OR研究の最前線

切出し・詰込み問題とその応用 —(1) 1次元資材切出し問題—

梅谷　俊治，今堀　慎治

1. はじめに

いくつかの対象物を互いに重ならないように与えられた領域内に配置する問題は切出し・詰込み問題と呼ばれ，多くの分野に応用を持つ代表的な生産計画問題の一つである．この問題は，対象物や領域の次元，形状，配置制約，目的関数等により非常に多くのバリエーションを持つことが知られている[2]．本稿では，代表的な切出し・詰込み問題である，1次元資材切出し問題，長方形詰込み問題，多角形詰込み問題について3回にわたり解説する．

1次元資材切出し問題（one-dimensional cutting stock problem）は，定型の母材から様々な長さの製品を顧客の注文に応じて切出す計画を求める問題であり，鉄鋼・製紙・繊維などの素材産業をはじめとする多くの分野に応用を持つ代表的な組合せ最適化問題の一つとして知られている[2]．素材産業では，歩留りの向上，つまり余剰素材の削減が最も重要な課題である．古典的な1次元資材切出し問題は，使用する母材の本数を最小にする板材の取合せを求める問題として定式化され，Gilmore と Gomory による列生成法（column generation method）[6, 7]によって，大規模問題の良い近似解が短時間で求まることが知られている．

しかし，実際の素材産業では，単に余剰素材の削減だけで製造コストが抑えられるわけではない．近年では，切出し工程の段取り替え作業にともなうコストや，切出された製品を一時的に積み上げておく空間の削減が重要な問題として注目されつつあり，これらの問題に対する研究が盛んに行われている．

本稿では，まず使用する母材の本数を最小化する1次元資材切出し問題に対する Gilmore と Gomory の列生成法を解説した後に，段取り替え回数の削減を考慮した定式化と解法について解説する．また，切出し工程の間に一時的に積み上げられる製品の種類数を削減する取合せ順を求めるパターン並び替え問題の定式化と解法について解説する．

うめたに　しゅんじ
豊田工業大学 大学院工学研究科
〒468-8511 名古屋市天白区久方 2-12-1
いまほり　しんじ
東京大学 大学院情報理工学系研究科
〒113-8656 文京区本郷 7-3-1

2. 線形計画問題による定式化と列生成法

ある鉄鋼会社が，長さ L の大きな板材（母材）を市場に提供していると想定する．しかし，顧客の注文はもっと短い板材である．長さ $l_1, l_2, \cdots, l_m$ の板材を $d_1, d_2, \cdots, d_m$ 本ずつ生産する必要が生じた時に，なるべく少ない本数の母材を用いて顧客の注文をすべて満たす切出し計画を求める問題が，1次元資材切出し問題である(図1)．

まず，カッティングパターン（以後，パターンと略す）と呼ばれる1枚の母材から切出される短い板材の組合せを考える．パターン p_j に含まれる板材 i の数を a_{ij} とすると，各パターン $p_j=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})$ が満たすべき条件は，次の通りに記述できる．

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} l_i \leq L. \tag{1}$$

例えば，長さ $L=70$ の母材から，長さ $l_1=17$ の板材3枚と長さ $l_2=15$ の板材1枚を切出すパターンは $p=(3, 1, 0, \cdots, 0)$ と表せ，条件(1)を満たす．

ここで，条件(1)を満たすすべてのパターンを $p_1, p_2, \cdots, p_n$ とし，変数 x_j を各パターン p_j の切出し回数と

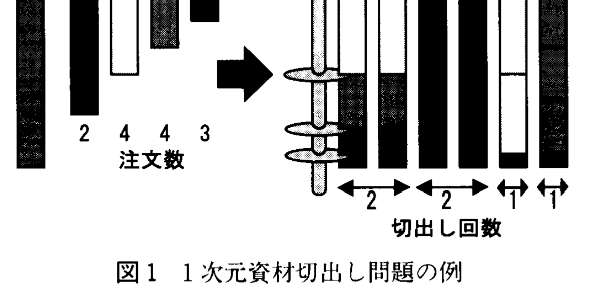

図1　1次元資材切出し問題の例

すると，1次元資材切出し問題は次に示す整数計画問題として定式化できる．

(1 DCSP)

$$\text{最小化} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{2}$$

$$\text{条　件} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq d_i \quad (i=1, \cdots, m) \tag{3}$$

$$x_j \in \boldsymbol{Z}_+ \quad (j=1, \cdots, n). \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{Z}_+$ は非負整数を表す．

実際に解きたいのは整数計画問題であるが，各板材の注文数 d_i がある程度大きければ，各パターンの切出し回数 x_j の整数条件を緩和して得られる線形計画問題を解いて，得られた実数最適解を適当な方法で整数値に丸めることで，実用的には十分に精度の高い解となる．しかし，板材の種類数 m が比較的小さい場合でも，条件(1)を満たすパターンの数 n は莫大になるため，これらすべてのパターンを列挙してから解いたのでは，高速な線形計画ソルバを用いても現実的な計算時間で解くことは困難である．そこで，Gilmore と Gomory はすべてのパターンをあらかじめ列挙するのではなく，少数のパターンからなる実行可能解から始めて，現在の実行可能解を改善するパターンのみを逐次生成する列生成法 (column generation method) を提案し，これを改訂シンプレックス法に組み込むことで，上記の1次元資材切出し問題が効率良く解けることを示した．

初期実行可能解を見つけるのは簡単である．長さ l_i の板材 $\lfloor L/l_i \rfloor$ 本だけからなるパターンを p_i と定めれば，パターン $p_1, p_2, \cdots, p_m$ からなる行列は，線形計画問題に対する実行可能な基底行列となる．したがって，以降では，パターン $p_1, \cdots, p_k (k \geq m)$ に対する線形計画問題の最適基底解が得られていると仮定し，そこに新たなパターン p' を加える場合を考える．この線形計画問題の双対問題は

(DLP)

$$\text{最大化} \quad \sum_{i=1}^{m} d_i y_i \tag{5}$$

$$\text{条　件} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq 1 \quad (j=1, \cdots, k) \tag{6}$$

$$y_i \geq 0 \quad (i=1, \cdots, m) \tag{7}$$

と表され，パターン $p_1, \cdots, p_k$ は条件(6)に対応している．問題 (DLP) の最適解を $y^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)$ とすると，$\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_i' > 1$ を満たすパターン $p' = (a_1', a_2', \cdots, a_m')$ に対応する制約条件は問題 (DLP) の実行可能領域を通るため，パターン p' を加えて問題 (DLP) を解き直すと最適値を改善できる．双対定理より，線形計画問題と双対問題の最適値は一致するため，パターン p' を加えて線形計画問題の最適値も改善できることが分かる (図2)．

ここで，すべてのパターン $p_j \in \{p_{k+1}, \cdots, p_n\}$ に対して $\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij}$ を計算しなければ，上記の判定ができないように思える．しかし，次の整数ナップサック問題

(KP)

$$\text{最大化} \quad \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_i' \tag{8}$$

$$\text{条　件} \quad \sum_{i=1}^{m} l_i a_i' \leq L \tag{9}$$

$$a_i' \in \boldsymbol{Z}_+ \quad (i=1, \cdots, m) \tag{10}$$

を解くことでこの計算が実現できる．つまり，問題 (KP) の最適解 $p^* = (a_1^*, a_2^*, \cdots, a_m^*)$ について，$\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_i^* \leq 1$ であれば，$p_{k+1}, \cdots, p_n$ のいずれのパターンを加えても線形計画問題の最適値を改善できないことが分かる．また，$\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_i^* > 1$ であれば，パターン p^* を加えて線形計画問題の最適値を改善できる．

上記の整数ナップサック問題は，母材の長さ L と各板材の長さ l_i が整数であれば，0-1 ナップサック問題と同様に動的計画法で解ける．母材の長さ L を v で置き換えたときのナップサック問題の最適値を $f(v)$ で表す．このとき，$l_{\min} = \min_{i=1,\ldots,m} l_i$ とすれば，$0 \leq v < l_{\min}$ に対して $f(v)=0$ となる．ナップサック問題の最適値 $f(L)$ は，$v = l_{\min}, \cdots, L$ の順に漸化式

$$f(v) = \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ l_i \leq v}} \{f(v - l_i) + y_i^*\}, \tag{11}$$

を使って求めることができる．列生成法によって新たに生成されるパターンの総数は，改訂シンプレックス法の反復回数と同じなので，多くの場合，板材の数 m の数倍程度で抑えられる．

線形計画問題を解いて得られる下界値と整数最適値とのギャップについては，文献[9]などの研究があり，1次元資材切出し問題のあるクラスに対して，このギャップが1未満になることが知られている．また，文献[15]では，様々な整数丸め手法について検討を行い，

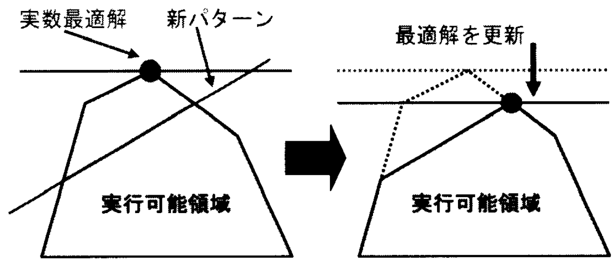

図2　列生成法による新たなパターンの追加

多くの例題においてこのギャップが極めて小さくなることを数値実験により確かめている．整数最適解を求める厳密解法に関しては，文献[12, 13]などの列生成法を用いた分枝限定法がある．

3. 段取り替え数の削減を考慮した1次元資材切出し問題

実際の製造業では，業種により最小化すべき費用が異なったり，操業の都合から様々な制約が生じるため，前節の定式化では取扱えない問題が多い．特に，パターン切替えにともなう段取り替え費用の削減は，製造業における重要な問題の一つである．

素材産業では，パターンが切り替わるごとに板材を切出すカッターの位置を再設定する段取り替え作業を行う必要がある．素材によっては，段取り替えは数時間に及ぶ非常に手間のかかる作業となり，ラインの稼働率が低くなる．また，ラインを稼動させたままカッターの位置を再設定する場合では，再設定中に斜めに切出された素材は無駄な部分となり，余分な製造コストが生じる．ところが，前節で説明した列生成法に基づく解法では線形計画問題の最適基底解を求めるため，退化が起こらない限り常に m 本のパターンを使用する切出し計画が出力され，とても効率が良いとは言えない．

そこで，近年では，段取り替え回数の削減を考慮した1次元資材切出し問題の様々な定式化や解法が提案されている．

3.1 発見的解法

段取り替えの回数が少ない切出し計画では，各パターンの切出し回数が比較的大きくなる．文献[8]では，この性質を利用して切出し回数が大きく取れるパターンを逐次生成するSHP (sequential heuristic procedure) と呼ばれる発見的解法を提案している．

SHPでは，空のパターン集合から始めて，すべての板材の注文が満たされるまで，条件(1)および次の条件(12)，(13)をともに満たすパターン $p_j=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})$ を逐次追加していく．

$$L-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} l_i \leq \mathrm{MAXTL}, \tag{12}$$

$$\frac{d'_i}{a_{ij}} \geq \mathrm{MINU} \quad (a_{ij}>0, d'_i>0, i=1, \cdots, m), \tag{13}$$

ここで，MAXTL，MINUは，それぞれパターン p_j の切残し長の上限値および切出し回数 x_j の下限値を表すパラメータである．また，d'_i は $j-1$ 番目のパターンを切出した時点での板材 i の残り注文数であり，パラメータMINUは残り注文数 d'_i を用いて

$$\mathrm{MINU}=\frac{\alpha \sum_{i=1}^{m} d'_i l_i}{L}, \tag{14}$$

と設定される．ここで，α は0.5～0.9の適当な値に設定する．列挙法で各パターンの生成を行う．まず，各板材 i を残り注文数 d'_i の降順に整列しておく．条件(1)および，すべての板材 i に対して $a_{ij} \leq d'_i$ を満たすパターンを辞書式順に列挙し，条件(12)，(13)をともに満たすパターンが見つかった時点でそれを出力する．もし，条件を満たすパターンがなければ，MINU := MINU−1として再び条件を満たすパターンを探索する．もし，MINU≥1に対して条件を満たすパターンが見つからなければ，列挙したパターンの中で切残し長の最も短いパターンを出力する．生成されたパターン p_j の切出し回数 x_j は

$$x_j=\min_{\substack{i=1,\cdots,m \\ a_{ij}>0, d'_i>0}} \left\lfloor \frac{d'_i}{a_{ij}} \right\rfloor, \tag{15}$$

とする．

文献[5]では，パターン併合法 (pattern combination heuristic) を提案している．パターン併合法は，段取り替えを考慮しない問題 (1DCSP) を解いて得られた解を初期解とする．現在の解から適当にいくつかのパターンを選び，使用する母材の本数が増えないように，選んだパターンを併合して新たな解を生成する．この手続きを繰返し行うことで，段取り替え回数を削減する．

例えば，長さ $L=4500$ の母材から長さ $l_1=2150$，$l_2=2100$ の製品を切出す問題を考える．ここで，各板材の注文数は，それぞれ $d_1=2$，$d_2=2$ とする．この問題に対して，二つのパターン $p_1=(2, 0)$, $p_2=(0, 2)$, $x_1=1, x_2=1$ からなる解を考える．このパターン p_1, p_2 は使用する母材の本数を増やすことなく，新たなパターン $p'=(1, 1), x'=2$ に置き換えることができる．

二つのパターン p_1, p_2 およびそれらの切出し回数 x_1, x_2 が与えられているとする．この時，新たなパターン $p'=(a'_1, a'_2, \cdots, a'_m)$ およびその切出し回数 x' は，

$$a'_i=\frac{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2}{x'} \quad (i=1, \cdots, m) \tag{16}$$

$$x'=x_1+x_2 \tag{17}$$

で与えられ，パターン p' に含まれる各板材 i の数 a'_i がすべて非負整数ならば，パターン p_1, p_2 を併合して新たなパターン p' を得る．三つのパターン p_1, p_2, p_3 を併合して二つのパターン p'_1, p'_2 を得ることは容易で

はないが，文献[5]では，パターン p'_1, p'_2 の切出し回数 x'_1, x'_2 が，

$$x'_1=x_1,\ x'_2=x_2+x_3 \tag{18}$$

$$x'_1=x_2,\ x'_2=x_1+x_3 \tag{19}$$

$$x'_1=x_3,\ x'_2=x_1+x_2, \tag{20}$$

のいずれかの値を取る併合のみを考え，列挙法を用いて可能な併合を探索している，また，四つのパターンを三つのパターンに併合する手続きも提案している．

3.2 厳密解法

文献[14]では，与えられた使用母材本数の下で段取り替え回数を最小化するパターン数最小化問題（pattern minimization problem）に対して分枝カット法を提案している．条件(1)を満たす全てのパターンを $p_1, \cdots, p_n$ とし，z^{UB} を使用できる母材本数の上限，λ_{jk} を各パターン p_j を k 回切出すとき1，そうでないとき0となる0-1変数とすると，パターン数最小化問題は次に示す0-1計画問題として定式化できる．

(PMP)

$$\text{最小化}\quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{u(p_j)}\lambda_{jk} \tag{21}$$

$$\text{条　件}\quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{u(p_j)}ka_{ij}\lambda_{jk}=d_i\quad(i=1,\cdots,m) \tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{u(p_j)}k\lambda_{jk}\leq z^{\mathrm{UB}} \tag{23}$$

$$\lambda_{jk}\in\{0,1\}$$
$$(j=1,\cdots,n,\ k=1,\cdots,u(p_j)). \tag{24}$$

ここで，

$$u(p_j)=\min_{\substack{i=1,\cdots,m\\ a_{ij}>0}}\left\lfloor\frac{d_i}{a_{ij}}\right\rfloor, \tag{25}$$

であり，また，条件(22)はすべての板材 i の注文を過不足なく満たす条件となっている．問題（1 DCSP）の場合と同様に，条件(1)を満たすパターンの数 n は莫大になるため，列生成法によってパターンを逐次生成する必要がある．問題（PMP）の整数制約を緩和して得られる線形計画問題の双対問題を考えると，変数 λ_{jk} に対応する制約条件は，

$$k\left(\sum_{i=1}^{m}\pi_i a_{ij}-\sigma\right)\leq 1, \tag{26}$$

と表される．ここで，π_i および σ はそれぞれ問題（PMP）の条件(22)，(23)に対応する双対変数である．双対問題の最適解を $\pi^*=(\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots, \pi_m^*), \sigma^*$ とすると，式(26)の左辺を最大化するパターン $p'=(a'_1, a'_2, \cdots, a'_m)$ およびその切出し回数 k' を求める問題は，次の2次整数計画問題として定式化できる．

(QIP)

$$\text{最大化}\quad k'\left(\sum_{i=1}^{m}\pi_i^* a'_i-\sigma^*\right) \tag{27}$$

$$\text{条　件}\quad \sum_{i=1}^{m}l_i a'_i\leq L \tag{28}$$

$$k'a'_i\leq d_i\quad(i=1,\cdots,m) \tag{29}$$

$$a'_i\in \boldsymbol{Z}_+\quad(i=1,\cdots,m) \tag{30}$$

$$k'\in\boldsymbol{Z}_+. \tag{31}$$

ここで，k' の最大値 $k_{\max}$ は，

$$k_{\max}=\min\left\{z^{\mathrm{UB}},\ \max_{i=1,\cdots,m}d_i\right\}, \tag{32}$$

で抑えられるので，各 $k'=1,\cdots,k_{\max}$ について，次の整数ナップザック問題

(KP′)

$$\text{最大化}\quad \sum_{i=1}^{m}\pi_i^* a'_i \tag{33}$$

$$\text{条　件}\quad \sum_{i=1}^{m}l_i a'_i\leq L \tag{34}$$

$$a'_i\leq\min\left\{\left\lfloor\frac{L}{l_i}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{d_i}{k}\right\rfloor\right\}$$
$$(i=1,\cdots,m) \tag{35}$$

$$a'_i\in\boldsymbol{Z}_+\quad(i=1,\cdots,m), \tag{36}$$

を解くことで，問題（QIP）の最適解が求められる．文献[14]では，上記の列生成法を基にいくつかの切除平面を加えることで効率良い分枝カット法を実現している．

3.3 メタ戦略

文献[10，11]では，パターン最小化問題（PMP）とは逆に，与えられた段取り替え回数の下で，使用する母材の本数を最小化するパターン数制約付き問題（pattern restricted problem）に対してメタ戦略を提案している．使用できるパターン数の上限を n^{UB} とすると，パターン数制約付き問題は次の通りに定式化できる．

(PRP)

$$\text{最小化}\quad \sum_{p_j\in\Pi}x_j \tag{37}$$

$$\text{条　件}\quad \sum_{p_j\in\Pi}a_{ij}x_j\geq d_i\quad(i=1,\cdots,m) \tag{38}$$

$$\Pi\subseteq P \tag{39}$$

$$|\Pi|\leq n^{\mathrm{UB}} \tag{40}$$

$$x_j\in\boldsymbol{Z}_+\quad(\forall p_j\in\Pi). \tag{41}$$

ここで，P は条件(1)を満たすすべてのパターンからなる集合，Π は使用されるパターンからなる集合である．

問題（PRP）は，問題（1 DCSP）にパターン数制約(40)を加えた単純な拡張であり，文献[6，7]の列生成法を用いれば効率良く解けるように思われる．しかし，

パターン数制約(40)を満たすために，現在の実行可能解に新たなパターンを加える一方で，現在の解に含まれるパターンを除く必要がある．そのため，問題（KP）を解いて $\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_i^* > 1$ となるパターン p^* を生成しても，それが必ずしも現在の解を改善しないという問題が生じる．

文献[10, 11]では，局所探索法を用いてパターン数制約を満たす実行可能解の探索を実現している．局所探索法は，現在の解の一部を変化させて得られる解集合（これを近傍と呼ぶ）の中に改善解があれば，現在の解を改善解に置き換える操作を，近傍内に改善解がなくなるまで繰返し行う手法である．

通常，局所探索法を 1 回適用しただけでは良い精度の解は得られないので，過去の探索履歴を利用したり，一定の確率で改悪解への移動も許容するなど，様々な戦略を組合せることで，より効率良い探索を実現するメタ戦略と呼ばれる枠組みが用いられる（メタ戦略については文献[16]を参照）．

文献[11]では，板材 i をパターン p_j に一つ追加した後に別の板材 $i'(\neq i)$ を削除して新たなパターン p'_j を生成する操作と，板材 i をパターン p_{j_1} からパターン p_{j_2} に移動した後に，別の板材 $i'(\neq i)$ をパターン p_{j_2} からパターン p_{j_1} に移動，もしくはパターン p_{j_2} から削除して新たなパターン p'_{j_1}, p'_{j_2} を生成する操作を適用して得られる解の集合を近傍としている（図 3）．

また，使用パターン集合 Π が与えられた際に，各パターン $p_j \in \Pi$ の切出し回数 x_j を求める問題は，整数計画問題として定式化できるが，整数条件を緩和して得られる線形計画問題を解いて，得られた実数最適解を適当な方法で丸めて整数解を求めている．

文献[10, 11]では，この他に線形計画法の性質を利用した高速化を実現しており，少ない段取り替え回数でも精度の高い解が得られることを数値実験で示している．

図 4，5 に，板材が 38 種類の 1 次元資材切出し問題に対して文献[6, 7]の列生成法に基づく線形計画法と文献[11]の局所探索法をそれぞれ適用して得られる切出し計画を示す．図中の列が各パターンを，その幅が各パターンの切出し回数をそれぞれ表している．図 4，5 の切出し計画における使用母材の本数はそれぞれ 405.922（実数最適値），410 であり，後者では段取り替えを考慮しているにも関わらず使用母材の増加は最適値の 1%以内に抑えられている．一方で，パターン数はそれぞれ 38，12 であり，文献[11]の局所探索法を用いることで，使用母材をそれほど増やすことなく段取り替え回数を大幅に削減できることが確かめられる．なお，文献[11]の局所探索法では，上記の例題に対してパターン数を 8 に設定しても，使用母材の増加が最適値の 3%以内の切出し計画が得られる．

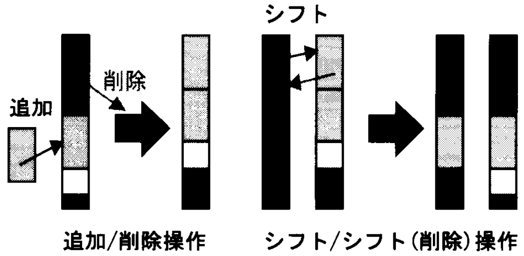

図 3　局所探索法における近傍解の生成

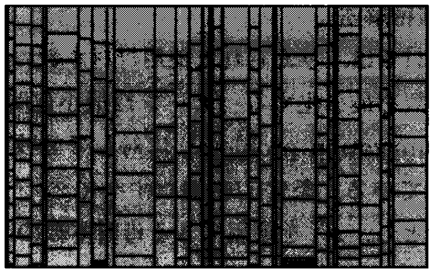

図 4　列生成法に基づく線形計画法による切出し計画の例（$m=38, n=38$）

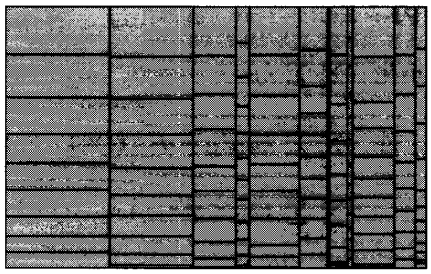

図 5　局所探索法による段取り替えを考慮した切出し計画の例（$m=38, n=12$）

4. パターン並び替え問題

実際の製造業において，段取り替え作業と並んで重要な問題の一つに，切出された板材の搬出の問題がある．多くの現場では，切出された板材はすぐに搬出されるわけではなく，同じ種類の板材がすべて切出されるまでの間，その種類ごとに切出し機械の周辺に一時的に積み上げられる（これはスタックと呼ばれる）．しかし，多くの工場では，切出された板材をすべて積み上げておくだけの十分な空間は確保できないため，切出し工程の間に生じるスタックの数をなるべく少なくするパターンの切出し順を考える必要がある．特に，ガラス製造業など板材が破損しやすい分野では，搬出

までなるべく板材を移動させないことが望ましいため，この問題は重要である．そこで，近年では，切出し工程の間に生じる最大スタック数の削減を考慮したパターンの切出し順を求める，パターン並び替え問題（pattern sequencing problem）の様々な定式化や解法が提案されている．

4.1 欲張り法

文献[17]では，使用するパターン集合$\Pi=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$が与えられた際に，簡単な規則によってパターンの並びを先頭から順に逐次決定する欲張り法を提案している．

ある板材iを含むすべてのパターンp_jの切出しが終われば，すぐに搬出作業が行われ，板材iのスタックを削除できる．そこで，まだ切出されていないすべてのパターンp_jに現れる回数が最も少ない板材iを選び，その板材iを含むパターンを優先して切出す．この時，板材iを含むパターンp_jは複数存在するが，他の板材をなるべく含まないパターンを優先して選ぶことで，新たなスタックをなるべく生成しない様にしている．

4.2 メタ戦略

文献[3, 4]では，各板材iがスタックに積まれる平均期間を最小にするパターン並び替え問題に対して，アニーリング法，タブー探索法を用いた解法をそれぞれ提案している．次に，文献[3]の定式化を示す．

まず，m種類の板材を切出すn本のパターンの順列を$\pi=(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n)$で表す．ここで，$\pi_j$はパターン$p_{\pi_j}$が$j$番目に切出されることを表す．次に，順列$\pi$により定まる次の$m\times n$行列$C(\pi)=[c_{ij}]$を考える．

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \text{板材 } i \text{ が } j \text{ 番目のパターンで切出される} \\ 0 & \text{それ以外.}\end{cases} \tag{42}$$

パターンp_jの切出し回数をx_jとすると，与えられたパターンの順列πにおいて各板材iがスタックに積まれる平均期間$\bar{s}(\pi)$は次の通り計算できる．

$$\bar{s}(\pi)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=\min\{k|c_{i\pi_k}>0\}}^{\max\{k|c_{i\pi_k}>0\}} x_{\pi_j}-1\right). \tag{43}$$

5種類の板材を4本のパターンで順列πに従って切出す場合の例を次に示す．

$$C(\pi_1)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix} \tag{44}$$

行列$C(\pi)$の各列はパターンを表しており，例えばパターンp_{π_4}は板材2,3の2種類の板材を切出している．パターン$p_{\pi_1}, p_{\pi_2}, p_{\pi_3}, p_{\pi_4}$の切出し回数をそれぞれ$x_{\pi_1}=3, x_{\pi_2}=1, x_{\pi_3}=5, x_{\pi_4}=2$とすると，各板材$i$がスタックに積まれる平均期間$\bar{s}(\pi)$は$(3+10+7+0+8)/5=5.6$となる．

文献[4]では，提案手法が，各板材iがスタックに積まれる平均期間を，ランダムな切出し順の場合より6割程度減らせることを数値実験により確かめている．また，文献[3]では，上記の問題に加えて切出し工程の間に生じる最大スタック数を最小にするパターン並び替え問題に対する数値実験も行っている．

5. おわりに

実際の素材産業では，(1)切出し機械における刃の数，(2)各パターンの切残し長，(3)様々な長さの母材など，操業の都合上様々な制約条件が生じることは，文献[7]ですでに触れられている．パターンに関する制約の多くは，パターン生成を行う部分問題の制約条件として加えることで，うまく対処できることが知られている．また，パターンに関する制約が多く，実行可能なパターンの総数が数万程度に抑えられる場合には，列生成法を使わずに実行可能なパターンをあらかじめ列挙して線形計画法を適用する方が効率が良い場合もある（もちろん高速な線形計画ソルバを用いることが前提である）．

謝辞　本稿の執筆にあたって貴重なコメントをいただいた柳浦睦憲博士に感謝します．

参考文献

[1] G. Belov and G. Scheithauer: "The number of set-ups (different patterns) in one-dimensional stock cutting", Technical Report MATH-NM-15-2003, Dresden University (2003).

[2] H. Dyckhoff: "A typology of cutting and packing problems", *European Journal of Operational Research*, 44 (1990), 145-159.

[3] A. Fink and S. Voß: "Application of modern heuristic search methods to pattern sequencing problems", *Computers and Operations Research*, 26 (1999), 17-34.

[4] H. Foerster and G. Wäscher: "Simulated annealing for order spread minimization in sequencing cutting patterns", *European Journal of Operational Research*, 110 (1998), 272-281.

[5] H. Foerster and G. Wäscher : "Pattern reduction in one-dimensional cutting stock problems", *International Journal of Production Research*, 38 (2000), 1657-1676.

[6] P. C. Gilmore and R. E. Gomory : "A linear programming approach to the cutting-stock problem", *Operations Research*, 9 (1961), 849-859.

[7] P. C. Gilmore and R. E. Gomory : "A linear programming approach to the cutting-stock problem—part II", *Operations Research*, 11 (1963), 863-888.

[8] R. W. Haessler : "Controlling cutting pattern changes in one-dimensional trim problems", *Operations Research*, 23 (1975), 483-493.

[9] G. Scheithauer and J. Terno : "The modified integer round-up property for the one-dimensional cutting stock problem", *European Journal of Operational Research*, 84 (1995), 562-571.

[10] S. Umetani, M. Yagiura and T. Ibaraki : "An LP-based local search to the one dimensional cutting stock problem using a given number of cutting patterns", *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E 86-A (2003), 1093-1102.

[11] S. Umetani, M. Yagiura and T. Ibaraki : "One-dimensional cutting stock problem with a given number of setups : a hybrid approach of metaheuristics and linear programming", Working paper, 2004.

[12] P. H. Vance : "Branch-and-price algorithms for the one-dimensional cutting stock problem", *Computational Optimization and Applications*, 9 (1998), 211-228.

[13] F. Vanderbeck : "Computational study of a column generation algorithm for bin packing and cutting stock problem", *Mathematical Programming*, A 86 (1999), 565-594.

[14] F. Vanderbeck : "Exact algorithm for minimizing the number of setups in the one-dimensional cutting stock problem", *Operations Research*, 48 (2000), 915-926.

[15] G. Wäscher and T. Gau : "Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem : a computational study", *OR Spektrum*, 18 (1996), 131-144.

[16] 柳浦睦憲, 茨木俊秀 :『組合せ最適化—メタ戦略を中心として—』, 朝倉書店 (2001).

[17] B. J. Yuen : "Heuristics for sequencing cutting patterns", *European Journal of Operational Research*, 55 (1991), 183-190.