は Cramer-Lundberg のリスクプロセスと呼ばれていて，金融工学のテーマになっています。

リスクプロセスと経過時間プロセス さて，このリスクプロセス，サンプルパスを描いてみると，その前に描いた待ち行列モデル分析で用いた経過時間のサンプルパスとよく似ていることが分かります。経過時間プロセスもリスクプロセスも，増加するときは一定スピードで増加し，ランダムな事象によってランダムな量，下にジャンプする，というサンプルパスになります。ただし，経過時間の場合，ジャンプする量が最大でも x 軸まで，客がいなければサンプルパスは 0 に留まりますが，リスクプロセスの場合は，そういう制約はなく，ジャンプして x 軸を下回ると倒産となって，プロセスが終了してしまいます。リスクプロセス

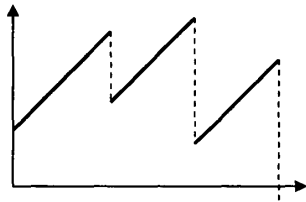


図3 保険会社の準備金プロセス

の初期資金量は、時刻0でサービスを受けている客の経過時間に対応します。

結局、待ち行列モデルの言葉で言うと、最初待ち行列が形成されている状態から始めて、最初に窓口が遊休になるまでの動きがリスクプロセスの関心事である、ということが分かります。

ここから先の数理モデルによる解析については牧本[1]を参照してください。ついでながら、文献[1]と同じ待ち行列の特集号には、このモデルが遺伝子のパターンマッチングの問題に適用されている例も紹介されていて、刺激的です(文献[2])。

5. モデルの汎用性

上に述べた二つの事例は、オペレーションズリサーチにおけるモデルを特徴付ける「抽象化」と「汎用性」という二つのキーワードをよく説明しています。最初の問題では、新聞売り子の気の毒な境遇から離れて、独立同分布する需要の分布と実損と機会損の関係だけに問題状況を集約することにより、後世の新たな問題状況をそのフレームワークに取り込むことができた、と言えましょう。

この場合は、モノを売るという点では新聞もチケットも同じですから比較的スムーズな視点の移動ができますが、2番目の例は想像するのが難しいでしょう。待ち行列モデルは時間の計算をしているのに対して、保険会社の方はお金の計算です。保険会社への支払い請求は会社側から見ればランダムに到着し、請求額は確率変動する、というモデル化が可能でしょう。入る方、つまり保険料収入についても同じようなことが言

えますが、それを大胆にも「保険料はコンスタントに流入してくる」と仮定することで待ち行列のモデルの網に引っかけることに成功したのです。

抽象化し、理想化することによって現実から乖離することを余儀なくされます。曰わく線形性、曰わく独立性、曰わく定常性、などなど。現実の問題ではほとんど実現不可能なこれらの理想的条件は、しかし、モデルの価値を減じるものではなく、それどころか、多くの問題でモデル思考の有効性を実証しています。

抽象化の度合いが高くなれば、それだけ、視野が広がり、引っかかる問題の数も種類も増え、適用範囲も柔軟になります。といっても、過度の抽象化は当面の問題の理解という点ではマイナスかもしれません。「ロメオとジュリエット」が家と個人の確執物語、と括ってしまえば、分類学的興味には有益かもしれませんが、作品の風合はどこかに行ってしまいます。

逆に、解決すべき問題を抱えている側では、分析の目的に応じて、ほどほどの抽象化、一般化を行うことにより、既存の「汎用」モデルたち(例えば、OR事典[4])のフレームワークに落とし込む、つまり「定式化」することができれば、それらの持つ豊富な体系を利用できる可能性が高くなります。モデルを上手に利用することによって、新たなモデルの開発コスト削減という効用を得ることができるでしょう。

この小論を今は亡き畏友の山崎源治氏に捧げます。

参考文献

- [1] 牧本直樹, リスク評価と待ち行列モデル, オペレーションズリサーチ Vol. 49, No. 7, 418-421, 2004.
- [2] 豊泉洋, ゲノムの中にあられた待ち行列, オペレーションズリサーチ Vol. 49, No. 7, 413-417, 2004.
- [3] 日本オペレーションズリサーチ学会, 特集モデリング, オペレーションズリサーチ Vol. 50, No. 4, 220-263, 2005.
- [4] 日本オペレーションズリサーチ学会, OR事典, 2001.