切出し・詰込み問題とその応用
—(3)多角形詰込み問題—

梅谷 俊治，今堀 慎治

1. はじめに

本シリーズ（切出し・詰込み問題とその応用）では，いくつかの対象物を互いに重ならないように配置する切出し・詰込み問題に関して，代表的な手法から最新の研究までを解説している．最終回の今回は，多角形詰込み問題に焦点を当て，問題，解法，およびその応用について解説する．

多角形詰込み問題（two-dimensional irregular cutting stock problem）は，様々な形状・大きさの多角形（製品）を二次元平面（母材）上に重なりなく配置する問題であり，長方形詰込み問題と同様に幾何学や組合せ最適化の分野で古くから研究されてきた．

また，機械部品の板取（ネスティングと呼ばれる）や，服の型紙の配置（マーキングと呼ばれる）など，実用的な問題とも密接な関わりを持ち，近年盛んに研究が行われている．

多角形詰込み問題は，配置する製品の形状を除けば，長方形詰込み問題と同じ問題構造であるため，BL法（bottom-left algorithm）やNFDH法（next-fit decreasing height algorithm）といった長方形詰込み問題に対する近似解法がよく利用されてきた．しかし，これらの解法は，多角形の複雑な形状によって生じる隙間をうまく埋めることを考慮した手法ではないため，歩留りの良い解を得ることは困難であった．また，多角形同士の重なり判定一つを取っても，長方形の場合に比べて，非常に複雑で多くの計算時間を要するため，多角形詰込み問題に対する実用的な解法はほとんどなかった．しかし，近年では，計算幾何や数理計画の手法を利用した様々な解法が研究されており，コンピュータの性能の向上も相まって，実用的な規模の例題に対して歩留りの良い解を求める解法もいくつか提案されている．

本稿では，まず，多角形同士を重なりなく配置するための計算幾何アルゴリズムについて解説した後に，この手法を利用した様々な解法について解説する．また，線形計画法を利用した解法についても解説する．

うめたに しゅんじ
豊田工業大学 大学院工学研究科
〒468-8511 名古屋市天白区久方 2-12-1
いまほり しんじ
東京大学 大学院情報理工学系研究科
〒113-8656 文京区本郷 7-3-1

2. 多角形詰込み問題とは

まず，標準的な多角形詰込み問題について述べる．入力として，幅 W，高さ H の大きさを持つ長方形（母材）R と，n 個からなる多角形（製品）集合 $\mathcal{P}=\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ が与えられるものとする．ここで，多角形 $P_i \in \mathcal{P}$ は凸に限らないものとする．このとき，(1)多角形 $P_i \in \mathcal{P}$ は母材 R 上に配置される，(2)多角形対 $P_i, P_j \in \mathcal{P}$ は互いに重ならない，という二つの制約条件を満たす各多角形 $P_i \in \mathcal{P}$ の配置を決定する（図1）．

多角形詰込み問題は，実際の工業上の応用から様々なバリエーションを持つ[8]．例えば，布地のように布目，模様，裏表のある素材では，原則的に製品の自由な回転や反転は許されない（180度回転のみ許される場合が多い）．ガラスや皮革は方向を持った素材ではないので，製品の自由な回転が許される．ただし，文献[8, 14]によると，布地の場合でも微少な回転を許すことで歩留りを改善する手法が実際には採られている．皮革は1枚の母材にすべての製品が入りきらないため，使用する母材の枚数を最小化するビンパッキ

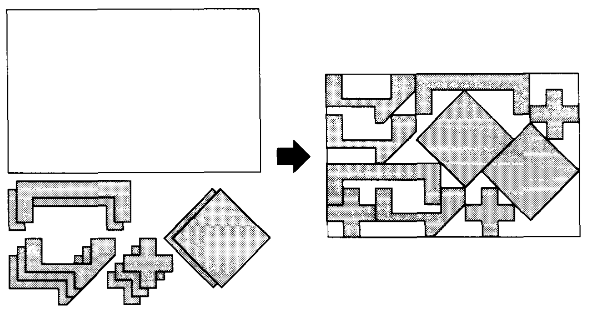

図1 多角形詰込み問題の例

ング問題となるが，布地や金属板は母材が十分な幅を持つため，必要となる母材の幅を最小化するストリップパッキング問題となる．また，皮革は母材の部分によって品質が異なるため，そのことも考慮に入れて製品を配置する必要がある．

これらの応用では，すべての製品が異なる形状である場合はまれで，限られた種類の形状の製品を複数切出すことを要求される場合が多い．

3. 多角形詰込みと計算幾何

多角形詰込み問題に対して効率良い解法を設計するには，多角形 P，Q が与えられた際に，それらの多角形が重なっているかどうかを高速に判定する必要がある．

多角形の重なりを判定する手法の一つに，与えられた多角形をビットマップや短冊状の長方形の集合に分割して多角形を近似する方法がある[1, 16]．これらの方法は，分割数の線形オーダで図形の重なりを判定できるが，分割数が少なければ無駄の多い配置しか得られないし，逆に，分割数が多くなると重なり判定に多くの計算時間を要するという問題点がある[8, 17]．

多角形の自由な回転を許さない場合には，NFP (No-Fit-Polygon) が上記の目的に使われることが多い．与えられた多角形 P，Q について，それぞれ座標系の任意の点を参照点として，多角形を参照点からの相対位置で表すものとする．いま，P の配置が固定されているときに，P と Q が重なりを持つような Q の参照点の位置全体を Q の P に対する No-Fit-Polygon と呼び，NFP(P, Q) と表す．NFP(P, Q) は，Q を P と接するように平行移動させたときに Q の参照点が通る軌跡とその内部領域である（図 2）．

NFP は計算幾何におけるミンコフスキー差（Minkowski difference）と等価であることが知られており[6]，計算幾何ライブラリを用いて高速に計算できる．多角形 P と Q を重ならないように配置するには，Q の参照点が NFP(P, Q) の境界上か外部にあるように Q を配置すれば良い．また，多角形 P を母材 R 上に配置するには，母材の外部 $\bar{R}$ に対して NFP$(\bar{R}, P)$ を求め，P の参照点がこの境界上か内部にあるように P を配置すれば良い．NFP は，単に与えられた二つの多角形の重なりを判定するだけではなく，二つの多角形が互いに接する配置を求められる点が大きな利点である．しかし，NFP は多角形の回転や反転を扱えないため，回転や反転させた多角形ごとに NFP を計算する必要がある．NFP の計算法については，文献[3, 12]が詳しい．

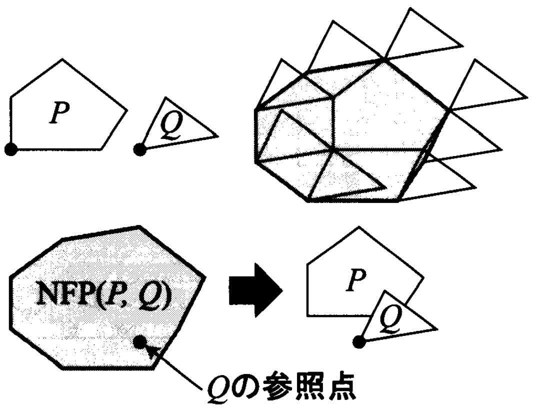

図 2　No-Fit-Polygon の例

4. 実用的な解法の紹介

長方形詰込み問題と同様に，多角形詰込み問題のバリエーションの多くは NP 困難問題であり，実用的な規模の問題に対して厳密な最適解を求めることは非常に困難なことが知られている[9]．そこで，本節では，多角形ストリップパッキング問題（以降，ストリップパッキング問題と略す）に対するいくつかの近似解法について解説する．

4.1 詰込み順列を解表現とする手法

長方形詰込み問題と同様に，多角形詰込み問題でも，あらかじめ与えられた順番に従って一つずつ多角形を順番に母材に詰込む方法がよく用いられる．特に，よく用いられるのは，多角形を左にも下にも動かせないという条件（BL 条件と呼ばれる）を満たすように配置する BL 法である．

多角形詰込み問題でも NFP を用いて容易に BL 条件を満たす配置を求めることができる．これから配置する多角形を P_i とする．母材の外部 $\bar{R}$ に対する NFP$(\bar{R}, P_i)$ から，すでに配置済みの各多角形 P_j に対する NFP(P_j, P_i) の和を差し引いた多角形領域を求める（図 3）．BL 条件を満たす P_i の参照点の配置は，この多角形領域の頂点集合に含まれるので，各頂点が BL 条件を満たすかどうかを判定すれば良い．NFP を用いた BL 法の詳細，およびその高速化については文献[7]を参照いただきたい．

BL 法では，多角形の詰込み順が解の良し悪しを決定するが，面積の大きい順といった簡単な基準や，メタ戦略を用いて良い詰込み順を探索することによって，より精度の高い解を見つけることができる[10, 18]．

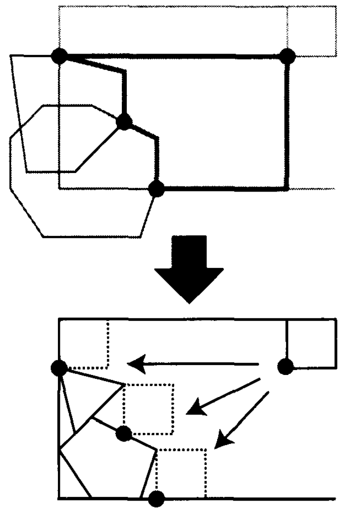

図3　NFPを用いたBL法の実現

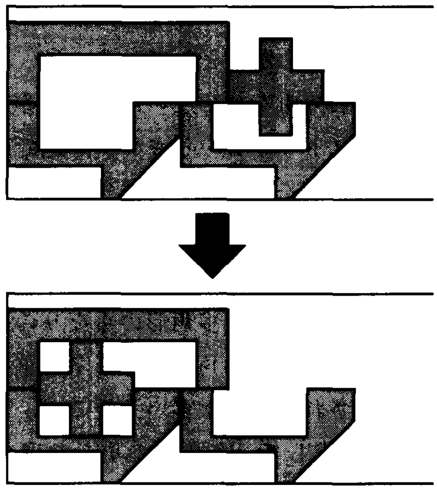

図4　多角形を穴に配置した例

ただし，新たな詰込み順の解を評価するたびに，多くの多角形を配置し直す必要があるため，メタ戦略のように多くの解を評価する手法では，多くの計算時間を要するという問題点がある．

4.2　配置座標を解表現とする手法

多角形詰込み問題では，適当な方法ですべての多角形を配置した後に，多角形を一つ選んで異なる場所に配置し直す手続きを繰返して，より精度の高い解を見つける手法がよく用いられる．解の探索には，アニーリング法やタブー探索法などのメタ戦略が用いられる．

例えば，文献[5]では，多角形同士もしくは多角形と母材の境界に囲まれた領域（穴と呼ばれる）を記憶しておき，選んだ多角形を別の穴に配置し直す手法を提案している（図4）．しかし，文献[5]のように，多角形の重なりのない解のみを探索する解法では，ある程度歩留りの良い解になると，一つの多角形だけを動かして多角形の重なりのない解を求めることは簡単ではなく，得られたとしても改善はあまり期待できない．

多くの解法では，探索途中において多角形の重なりのある解を許し，多角形の重なり度合いに応じたペナルティを課す手法を用いている．この手法では，主に(1)多角形の重なり度合いの評価，(2)多角形の移動先の候補，(3)多角形の重なりのない解の生成，について考える必要がある．

初めに，多角形の重なり度合いの指標について説明する．指標としてまず思いつくのは，多角形対ごとに重なり部分の面積を求め，それらの総和をペナルティとする方法である（図5左）．しかし，一般の多角形同士の場合，重なり部分の面積を求めるには多くの計算時間を要するため，代わりに重なり部分を囲む長方

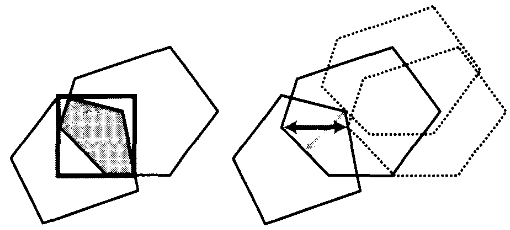

図5　多角形の重なり度合いの評価

形の面積などが用いられる[17]．別の指標としては，多角形対ごとに，重なりをなくすために必要な最小の移動距離を求め，それらの総和をペナルティとする方法がある（図5右）．しかし，重なり面積の計算と同様に，一般の多角形同士の場合，重なりをなくすために必要な最小の移動距離を求めるには多くの計算時間を要するため，代わりに水平方向における最小移動距離などが用いられる[2]．

次に，多角形の移動先の候補について説明する．多角形は母材上の連続した領域に配置できるため，適切な移動先の候補を決定することは容易ではない．例えば，母材上に一定の間隔を持つ格子点を配置し，多角形の参照点が格子点と一致する配置のみを移動先の候補とする方法がある．ただし，すべての格子点を考慮すると多くの計算時間を要するため，実際には，適当な数の格子点をランダムに選んで候補とする方法や，現在の配置に隣接する格子点を候補とする方法が用いられる[2, 17]．しかし，上記の手法では，多角形同士が互いに接する配置が得られないため，あまり歩留りの良い解は得られない．文献[4]では，少なくとも一つの多角形と接するか，もしくは母材の境界と接する配置の中で，それ以外の多角形との重なり度の総和が最小となる配置を移動先の候補としている．また，文献[15]では，水平・垂直方向への移動のみを考え，

それらの中で他の多角形との重なり面積の総和が最小となる配置を移動先の候補としている．

最後に，多角形の重なりのない解を求める方法について説明する．ストリップパッキング問題では，多角形の重なりのある解を，すべての多角形を詰込むのに必要な母材の幅と，各多角形対に対する重なり度の総和を足し合わせた値で評価することが多い．しかし，この評価関数を用いると，多角形の重なりのない解が得られることはまれで，多角形が少しずつ重なり合うような解が出力されることが多い．そこで，母材の幅 W を一時的に固定して，多角形の重なり度の総和のみを最小化する問題を解く方法がよく用いられる[2, 15]．もちろん，この方法は一度の最小化だけでは，元のストリップパッキング問題の解は得られないので，多角形の重なりのない解が得られたら母材の幅 W を変えてさらに良い解を求める手続きが必要である．

4.3 線形計画法に基づく手法

長方形の場合より複雑になるが，多角形対 P, Q が互いに重ならないという条件も不等式の組合せで表すことができる．図6のように，二つの凸多角形 P と Q が重なっていなければ，ある直線によってこれらを分離することができる．この直線を分離直線と呼ぶ．重なりのない凸多角形 P と Q の間には無数の分離直線が存在する場合がある．しかし，P と Q の各辺を延ばして得られる直線に対してのみ分離直線となるかどうかを調べれば，凸多角形 P と Q の重なりを判定できることが知られている．

頂点 $p_1, p_2, \dots, p_l$ からなる凸多角形 P と頂点 $q_1, q_2, \dots, q_k$ からなる凸多角形 Q が与えられるとする．ここで，P, Q の頂点列は，反時計回りの順に並んでいるものとする．このとき，Q のすべての頂点 $q_1, q_2, \dots, q_k$ について，

$$(q_j - p_i)\cdot \boldsymbol{n} \geq 0, \quad (j=1, \dots, k) \tag{1}$$

が成立すれば，辺 p_ip_{i+1} を延ばして得られる直線 L は，P と Q の分離直線である．ここで，$\boldsymbol{n}$ は直線 L に対する法線ベクトルである．このようにして，P と Q の各辺を延ばして得られる直線をすべて調べ，1本でも分離直線があれば凸多角形 P と Q は重なっていないことが分かる．逆に，そのような分離直線が1本もなければ凸多角形 P と Q は重なっていることが分かる．

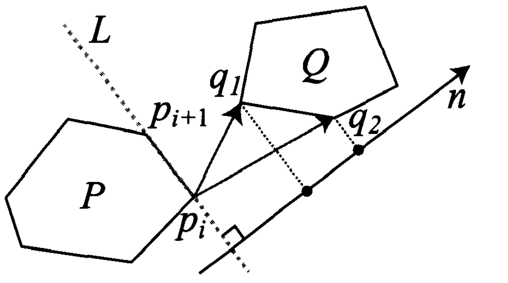

図6　凸多角形の分離

凹部分を含む一般の多角形の場合はかなり複雑になるが，凸多角形に分解すれば，分離直線に基づく不等式制約の組合せとして，多角形対 P, Q が互いに重ならないという制約条件を表すことができる．

すべての多角形対 $P_i, P_j \in \mathcal{P}$ に対して，どの分離直線に基づく不等式制約を採用するかを定めると，多角形詰込み問題は線形計画問題になり，線形計画ソルバを用いて高速に解くことができる．上記の手法では，不等式制約の組合せは莫大な数になるため，解を一から構築する目的には向かないが，最近では，他の解法で得られた解を改善したり，多角形の重なりを解消する目的によく使われる．例えば，文献[13]では，熟練者によって得られた解に，線形計画法を適用してより良い精度の解を得ている．また，文献[2, 11]では，探索途中の解に生じる多角形の重なりを解消するために線形計画法を用いている．

図7，8に8種類24個のシャツおよび17種類64個のズボンの型紙を布ロールに配置するストリップパッキング問題に対して，文献[11]で提案されているアニーリング法をIBM互換機（Pentium IV 2.4 GHz, 主記憶512 MB）上で実行した結果を示す．図7では，充填率87.43%の配置計画が計算時間2257秒で，図8では，充填率89.96%の配置計画が計算時間8588秒で求められている．

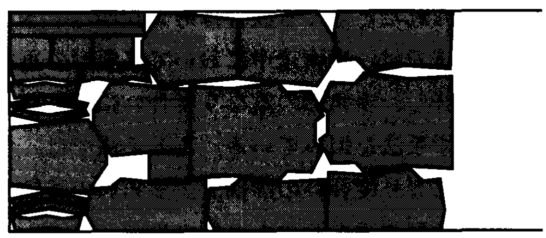

図7　ストリップパッキング問題の近似解（製品数24）

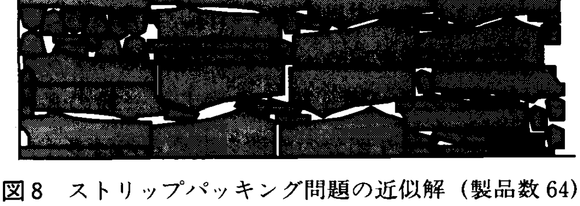

図8　ストリップパッキング問題の近似解（製品数64）

文献[11]では，実際の応用に近い4〜17種類，10〜99個の多角形を扱うストリップパッキング問題に対して数値実験を行っており，熟練者の配置計画に近い精度の解を求めている．

5．おわりに

本稿では，多角形詰込み問題の紹介と，いくつかの近似解法についての解説を行った．多角形詰込み問題には，本稿で紹介した他にも様々なアプローチに基づく手法が提案されているので，興味を持たれた方は文献[6]を参照いただきたい．

本シリーズでは，取り上げなかったが，切出し・詰込み問題には，円詰込み問題（circle packing problem），3次元コンテナ詰込み問題（container loading problem）などがあり，それぞれVLSI設計や物流を応用に持つ重要な問題である．上記の問題を含む，切出し・詰込み問題の最新の成果については，文献[19]にまとめられている．

切出し・詰込み問題は，多くの産業分野に応用を持つ問題であるばかりではなく，組合せ最適化や計算幾何の問題としても多くの面白い話題を含んでいる．本シリーズを通じて，切出し・詰込み問題に関わる話題に興味を持っていただければ幸いである．

謝辞　本稿の執筆に当たって貴重なコメントをいただいた柳浦睦憲博士と今道貴司氏に感謝します．

参考文献

[1] A. R. Babu and N. R. Babu, "A genetic approach for nesting of 2-D parts in 2-D sheets using genetic and heuristic algorithms", *Computer-Aided Design*, **33** (2001), 879-891.

[2] J. A. Bennell and K. A. Dowsland, "A tabu thresholding implementation for the irregular stock cutting problem", *International Journal of Production Research*, **37** (1999), 4259-4275.

[3] J. A. Bennell, K. A. Dowsland and W. B. Dowsland, "The irregular cutting-stock problem—a new procedure for deriving the no-fit polygon", *Computers and Operations Research*, **28** (2001), 271-287.

[4] J. A. Bennell and K. A. Dowsland, "Hybridising tabu search with optimisation techniques for irregular stock cutting", *Management Science*, **47** (2001), 1160-1172.

[5] J. Błażewicz, P. Hawryluk and R. Walkowiak, "Using a tabu search approach for solving the two-dimensional irregular cutting problem", *Annals of Operations Research*, **41** (1993), 313-325.

[6] K. A. Dowsland and W. B. Dowsland, "Solution approaches to irregular nesting problems", *European Journal of Operational Research*, **84** (1995), 506-521.

[7] K. A. Dowsland, S. Vaid and W. B. Dowsland, "An algorithm for polygon placement using a bottom-left strategy", *European Journal of Operational Research*, **141** (2002), 371-381.

[8] R. Heckmann and T. Lengauer, "A simulated annealing approach to the nesting problem in the textile manufacturing industry", *Annals of Operations Research*, **57** (1995), 103-133.

[9] R. Heckmann and T. Lengauer, "Computing closely matching upper and lower bounds on textile nesting problems", *European Journal of Operational Research*, **108** (1998), 473-489.

[10] A. M. Gomes and J. F. Oliveira, "A 2-exchange heuristic for nesting problems", *European Journal of Operational Research*, **141** (2002), 359-370.

[11] A. M. Gomes and J. F. Oliveira, "Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming", *European Journal of Operational Research*, in press.

[12] P. K. Ghosh, "A solution of polygon containment, spatial planning, and other related problems using Minkowski operations", *Computer vision, Graphics, and Processing*, **49** (1990), 1-35.

[13] Z. Li and V. Milenkovic, "Compaction and separation algorithms for non-convex polygons and their applications", *European Journal of Operational Research*, **84** (1995), 539-561.

[14] V. J. Milenkovic, "Rotational polygon overlap minimization and compaction", *Computational Geometry*, **10** (1998), 305-318.

[15] B. K. Nielsen and A. Odgaard, "Fast neighborhood search for the nesting problem", Technical Report No. 03/02, University of Copenhagen (2003).

[16] H. Okano, "A scaleline-based algorithm for the 2D free-form bin packing problem", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45** (2002), 145-161.

[17] J. F. Oliveira and J. S. Ferreira, "Algorithms for nesting problems", R. V. V. Vidal (ed.), *Applied Simulated Annealing*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, 396

(1993), 255-274.
[18] J.F. Oliveira, A.M. Gomes and J.S. Ferreira, "TOPOS—A new constructive algorithm for nesting problems", *OR Spektrum*, 22 (2000), 263-284.
[19] G. Wäscher, H. Haußner and H. Schumann, "An improved typology of cutting and packing problems", Working Paper 24, Faculty of Economics and Management, Guericke University Magdeburg (2004).