

観測数および銘柄数に依存した VaR の推定誤差に関する実証分析

佐々木 豊史, 宮崎 浩一, 野村 哲史

1. はじめに

多くの金融機関は、市場リスク管理をバリュー・アット・リスク (VaR) に基づいて行っている。VaR とは「所与の信頼水準 (分位点) と期間において、過去の市場リターンから想定される損失を測定する」ものである。VaR の測定に関しては、主に、(1)過去の市場リターンに基づく経験分布から分位点を求める方法、(2)正規分布のようなパラメトリック分布を仮定して、そのパラメータを過去の市場リターンから推定したうえで分位点を求める方法、の2通りがある。(1)の方法では、ポートフォリオのウエートや中身が変わるごとに VaR の測定を行う必要があり実務上現実的なアプローチではない。(2)に関してはどのようなパラメトリック分布を採用するかが重要となる。この点に関するパイオニア的な実証研究は、文献[8, 10]に遡り、市場リターンは正規分布と比較して、ファットテイル、高い尖度、等が確認されている。また、近年文献[2, 6, 7]では、一般化放物型分布族、特に NIG (Normal Inverse Gaussian) 分布を市場リスク管理に利用することが提案されており、文献[1]では、日本株式市場において正規分布と NIG 分布のどちらに基づく VaR が、より経験分布に基づく VaR に近いかに関する実証分析を行い NIG 分布の正確性を指摘している。しかしながら、一般化放物型分布族は多変量分布になった場合にそのパラメータ推定が計算負荷量の点から容易ではないため、現状では、VaR 測定のためのパラメトリック分布として実務上採用されていない。

本研究では実務上幅広く採用されている正規分布を所与の経験分布として採用する。正規分布を採用した

VaR の測定は、多くの金融機関において日常行われているが、VaR 自体の値への関心と比較すると、VaR の推定誤差に関する意識は相対的に低い。つまり、本日の VaR は 185 億円といったように、VaR があたかも一つの値であるかのように取り扱われている。しかし実際は過去の市場リターンに基づいて VaR を推定するのであるから VaR 自体にも信頼水準が生じるため、上記の例でいえば、正しくは VaR を 170 億円から 200 億円などと把握すべきである。このような VaR の推定誤差に関する研究は驚くほど少ない。このような指摘は、我々の調べた範囲では、文献[4, 5, 11]で理論的にされているに留まっており、実際の市場リターンを用いた実証分析は見当たらない。

そこで本研究では、VaR の推定誤差に関して、主に次の2点を明らかにするための実証分析を行う。第1点は、パラメトリック分布として正規分布を採用した場合でも VaR の推定誤差を考慮するならば、どの程度経験分布に基づく VaR を把握することができるのか？ それは、市場リターンの分位点の水準や観測データ数にどの程度依存するのか？ である。第2点は、ポートフォリオの市場リスク管理を行う場合、もしポートフォリオの銘柄数が多くなれば、パラメトリック分布として正規分布を採用した場合でも経験分布に基づく VaR を正確に把握できるのではないのか？ である。第2点の背景には、個別銘柄のリターン分布は文献[8, 10]が指摘するように極めて厚いテイルや尖度が確認されるが、銘柄数が増加するに従い中心極限定理が働いて、ポートフォリオのリターンは正規分布に比較的近くなるということが直感的に予想されることがある。

本論文の構成は、次の通りである。節2では、VaR の推定誤差に関する理論誤差を示し、本研究で利用する実測誤差を定義する。節3では、上記第1点を明らかにするために、VaR の推定誤差に関する実証分析手法を提案したうえで分析結果の検討を行う。節4では、第2点を考察するため、ポートフォリオの

ささき とよふみ, のむら さとし
電気通信大学 電気通信学研究科
〒182-0021 東京都調布市調布ヶ丘1-5-1
みやざき こういち
電気通信大学 電気通信学部
〒182-0021 東京都調布市調布ヶ丘1-5-1
受付 04.9.16 採択 05.1.20

銘柄数の増加に伴い、中心極限定理的な作用が働くかを検証する手法を提案したうえで分析結果を紹介する。節5では、まとめと結語を付す。

2. VaRの推定誤差について

リターン分布に正規分布を仮定しVaRを測定する際、リターン分布の標準偏差を標本推定によって与えるので、VaRがある一定の幅を持つものとする。そして、パラメトリック分布として正規分布を採用した場合でもVaRの推定誤差(標本数に依存する)を考慮するならば、どの程度経験分布に基づくVaRを把握することができるのか?について検証する。次で詳しく述べるが、リターンデータセットから推定される標準偏差の標準偏差に基づくVaRの推定誤差を理論誤差(式(3))と定義する。VaRの実測誤差は、著者等が定義するものであり、リターンデータセットのセットを用いたうえで、VaRの理論誤差の定数倍(式(5)、(6))における $K_{c,N}(1)$ 、 $K_{c,N}(2)$ として与えられる。

2.1 VaR_{c,N}の理論誤差について

観測数が N であるリターンデータセット j の分布を正規分布と仮定した $VaR_{c,N}^j$ はリターンデータ R_t の期待値と信頼水準 $c\%$ に応じた定数 α_c と、リターンデータ R_t から推定された標本標準偏差 $\hat{\sigma}_N^j$ との積の差で表す。VaRの計算方法はいくつかあるが、本研究では経験分布とパラメトリック分布との対比を行うため、式(1)の計算手法を用いている。

$$VaR_{c,N}^j = \sum_{t=1}^N R_t / N - \alpha_c \hat{\sigma}_N^j \quad (1)$$

$VaR_{c,N}^j$ の標本数に依存した推定誤差は $\hat{\sigma}_N^j$ の推定誤差

$$se(\hat{\sigma}_N^j) = \sigma \sqrt{\frac{1}{2N}} \quad (2)$$

に基づいて得られる。ここで、 σ はリターン分布の母標準偏差である。式(2)による標本標準偏差の標準偏差に関する詳細な議論は文献[9]を参照のこと。式(2)を用いて、VaRの理論誤差を次で与える。

$$se(VaR_{c,N}) = \alpha_c \cdot \sigma \sqrt{\frac{1}{2N}} \quad (3)$$

2.2 VaR_{c,N}の実測誤差について

$VaR_{c,N}^j$ の実測誤差を定義するに際しては、観測数が N であるリターンデータセット j のみならず、観測数 N のリターンデータセットを n セット考える。各データセット j 、($j=1, \dots, n$)に対して、 $VaR_{c,N}^j$ を求める。 $VaR_{c,N}^j$ は、データセット j に正規分布を仮定した場合の下側 $(100-c)\%$ の値を示す。これより、

データセット j の各リターンデータを小さい順に並べたものを $\mathbf{R}^j = (R_{(1)}^j, \dots, R_{(p)}^j, R_{(p+1)}^j, \dots, R_{(N)}^j)$ 、 $p = N \cdot (100-c)/100$ とし、 $VaR_{c,N}^j$ が $R_{(p)}^j$ と $R_{(p+1)}^j$ の間に入らない相対頻度を $VaR_{c,N}^j$ の推定誤差と捉える。 $VaR_{c,N}^j$ 自体の分布は正規分布であると仮定しているため、 $VaR_{c,N}^j$ の理論誤差は式(3)に示した通りであり、 $VaR_{c,N}^j$ の信頼区間は

$$VaR_{c,N}^j \pm se(VaR_{c,N}^j)$$

となる。各リターンデータセットが真に正規分布に従うなら、 $VaR_{c,N}^j$ の信頼区間の内点のいずれかが、 $R_{(p)}^j$ と $R_{(p+1)}^j$ の間に入る相対頻度が約68%(1標準偏差分)となる。ところが、実際の個別銘柄のリターン \mathbf{R}^j は正規分布に従わないことが多く、標本数による誤差に加えて、分布形による誤差も考えられる。そのため、 $VaR_{c,N}^j$ の実測誤差は式(3)で与えられるものとは異なり、通常、式(3)より大きくなる。そこで、 n 組のデータセットのなかで、 $VaR_{c,N}^j$ が $R_{(p)}^j$ と $R_{(p+1)}^j$ の間に入る相対頻度が約68%となるためには、実測誤差として $se(VaR_{c,N}^j)$ の何倍を見込めばよいか検証する。この倍数を乗数ファクター $K_{c,N}(1)$ と表す。同様に相対頻度が約95%(2標準偏差分)となるための乗数を $K_{c,N}(2)$ とする。リターンデータセット j に関する実測誤差をそれぞれ、式(5)、(6)で定義する。

$$K_{c,N}(1) \cdot se(VaR_{c,N}^j) \quad (5)$$

$$K_{c,N}(2) \cdot se(VaR_{c,N}^j) \quad (6)$$

また、データセット j に関する理論誤差と実測誤差を比較するための指標を式(7)、(8)とする。

$$d_1^j = |K_{c,N}(1) - 1| \cdot se(VaR_{c,N}^j) \quad (7)$$

$$d_2^j = |K_{c,N}(2) - 2| \cdot se(VaR_{c,N}^j) \quad (8)$$

d_1^j 、 d_2^j の大きさを指標とすることで、現実のリターン分布のテイル部分(信頼水準 $c\%$ が90%から99%まで1%刻み)が、推定誤差も加味したうえで正規分布からどの程度乖離しているかを把握することができる。

図1には、VaRの理論誤差と実測誤差との関係性を把握するために単純な例を示した。図を見やすくするために、 $VaR_{c,N}^j$ の信頼区間の片側だけを示している。図1にはデータセットとして、1から6まであり、データセット数 n が6に当たる。節1において示したように通常VaRをあたかも一つの値として捉えているため、各データセットのVaRは、式(1)で与えられることになる。これは、図1の実線(VaR)で示されている。データセット1、2については $VaR_{c,N}^j$ ($j=1, 2$)が $R_{(p)}^j$ と $R_{(p+1)}^j$ の間に入るため、この二つのデー

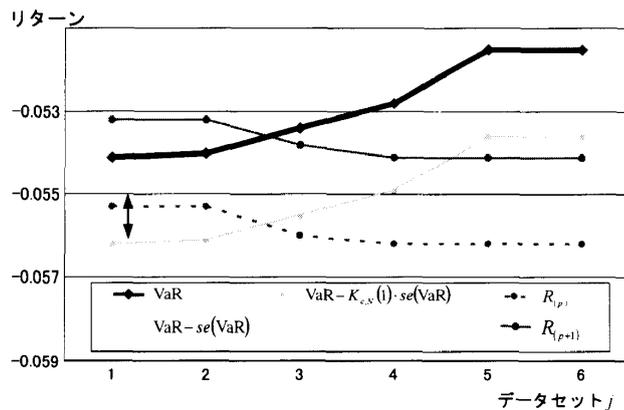


図1 理論誤差と実測誤差とその乖離 (d_1)

データセットに関しては、通常の VaR でもリスクを適切に把握しているが、残りの四つのデータセットに関してはリスクを適切に把握することができず、33% (6分の2) しかリスクを適切に評価していない。次に、通常の VaR に理論誤差を加味して、式(4)で VaR を認識する場合を考える。この場合、データセット 3 に関しては、式(4)の内点のいずれかが、 $R_{(p)}^3$ と $R_{(p+1)}^3$ の間に入るため、データセット 1, 2 に加えて、データセット 3 もリスクを適切に把握している。しかし、データセット 4, 5, 6 については、式(4)で VaR を認識してもリスクを適切に把握できず、50% (6分の3) しかリスクを適切に評価していない。最後に、実測誤差について考える。先に定義したように、実測誤差は理論誤差の乗数倍 ($K_{c,N}(1)$ 倍) で表す。乗数ファクター $K_{c,N}(1)$ を大きくすることで、VaR がリスクを適切に把握する相対頻度が増加する。図1では、 $VaR_{c,N}^j - K_{c,N}(1) \cdot se(VaR_{c,N}^j)$ によって実測誤差が表されている。このときデータセット 5, 6 を除くデータセット 1, 2, 3, 4 で $VaR_{c,N}^j \pm K_{c,N}(1) \cdot se(VaR_{c,N}^j)$ の内点が $R_{(p)}^j$ と $R_{(p+1)}^j$ の間に入っているため、約 67% (6分の4) 程度、リスクを適切に評価していることになる。勿論、実証分析においては、数値探索に基づいて乗数ファクター $K_{c,N}(1)$ を求めることになる。データセット j に関する実測誤差は式(5)で与えられるが、 $j=1$ の場合を図1に矢印で指した。

3. VaR の推定誤差に関する実証分析

ここでは VaR の推定誤差に関する実証分析手法と利用するデータを示したうえで、分析結果と考察を与える。

3.1 データと分析手法

まず、推定する $VaR_{c,N}^j$ は、観測数 N を 100, 200,

300 営業日とし、信頼水準 $c\%$ を 90%~99% の 1% 刻みとする。 $VaR_{c,N}^j$ の測定対象となる銘柄、ポートフォリオおよび指標は、東証一部に属する 1,339 の個別銘柄、業種ごとに構成される 33 種のポートフォリオおよび TOPIX である。データ期間は 1998 年 1 月 6 日から 2002 年 12 月 31 日までの日々の株価の終値を利用している。よって、観測数 100, 200 営業日のデータセットに関して、データセット数 n は 1,000 であり、観測数 300 営業日ではデータセット数 n は 900 となる。

分析手順

Step 1 節 3.1 に示したすべての株価データから日次リターンデータを算出する。

$$R_t = (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1} \quad (9)$$

ここで R_t , P_t はそれぞれ時点 t における日次リターンと株価である。リターンデータセットとしては、観測数 N を 100, 200, 300 営業日としたものを n セット構成する。データ期間の制約から各データセットはオーバーラップすることになる¹。 t 番目 ($1 \leq t \leq n$) のデータセットに関してみると、時点 $t-N+1$ から時点 t までのリターンとなる R_t から R_{t-N+1} までを小さい順に並び替えたものが一つのデータセット \mathbf{R}^j となる。

Step 2 各データセット \mathbf{R}^j に基づき、式(1), (3)からそれぞれ、観測数と信頼水準に応じた $VaR_{c,N}^j$ および $VaR_{c,N}^j$ の理論誤差を求める。また、節 2.2 で示した手法に基づいて実測誤差を計測する。

Step 3 各データセット \mathbf{R}^j に関して、式(5), (6)で与えられる実測誤差を求める。これらの実測誤差や Step 2 で求めた $VaR_{c,N}^j$ および $VaR_{c,N}^j$ の理論誤差は、いずれも信頼水準 $c\%$ 毎に n 個得られる。これら n 個の値に関する大きさを把握しやすいように n 個の期待値を取ったうえで図示した。つまり、図 2 から図 14 において

$$VaR = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n VaR_{c,N}^j$$

¹ オーバーラップしたデータセットを用いるため、データセット間で相関が生じる。式(2)で示している標本標準誤差の漸近的な理論推定誤差は、母分布から独立に取り出した標本の標準偏差に対する理論推定誤差である。このため、厳密には、オーバーラップしたデータセットを利用する場合、漸近的な理論推定誤差も相関のある標本の標準偏差に対する誤差で考えるべきではあるが、本研究では、実証分析を簡便に行うため、データがオーバーラップする影響が比較的小さいと想定される範囲として、観測数 300 営業日を上限として実証分析を行う。

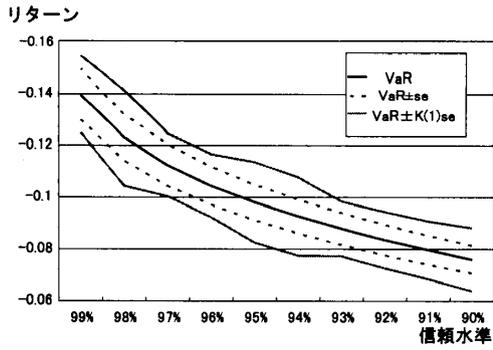


図2 VaR_{c,100}の推定誤差：パスコ

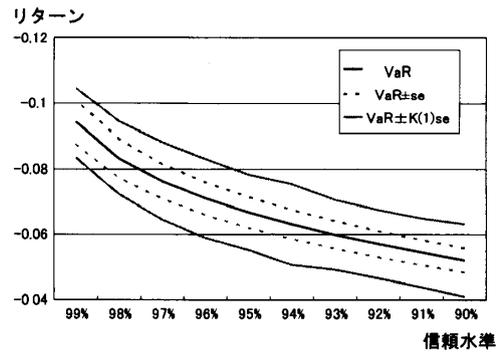


図6 VaR_{c,100}の推定誤差：アラビア石油

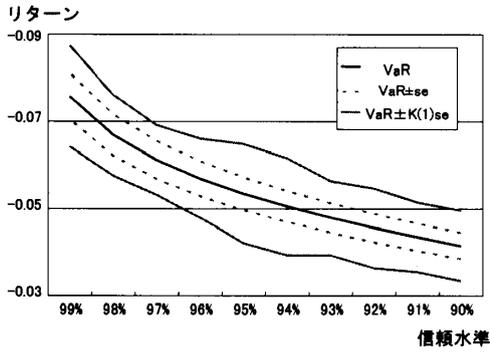


図3 VaR_{c,100}の推定誤差：コスモ石油

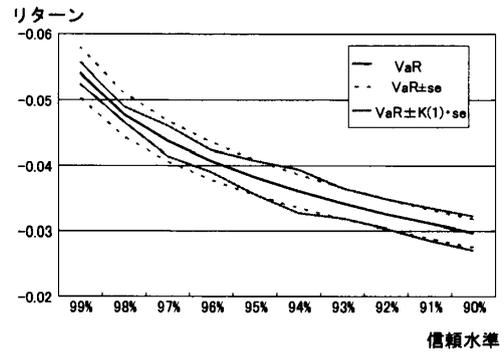


図7 VaR_{c,100}の推定誤差：損保ジャパン

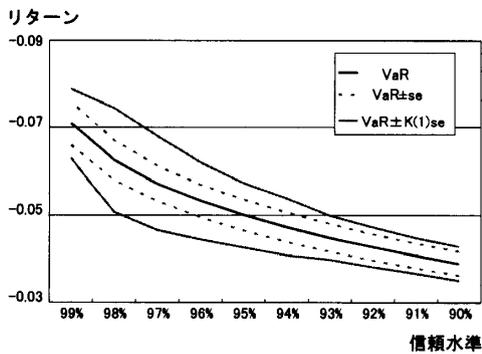


図4 VaR_{c,100}の推定誤差：ニチロ

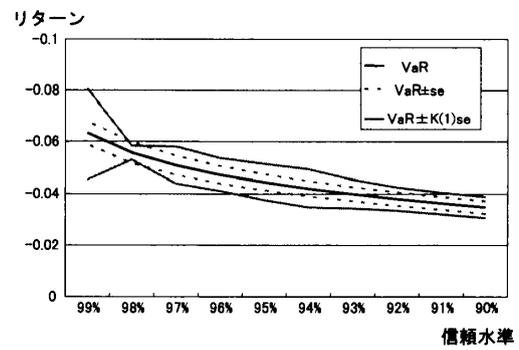


図8 VaR_{c,100}の推定誤差：空運業

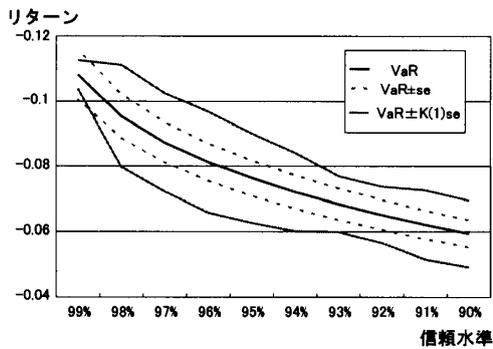


図5 VaR_{c,100}の推定誤差：日本テレコム

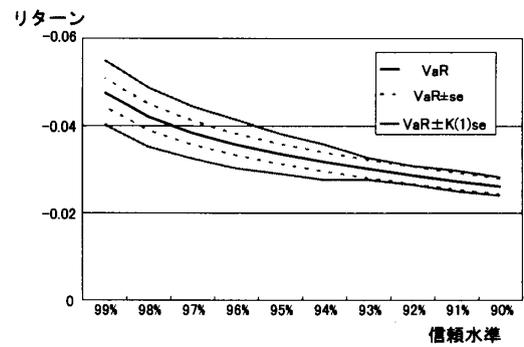


図9 VaR_{c,100}の推定誤差：石油石炭

$$\text{VaR} \pm se = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{VaR}_{c,N}^j \pm se(\text{VaR}_{c,N}^j)$$

$$\text{VaR} \pm K(1)se = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{VaR}_{c,N}^j + K_{c,N}(1)$$

をプロットした。

3.2 分析結果と考察

分析の目的は、「パラメトリック分布として正規分

布を採用した場合でも VaR の推定誤差を考慮するならば、どの程度経験分布に基づく VaR を把握することができるのか？ さらに、市場リターンの分位点の水準や観測データ数にどの程度依存するのか？」を検証することであった。そこで、これを評価するために、図2から図14において $VaR \pm se$ と $VaR \pm K(1)se$ を比較する。両者が近ければ近い程、パラメトリック分布に基づく VaR が経験分布に基づく VaR を適切に

把握していると判断できる。

紙面の都合上、数多く行った実証分析結果のほんの一例を紹介する。ここでは、観測数100営業日の $VaR_{c,100}$ の理論誤差と実測誤差（1標準偏差の大きさ）について、個別銘柄ではパスコ（空運業）、日本テレコム（通信業）、コスモ石油（石油石炭製品）、アラビア石油（鉱業）、ニチロ（水産農林業）、損保ジャパン（保険業）を、ポートフォリオとしてこれら個別企業が属する業種のポートフォリオを、指標として TOPIX を採り上げ、それぞれ、図2から図14に示した。ここで採り上げた業種は、その業種に属する銘柄数が少ない順に6業種である（表1参照）。このような業種を選択した理由は、TOPIX との構成銘柄数の相違を明確にするためである。

個別銘柄に関する $VaR_{c,100}$ の推定誤差は図2から図7によると、どの信頼水準 $c\%$ においても理論誤差と実測誤差の乖離が大きい企業が多く、どの信頼水準においても個別銘柄の実測誤差は理論誤差の1.5倍か

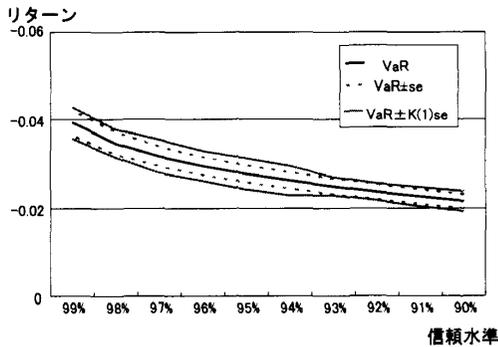


図10 $VaR_{c,100}$ の推定誤差：水産農林業

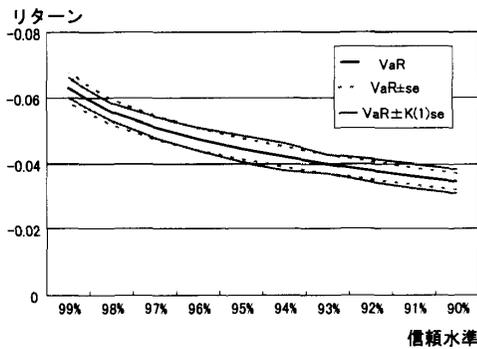


図11 $VaR_{c,100}$ の推定誤差：通信業

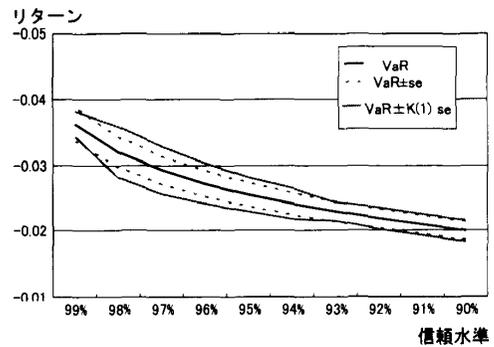


図13 $VaR_{c,100}$ の推定誤差：保険業

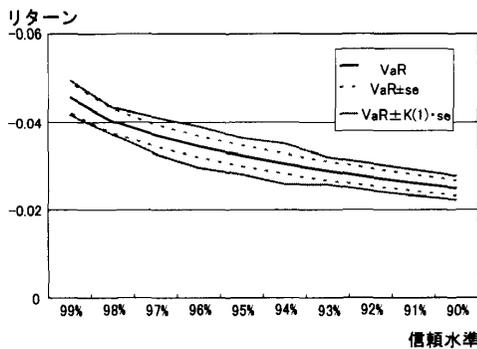


図12 $VaR_{c,100}$ の推定誤差：鉱業

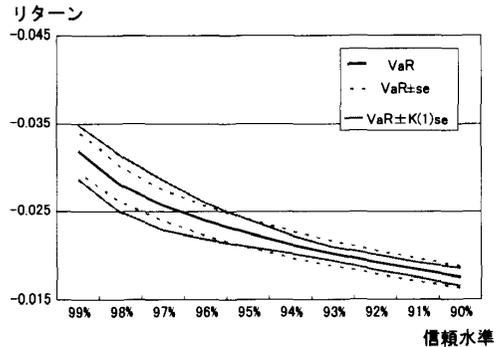


図14 $VaR_{c,100}$ の推定誤差：TOPIX

表1 対象とした各業種に所属する企業数

空運業	通信業	石油石炭製品	鉱業	水産農林	保険業	ゴム製品	パルプ紙	海運業	倉庫運輸関連業	電気ガス業
3	4	6	7	7	7	9	10	11	11	15
証券業	非鉄金属	不動産業	精密機器	その他金融業	ガラス土石製品	金属製品	医薬品	鉄鋼	陸運業	その他製品
17	20	20	22	25	26	31	33	34	34	40
輸送用機器	繊維製品	食料品	銀行業	サービス業	卸売業	小売業	機械	建設業	化学	電気機器
43	50	60	73	74	92	94	105	106	110	140

ら2倍程度となっている。偶然の結果ではあるが、実測誤差と理論誤差との乖離が最も小さくなる信頼水準が、理論誤差が最大になるはずの99%点となるような個別銘柄がいくつか見られた。観測数を100営業日とした場合には、他の個別銘柄に関しても大半は、どの信頼水準*c*%においても理論誤差と実測誤差の乖離は大きかった。図8から図13には、業種ポートフォリオに関するVaR_{c,100}の推定誤差を示した。多くの場合において、実測誤差の理論誤差からの乖離幅は個別銘柄のケースより小さく、図14に示すTOPIXのケースよりも大きいことが確認できる。33業種の推定誤差の乖離幅を検証したところ、概して信頼水準*c*%が90%に近いところで、実測誤差が理論誤差に近いことが確認できた。また、その乖離幅は、個別銘柄の乖離幅とTOPIXの乖離幅との間に位置するものであった。またTOPIXに関するVaR_{c,100}の推定誤差をみると(図14参照)、信頼水準*c*%が高いところでは、実測誤差と理論誤差に乖離が見られるが、信頼水準96%以下では理論誤差と実測誤差はおおむね一致していることが分かる。

先に述べたように、理論誤差は信頼水準*c*%が低下すると式(3)から明らかに小さくなるのであるが、個別銘柄に関する実測誤差では(図2から図7参照)、このような信頼水準*c*%とVaR_{c,100}の推定誤差との関係は確認できなかった。このような関係は、業種ポートフォリオに関してある程度みられ、TOPIXに関しては明確に確認された。

次に、パラメトリック分布として正規分布を採用した場合にVaRの推定誤差が、観測データ数にどの程度依存するのか? に関して検討する。表2は個別銘柄、業種、TOPIXについての観測数100, 200, 300営業日に関して、式(7)の*d*_iに関する平均を取った*d*₁ = $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_j$ を示している。表2からTOPIXに関して、観測数が増加するに従い、多くの信頼水準において*d*₁が減少することが確認できる。式(3)より観測数の増加によって理論誤差が減少することは自明であるので、乖離幅*d*₁が減少すること、もしくは変化しないことは実測誤差も小さくなっていることを示している。また、ここでは紙面の都合上掲載できないが、1,339個の個別銘柄に関する*d*₁は、大半がTOPIXに関する結果と比べ非常に大きいことが実証された。

表2 3種のリターンとそれぞれの観測数による*d*₁

		信頼水準									
		99%	98%	97%	96%	95%	94%	93%	92%	91%	90%
バスコ (×10 ³)		4.77	9.72	4.13	4.80	8.68	8.76	4.37	5.01	5.51	6.76
観測数100											
観測数200		27.98	2.45	18.87	21.40	22.17	27.50	25.17	23.40	22.43	21.80
観測数300		207.49	206.81	198.71	164.13	177.73	170.68	161.16	152.90	145.22	138.78
日本テレコム (×10 ³)		9.98	9.86	9.76	9.66	9.56	9.46	9.36	9.26	9.16	9.06
観測数100		3.28	8.89	8.96	9.73	8.34	6.99	3.72	4.08	6.20	6.02
観測数200		9.85	16.83	13.65	10.03	10.31	14.67	12.77	12.28	11.83	11.99
観測数300		40.36	40.40	40.40	48.15	48.13	42.45	39.10	34.96	34.59	34.78
コスモ石油 (×10 ³)		6.20	4.51	3.64	5.03	7.59	7.56	5.09	5.87	4.88	5.13
観測数100		10.85	8.62	8.05	13.89	13.19	11.70	9.98	10.34	9.16	8.94
観測数200		22.09	19.74	18.82	17.37	15.40	14.81	13.31	12.63	12.24	10.72
観測数300											
アラビヤ石油 (×10 ³)		4.00	5.13	6.43	7.14	6.85	7.99	6.46	6.43	6.64	7.46
観測数100		16.69	6.49	3.37	8.17	11.29	12.45	11.94	13.26	14.22	16.05
観測数200		32.42	13.16	9.24	14.24	17.96	17.44	20.19	21.05	24.26	22.98
観測数300											
ニチロ (×10 ³)		2.81	7.48	6.63	5.05	3.87	3.18	1.86	1.52	1.20	1.14
観測数100		11.10	12.05	9.39	7.33	6.37	6.38	4.81	4.86	4.12	3.90
観測数200		21.13	18.09	14.01	11.39	10.74	9.92	8.32	6.95	6.40	5.35
観測数300											
横浜ジャパン (×10 ³)		2.20	2.17	0.81	1.21	0.11	0.78	0.10	0.03	0.27	0.45
観測数100		0.31	1.48	0.85	0.35	0.49	0.53	0.21	0.67	0.58	0.68
観測数200		1.44	1.36	0.89	0.89	2.31	1.70	1.29	2.98	3.24	2.90
観測数300											
空運業 (×10 ³)		13.10	1.42	3.35	2.94	3.95	4.52	2.84	2.00	1.71	1.69
観測数100		6.92	3.72	11.13	10.45	10.81	8.80	7.15	7.77	7.72	7.09
観測数200		74.16	66.68	67.72	63.03	60.90	58.55	54.56	52.22	49.83	47.29
観測数300											
通信業 (×10 ³)		1.51	1.19	0.38	0.08	0.81	1.10	0.02	0.77	1.07	1.20
観測数100		2.47	0.22	1.42	1.24	2.80	2.26	1.95	2.26	1.82	2.25
観測数200		0.30	0.29	2.57	6.27	6.77	7.12	6.90	7.33	7.17	7.20
観測数300											
石油石炭 (×10 ³)		3.97	3.86	3.27	3.08	2.34	1.88	0.43	0.15	0.44	0.29
観測数100		5.55	6.23	5.41	4.36	3.44	3.30	1.96	2.14	1.73	1.25
観測数200		6.15	9.36	18.70	16.88	15.29	14.19	13.48	12.93	12.10	11.38
観測数300											
鉱業 (×10 ³)		0.53	0.27	1.73	2.26	1.73	2.26	0.92	1.07	1.04	0.93
観測数100		0.73	1.63	2.93	4.16	3.42	2.68	2.30	2.01	1.86	1.68
観測数200		0.43	2.76	3.62	5.03	5.03	4.63	3.57	3.45	3.12	3.21
観測数300											
水産農林 (×10 ³)		0.76	0.61	1.53	1.35	1.60	1.52	0.29	0.20	0.52	0.68
観測数100		2.50	0.69	1.24	2.02	3.11	3.70	2.61	2.43	1.85	2.08
観測数200		5.72	2.36	2.67	2.77	3.23	4.89	4.26	4.72	4.44	4.77
観測数300											
保険業 (×10 ³)		0.65	1.57	1.49	1.14	0.81	0.72	0.14	0.19	0.22	0.28
観測数100		3.69	2.42	1.48	1.28	2.64	2.90	2.03	2.65	2.48	2.35
観測数200		5.36	2.13	1.98	3.39	4.59	5.19	4.70	4.16	3.73	3.06
観測数300											
TOPIX (×10 ³)		0.80	1.21	1.07	0.40	0.09	0.47	0.64	0.48	0.45	0.26
観測数100		1.74	1.92	1.07	0.67	0.47	0.47	0.09	0.10	0.16	0.08
観測数200		2.12	0.92	0.08	0.05	0.24	0.15	0.11	0.14	0.06	0.04
観測数300											

4. ポートフォリオの銘柄数と中心極限定理

TOPIXに関するVaRの実測誤差は、業種別のVaRの実測誤差よりも小さく、さらに、業種別のVaRの実測誤差は個別銘柄のVaRの実測誤差よりも小さかったという節3の結果を踏まえると、VaRの実測誤差と理論誤差との乖離幅*d*_i(式(7)から導出)はポートフォリオの銘柄数の増加に伴い減少することが考えられる。つまり、個別銘柄のVaRに関しては、パラメトリック分布として正規分布を採用することに問題があったとしても(文献[8, 10]), 銘柄数が増加する場合には、実務上それほど大きな問題とならないことが考えられる。このことは、理論的に、大枠において中心極限定理的なものが動いているものと予想さ

れる。本節では、(1)実データに基づいて、大枠において中心極限定理的なものが働いているといえるか？(2)ポートフォリオの銘柄数と中心極限定理的なものの作用との関係、の2点に焦点を当てて実証分析を行う。

4.1 中心極限定理について

中心極限定理

X_1, X_2, \dots は、分布 F_1, F_2, \dots を持つ互いに独立な1次元確率変数であるとする。

$$E(X_k)=0, \text{VaR}(X_k)=\sigma_k^2 \quad (10)$$

と仮定し

$$s_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad (11)$$

と置く。適切な仮定の下で、規準化された和

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{s_n} \quad (12)$$

の分布は標準正規分布 $N(0, 1)$ に近づく。(詳しくは文献[12]参照のこと)。本研究では、中心極限定理における確率変数 S_n は正規化した各ポートフォリオのリターンであり、 $X_j (j=1, \dots, n)$ は、各銘柄の日次リターンを表している。

4.2 データと分析手法

分析の目的が個別銘柄のリターンとしては正規分布から大きく乖離していても、銘柄数を増加させると正規分布に近づくかを検証することであるから、個別銘柄のプールとして、リターンが正規分布から大きく乖離したものを150銘柄抽出しておく。この150銘柄は、観測数300営業日での信頼水準99%における $K_{c,n}(1)$ が6以上のものである。

分析手順

Step 1 150銘柄の中からランダムに銘柄を選び出す。このときの銘柄数は1銘柄、2銘柄と5銘柄以上は125銘柄まで5の倍数の銘柄を採用し、計27種類のポートフォリオを作成する。

Step 2 27種類のポートフォリオについて節3.1に示した手順によって d_1^i, d_2^i を求める。

Step 3 説明変数を銘柄数の対数値とし、非説明変数を d_1^i もしくは d_2^i として回帰分析を行う。回帰式は次のとおりである。

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon \quad (13)$$

ここで y は d_1^i もしくは d_2^i を表し、 x はそれぞれのポートフォリオによる銘柄数の対数値を表す。

4.3 分析結果と考察

図15は観測数100営業日、信頼水準96%点による $\text{VaR}_{96,100}^i$ から算出された d_1^i と、ポートフォリオの銘柄数の対数値における回帰分析結果を示している。こ

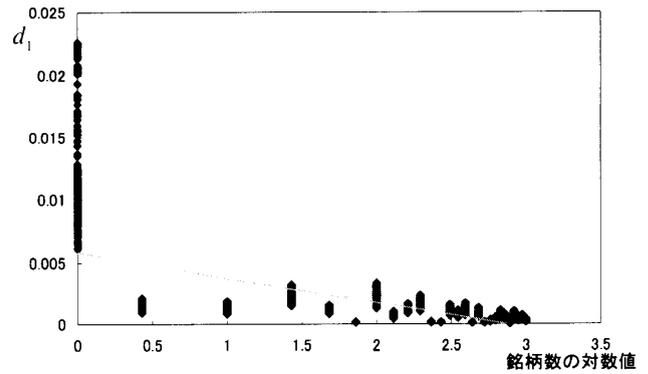


図15 銘柄数と d_1 による回帰分析結果

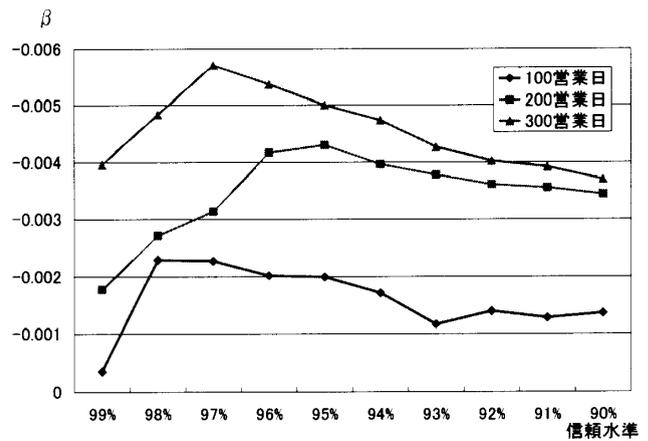


図16 それぞれの観測数と信頼水準による回帰係数(1)

の結果から銘柄数が少なければ、理論誤差と実測誤差の乖離を表す d_1^i は大きく、銘柄数の増加によって d_1^i が小さくなることが確認できる。図15に関して回帰係数の t 値は -134.5 であり、その値は -0.00202 と負の値を取ることから、VaRに関してポートフォリオの銘柄数による中心極限定理的な作用の存在を確認できるとともに、銘柄数の増加によって推定誤差の乖離も小さくなることが確認できる。今回の実証では、1銘柄の場合、推定誤差の乖離の最大と最小の差は0.017であるが、125銘柄では0.0028となり銘柄数の増加による影響が推定誤差の乖離にもあることが分かる。

図16は30通り(観測数3通り、信頼水準10通り)の $\text{VaR}_{c,n}^i$ から算出される d_1^i と観測数について、図17は d_2^i と観測数についての回帰係数をプロットしたものである。図16によると、30通りすべての $\text{VaR}_{c,n}^i$ に関して、回帰係数 β は負である。100営業日では回帰係数 β は全体的に緩やかであり、観測数の増加に伴い、回帰係数 β は大きくなることを確認できる。また、信頼水準が99%の場合には回帰係数 β はその他の信頼水準よりも小さい傾向がある。信頼水準99%点に関しては図14で確認したように、

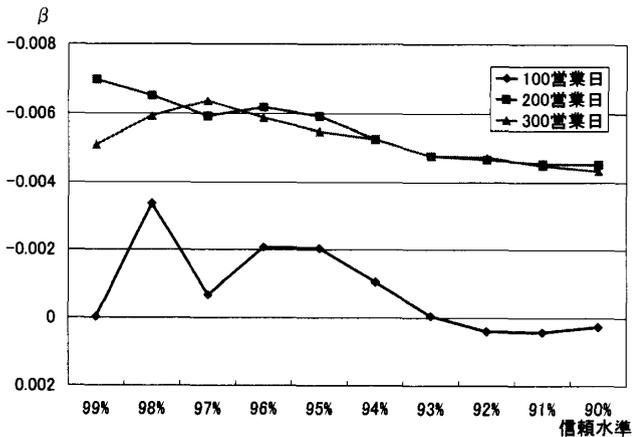


図 17 それぞれの観測数と信頼水準による回帰係数(2)

TOPIX のリターン分布であってもパラメトリック分布として正規分布を利用することに問題点があるため、このような結果が得られたと考えられる。図 17 から、100 営業日に関しては、信頼水準 90, 91, 92%において回帰係数 β が正の値をとる結果となり、 $VaR_{c,N}^2$ の 2 標準偏差点においては中心極限定理な作用を確認することはできなかった。しかし、残りの 27 通りの分析結果においては、回帰係数 β がすべて負の値となっているため、中心極限定理的な作用を確認することができる。また、2 標準偏差点においては、観測数 200, 300 営業日に関する回帰係数 β に差はなく、中心極限定理的な作用の強さが同程度であるという結果となった。

5. まとめ

本研究では、リターン分布での標準偏差の推定誤差に着目し、この推定誤差を考慮した VaR の利用を提案した。本研究の第 1 の視点において、ポートフォリオの銘柄数を増加させることや観測数の増加によって理論誤差と実測誤差との乖離が小さくなることが確認でき、利用する信頼水準 $c\%$ が 95% 以下であれば VaR に幅を持たせることで、リターン分布に正規分布を仮定しても概ね問題ないことが分かった。

第 2 の視点であるポートフォリオの銘柄数と VaR の推定誤差の関係について回帰分析を利用して検証したところ、銘柄数の増加による中心極限定理的な作用が確認できた。よって、VaR の推定誤差はポートフォリオの銘柄数に大きく依存するという第 1 の視点を支持する結果となった。

しかし、実務における市場リスク管理の観点からは、1996 年 1 月にバーゼル銀行監督委員会から公表された文献[3]で提示されている水準である 99% といった

大きな信頼水準で VaR を計測することが必要不可欠であり、パラメトリック分布として正規分布を採用すると、推定誤差を考慮しても不十分な場合があるため、注意が必要である。

謝辞 初稿における不十分な分析内容や表現を指摘した上で、改善の方向性をご教示くださった二人の匿名の査読者には、この場をかりて心から感謝いたします。

参考文献

- [1] 宮崎浩一, 中尾司: 「正規分布と NIG 分布”, “日次と週次” 日本株式市場におけるリスク管理とオプション評価」高橋一, 池田昌之編『ジャフイー・ジャーナル 2003: 金融工学と資本市場の計量分析』, 149-183, 2003.
- [2] Barndorff-Nielsen, O. E.: “Processes of Normal Inverse Gaussian Type,” *Finance & Stochastics*, 2, pp. 41-68, 1995.
- [3] Basel Committee on Banking Supervision: “Overview of the Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks,” Bank for International Settlements, January 1996.
- [4] Dowd, K.: “Assessing VaR Accuracy,” *Derivatives Quarterly*, March, pp. 61-63, 2000 a.
- [5] Dowd, K.: “Estimating Value at Risk: A Subjective Approach,” *Journal of Risk Finance*, Summer, pp. 43-46, 2000 b.
- [6] Eberlein, E. and U, Keller: “Hyperbolic Distributions in Finance,” *Bernoulli*, pp. 281-299, 1995.
- [7] Eberlein, E., U, Keller and K, Prause: “New Insights into Smile, Mispricing and Value at Risk: The Hyperbolic Model,” *Journal of Business*, 71, pp. 371-405, 1998.
- [8] Fama, E. F.: “Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis,” *Journal of Business*, 36, pp. 420-429, 1963.
- [9] Kendall, M.: “Kendall’s Advanced Theory of Statistics,” Halsted Press, New York, 1994.
- [10] Mandelbrot, B.: “The variation of certain speculative prices,” *Journal of Business*, 36, pp. 394-419, 1963.
- [11] Philippe, J.: *Value at Risk*, 2nd ed., McGraw-Hill (杉本正隆訳: “新版 バリュエアットリスクのすべて”, シグマベイスキャピタル, 2003).
- [12] William, F.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 1st ed., John Wiley & Sons, Inc., New York (国沢清典監訳: “確率論とその応用 II 上”, 紀伊国屋書店, 1969).