マッチングモデル

田村　明久

1. はじめに

ご存知の方も多いと思うが，臨床研修医の研修病院への割当てを全国的な規模で行うシステムが昨年から始動した[1]．研修医は希望する病院に優先順序を付け，病院は研修希望者に優先順序を付ける．そのもとで研修医からも病院からも不満が出ない割当てを求めたい．このシステムではGale・Shapley[2]による安定結婚モデルが利用されている．研修医の集合と病院の集合を例とするような交わりを持たない二つの主体の集合を考え，異なる集合に属する主体間の割当てや物の売り買いを扱う市場モデルはtwo-sided matching marketなどと総称されている（本稿ではマッチングモデルと呼ぶことにする）．マッチングモデルには，先の安定結婚モデルとShapley・Shubik[3]による割当ゲームという二つの標準的なモデルがある．割当ゲームでは主体間の貨幣のやり取りを許すが，安定結婚モデルではそれを許さないのが最大の相違点である．本稿では，安定結婚モデル，割当ゲームおよびこれらを特殊ケースとして含むモデルについて考える．

2. 安定結婚モデル

安定結婚モデルでは，交わりを持たない二つの集合を男性から成る集合 M と女性から成る集合 W としてしばしば説明がなされるので，本稿でもそれに従うことにする．話を簡単にするために，男女の人数はそれぞれ n 人とする．

「結婚」とあるように，n 対の男女の組を作り，それぞれの組を結婚させる状況を想定する．安定結婚モデルでは一夫一婦制を前提とし，構成した男女の組の集合ではどの人もちょうど一つの組に含まれるようにしたい．この条件を満たす男女の組の集合をマッチングと呼ぶことにする．図1は，$M=\{a, b, c, d\}$, $W=\{1, 2, 3, 4\}$ の場合のマッチングの例で，組を成す男女を辺で結んでいる．

安定結婚モデルでは，結婚させた組が離婚しないようなある種の安定性が提案されている．この安定性を導入するために，各人は異性に対して好みの順番を持つとする．ここでは文献[2]で扱われている状況より少し融通を持たせ，同程度に好きである状況（無差別）を許すことにする．与えられたマッチング X に対して，X では組とならない男性 i と女性 j が存在し，i は X のパートナーよりも j を好み，j も X でのパートナーよりも i を好むならば，i と j がより好ましい相手との再婚を望むとみなし，X は不安定であると定義する（パートナーと同程度に好きな異性とは，離婚してまで再婚する意志がないとしている）．マッチングが上の意味で不安定でないとき，安定であるという（無差別を許す場合には他にも安定性が定義されるが，これらと区別するために弱安定ということもある）．Gale・Shapleyは，無差別がない場合に安定マッチングを求めるアルゴリズムを提案することで，その存在を構成的に示している．無差別を許す場合も同様の議論が通用し，常に安定マッチングが存在する．安定マッチングの存在証明については，非構成的なものとして不動点定理を用いたものもある（例えば文献[4]参照）．

割当ゲームの設定と合わせるために，次では安定結婚モデルの安定性の別表現を与える．まず各人の異性に対する好みの順番を正実数により表す．具体的には，男性 $i \in M$ の女性 $j \in W$ に対する評価を $a_{ij}>0$ で表し，$a_{ij}>a_{ik}$ のときかつそのときに限り i は j を k よ

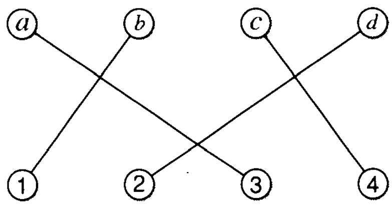

図1　マッチングの例

たむら　あきひさ
慶應義塾大学 理工学部
〒223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1

り好むとし，$a_{ij}=a_{ik}$ のとき i は j と k を同程度に好むとする．また女性 $j\in W$ の男性 $i\in M$ に対する評価を $b_{ij}>0$ で表し，上と同様に好みの順番と対応させる．このとき，マッチング X が安定であることの定義は，次の条件を満たす n 次元ベクトル $q=(q_i|i\in M)$, $r=(r_j|j\in W)$ が存在することと書き換えられるのは明らかであろう：

(m 1)　$q_i=a_{ij}$ and $r_j=b_{ij}$ for $(i,j)\in X$,

(m 2)　$q_i\geq a_{ij}$ or $r_j\geq b_{ij}$ for $(i,j)\in M\times W$,

ただし $M\times W$ は男女の組全体から成る集合とする．(m 1)を男性 i と女性 j が結婚することによってそれぞれ q_i, r_j という収入を得ると解釈すると，(m 2)はどの男女の組に対しても 2 人が同時により大きな収入を得ることはないことを意味している．

3. 割当ゲーム

割当ゲームでも主体の集合を安定結婚モデル同様に同じ大きさの男性集合 M と女性集合 W としよう．前節の後半部分と同様に，各男女の組 (i,j) に対し二つの正実数 $a_{ij}, b_{ij}>0$ が与えられているとする．割当ゲームでは，これらの実数は i と j が組んだときにそれぞれ a_{ij} と b_{ij} という利益を上げることができると解釈する．割当ゲームでもマッチングの安定性を考えるが，利益の供与が許されている点が安定結婚モデルの設定と大きく異なる．すなわち，マッチング X の男女の組 (i,j) は 2 人の総利益 $a_{ij}+b_{ij}$ を配分し，それぞれの収入 q_i と r_j を得る．割当ゲームでは，次の条件を満たす男性の収入ベクトル $q=(q_i|i\in M)$ と女性の収入ベクトル $r=(r_j|j\in W)$ が存在するとき，マッチング X は安定であると定義する：

(a 1)　$q_i+r_j=a_{ij}+b_{ij}$ for $(i,j)\in X$,

(a 2)　$q_i\geq 0$ for $i\in M$ and $r_j\geq 0$ for $j\in W$,

(a 3)　$q_i+r_j\geq a_{ij}+b_{ij}$ for $(i,j)\in M\times W$.

(a 1)は先に述べたようにマッチング内の組は総利益を配分できることを意味する（安定結婚モデルの(m 1)と比較していただきたい）．(a 2)は，負の収入を得るくらいならば誰とも組まず収入 0 の方がましであり，その場合に X は安定とは言えないことを意味する．(a 3)は，どの男女の組も q, r の下での合計収入を上回る利益を得ることができないことを主張している．もし(a 3)が不成立ならば，ある組 (i,j) が存在し $q_i+r_j<a_{ij}+b_{ij}$ となる．このとき，i と j は総利益 $a_{ij}+b_{ij}$ を適当に配分することで共に収入を増やすことができる．すなわち，i と j は互いに X でのパートナーよりも好ましい存在となり，マッチングの組み替えを希望するため X は不安定であると言える．まとめると，(a 1)のもとで(a 2)と(a 3)が成立するならば，単独の希望で組を解消したり，男女の組の希望によりマッチングが壊されることはない．

割当ゲームにおける安定マッチングの存在は線形計画問題に対する双対定理と解の整数性により示すことができる．男性集合 M，女性集合 W と利益ベクトル a, b により定義される割当問題の線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{lll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in M\times W}(a_{ij}+b_{ij})x_{ij} & \\
\text{制　約} & \displaystyle\sum_{j\in W}x_{ij}\leq 1 & (i\in M) \\
 & \displaystyle\sum_{i\in M}x_{ij}\leq 1 & (j\in W) \\
 & x_{ij}\geq 0 & ((i,j)\in M\times W)
\end{array}
$$

とその双対問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{i\in M}q_i+\sum_{j\in W}r_j & \\
\text{制　約} & q_i+r_j\geq a_{ij}+b_{ij} & ((i,j)\in M\times W) \\
 & q_i\geq 0 & (i\in M) \\
 & r_j\geq 0 & (j\in W)
\end{array}
$$

を考える．主問題の実行可能領域は非空で有界であるから必ず最適解が存在する．主問題の目的関数のすべての係数が正であり，M と W の大きさが同じため主問題の最適解は第 1，第 2 制約をすべて等号で満たす．さらに，主問題の任意の最適基底解 x^* のすべての成分が整数となることが知られている．第 1，第 2 制約より x^* の各成分は 0 か 1 となり，$x^*_{ij}=1$ を満たす組 (i,j) 全体の集合はマッチング X^* となる．一方，双対定理より双対問題も最適解を持つ．双対問題の最適解を q^*，r^* とすると，これらが(a 2)と(a 3)を満たすことは，双対問題の制約より明らかである．さらに，x^* と q^*，r^* は相補性条件を満たすので，X^* 内の組 (i,j) に対し，双対問題の第 1 制約は等号で成立しければならない．すなわち，X^*，q^*，r^* は(a 1)も満たす．まとめると，主問題の最適基底解は安定マッチングを与え，安定マッチングの存在が示せる．逆に割当ゲームの安定マッチングは，主問題の最適基底解を与える．

次に割当ゲームの安定性を女性側から男性側への利益供与額に注目して見直してみる．マッチングを構成する前の状況を想定し，各男女の組 (i,j) はもし組んだならば j から i に p_{ij} だけ利益供与をすると約束したとする（実際には $p_{ij}>0$ なら女性から男性に利益

供与が行われ，$p_{ij}<0$ ならば男性から女性に利益供与が行われる）．この p_{ij} を j から i への手付と呼ぶことにする．マッチング X が安定であるための必要十分条件は，次の条件を満たす手付ベクトル $p=(p_{ij}|i\in M, j\in W)$ が存在することである：

(p 1) $a_{ij}+p_{ij}=\max\{a_{ik}+p_{ik}|k\in W\}\geq 0$ for $(i, j)\in X$,

(p 2) $b_{ij}-p_{ij}=\max\{b_{kj}-p_{kj}|k\in M\}\geq 0$ for $(i, j)\in X$.

この特徴付けは次のように示せる．X が安定マッチングであるならば，(a 1)，(a 2)，(a 3) を満たすベクトル q, r が存在する．ベクトル p を，各 $(i,j)\in M\times W$ に対し $p_{ij}=b_{ij}-r_j$ と定める．(a 1) より $(i,j)\in X$ に対し $q_i=a_{ij}+p_{ij}$ が成立するので，(a 2) は (p 1)，(p 2) における $a_{ij}+p_{ij}, b_{ij}-p_{ij}$ の非負性を保証する．p_{ij} の定義より，すべての $(i,j)\in M\times W$ に対し $r_j=b_{ij}-p_{ij}$ が成立するので (p 2) における等号は自明に成立する．さらに，この事実と (a 1)，(a 3) が (p 1) の等号を導く．逆に，マッチング X に対して (p 1)，(p 2) を満たすベクトル p が存在したとする．$(i,j)\in X$ に対して，$q_i=a_{ij}+p_{ij}, r_j=b_{ij}-p_{ij}$ と q, r を定めると (a 1)，(a 2)，(a 3) が成立する（すべての男女は X のある組に含まれるので q，r は定義される）．

4. 手付に上下限制約を持つモデル

この節では，先に述べた安定結婚モデルと割当ゲームの安定性を特殊ケースとして含むような安定性を考える．M，W，a，b が所与というのは，節 2，節 3 と同様とする．本節のモデルでは，さらに手付に上下限の制約がある場合を扱う．各 $(i,j)\in M\times W$ に対し，$\underline{\pi}_{ij}\leq\overline{\pi}_{ij}$ を満たす $\underline{\pi}_{ij}\in\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ と $\overline{\pi}_{ij}\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ により手付 p_{ij} の下限と上限を表すとする．

本節では，マッチング X が安定であるとは，次の条件を満たす手付ベクトル $p\in\mathbf{R}^{M\times W}$ が存在することと定義する：

(g 0) $\underline{\pi}_{ij}\leq p_{ij}\leq\overline{\pi}_{ij}$ for $(i,j)\in M\times W$,

(g 1) $q_i=a_{ij}+p_{ij}$ and $r_j=b_{ij}-p_{ij}$ for $(i,j)\in X$,

(g 2) $q_i\geq 0$ for $i\in M$ and $r_j\geq 0$ for $j\in W$,

(g 3) $q_i\geq a_{ij}+c$ or $r_j\geq b_{ij}-c$ for $(i,j)\in M\times W$,
$c\in\mathbf{R}$ with $\underline{\pi}_{ij}\leq c\leq\overline{\pi}_{ij}$.

(g 0) は手付が上下限制約を満たすという条件であり，(g 1) は（手付の上下限制約の下で）マッチング内の組 (i,j) は総利益 $a_{ij}+b_{ij}$ を配分することを意味している．(g 2) の解釈は (a 2) と同じである．(g 3) が不成立とすると，ある $(i,j)\in M\times W$ と $c\in[\underline{\pi}_{ij}, \overline{\pi}_{ij}]$ が存在し，$q_i<a_{ij}+c$ かつ $r_j<b_{ij}-c$ が成り立つ．このとき，(g 1) を仮定するならば $(i,j)\notin X$ であり，i と j は上下限を満たす手付 c により 2 人とも収入を増やすことができる．これは，p の下では i と j には X が満足できるマッチングではないことを意味する．

次に安定結婚モデルと割当ゲームの安定性が上記の安定性の特殊ケースとなることを示す．

まずは，安定結婚モデルとの関係を示すために

$\underline{\pi}=(0, 0, \cdots, 0)$,

$\overline{\pi}=(0, 0, \cdots, 0)$

である場合，すなわち利益供与が許されない場合を考える．このとき，(g 0) から手付ベクトル p のすべての成分は 0 であるから，(g 1) は (m 1) と同じ主張となる．また所与のベクトル a，b の非負性から，(g 2) は (g 1) から誘導される．(g 3) における c も 0 でなければならないので，(g 3) は (m 2) と同一となる．したがって，$\underline{\pi}$，$\overline{\pi}$ を上記のように定めれば，本節のモデルにおける安定性は，安定結婚モデルの安定性と等価となる．

割当ゲームとの関係を示すために

$\underline{\pi}=(-\infty, -\infty, \cdots, -\infty)$,

$\overline{\pi}=(+\infty, +\infty, \cdots, +\infty)$

である場合，すなわち手付に全く制約がない場合を考える．このとき，(g 0) は恒真であり，(g 1)，(g 2) はそれぞれ (a 1)，(a 2) と同じ主張である．(g 3) と (a 3) の同値性は，

$q_i+r_j<a_{ij}+b_{ij}\Longleftrightarrow$

$\exists c\in\mathbf{R}: q_i<a_{ij}+c, r_j<b_{ij}-c$

という関係より示せる．したがって，$\underline{\pi}$，$\overline{\pi}$ を上記のように定めれば，本節のモデルにおける安定性は，割当ゲームの安定性と等価となる．

安定結婚モデルでも割当ゲームでも安定マッチングは常に存在したが，本節のモデルでも安定マッチングは存在するであろうか．実は，より一般的なモデル [5, 6] に対する結果から本節のモデルでの安定マッチングの存在が系として導かれる．金子 [5] では，特性関数により抽象化されたモデルが提案され，そのモデルにおけるコアの存在が示されている．本節のモデルと金子のモデルの関係を説明するのはそれほど安易ではないためここでは避けるが，金子のモデルでのコアの存在から本節のモデルでの安定マッチングの存在が導か

れることだけを述べておく．

文献[6]は，手付に上下限制約を持たせるというアイデアを導入し離散凸解析[7, 8]を応用することで，多くのマッチングモデルを含むモデルを提案し，そのモデルにおける安定マッチングの存在を示している．実は，本節のモデルはこのモデルの簡略版であり，このことからも本節のモデルでの安定マッチングの存在が導かれる．また文献[6]の結果より，安定マッチングの特徴付けとして(p 1)，(p 2)の拡張に当たるものが得られる．マッチング X が安定であるための必要十分条件は，次の条件を満たす手付ベクトル p, $M\times W$ の部分集合 E_M，E_W が存在することである：

(g 0′)　$\underline{\pi}\leq p\leq \bar{\pi}$, $X\subseteq E_M\cap E_W$, $E_M\cup E_W=M\times W$,

(g 1′)　$a_{ij}+p_{ij}=\max\{a_{ik}+p_{ik}|(i,k)\in E_M\}\geq 0$ for $(i,j)\in X$,

(g 2′)　$b_{ij}-p_{ij}=\max\{b_{kj}-p_{kj}|(k,j)\in E_W\}\geq 0$ for $(i,j)\in X$,

(g 3′)　$p_{ij}=\underline{\pi}_{ij}$ for $(i,j)\in(M\times W)\setminus E_M$ and $p_{ij}=\bar{\pi}_{ij}$ for $(i,j)\in(M\times W)\setminus E_W$.

(g 0′)～(g 3′)の詳しい説明は紙数の都合上割愛するが，この特徴付けの利点は安定マッチングを求めるにはこれらの条件を満たす X，p，E_M，E_W を求めれば良いことである．事実，文献[6]における安定マッチングの存在証明は構成的なもので，Gale・Shapley [2]の提案したアルゴリズムと最大重みマッチングを求めるアルゴリズムを複合したアルゴリズムが(g 0′)～(g 3′)を拡張した条件を満たすものを常に求めるという議論である．

5．おわりに

安定結婚モデルと割当ゲームに対しては安定マッチングの存在証明に非構成的なものがある．先にも触れたが，安定結婚モデルに対しては不動点定理を用いたものが存在する．節3で説明したように，割当ゲームに対しては最適化での諸定理がある．文献[6]のモデルに対しても，非構成的な安定マッチングの存在証明があるかという興味がある．

ここでは理論的な側面から，安定結婚モデル，割当ゲームそして手付に上下限制約を持つモデルの安定性を簡単に紹介したが，安定結婚モデルも割当ゲームも現実問題への応用が多数なされている．例えば，安定結婚モデルは医師の病院への割振りや研究室配属など実用場面で利用されている．割当ゲームも学生の授業科目への割振りに利用される[9]など，実用面での利用も多い．手付に上下限制約を持つモデルは，安定結婚モデルと割当ゲームの自然な拡張であると思うが，これについても何らかの応用があればと願うばかりである．

参考文献

[1] 医師臨床研究マッチング協議会，財団法人医療研修推進財団，http://www.jrmp. jp/.

[2] D. Gale and L. S. Shapley : College admissions and the stability of marriage, *The American Mathematical Monthly*, **69**, 9-15 (1962).

[3] L. S. Shapley and M. Shubik : The assignment game I : The core, *International Journal of Game Theory*, **1**, 111-130 (1972).

[4] T. Fleiner : A fixed point approach to stable matchings and some applications, *Mathematics of Operations Research*, **28**, 103-126 (2003).

[5] M. Kaneko : The central assignment game and the assignment markets, *Journal of Mathematical Economics*, **10**, 205-232 (1982).

[6] S. Fujishige and A. Tamura : A two-sided discrete-concave market with bounded side payments : An approach by discrete convex analysis, RIMS Preprint 1470, Kyoto University, 2004. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/home_page/preprint/list/

[7] 室田一雄：離散凸解析（共立出版，東京，2001）．

[8] K. Murota : *Discrete Convex Analysis* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003).

[9] 今野浩：数理決定法入門―キャンパスのOR（朝倉書店，東京，1992）．