Optimal Design of PAC-Companion Structure for Mortgage Backed Securities Using Cash Reserve

沓名　拓郎
（京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻　現所属・㈱豊田中央研究所）
指導教官　福島雅夫 教授

1. はじめに

Mortgage Backed Securities (MBS) とは，多数の住宅ローンを寄せ集めてローンプールを作り，その返済キャッシュフローを原資として発行される証券である．住宅ローンでは，基本的に毎月の決められた返済以外に繰上返済が認められており，繰上返済により返済キャッシュフローが変化する．このため，MBSには期前償還リスクが存在する[1]．MBSの販売方式として，返済キャッシュフローを人為的に再編成し，リスクの異なる複数の債券に分離して販売するCMO方式が考えられている．本研究の目的は，優先劣後構造を用いたCMOを設計するための最適化手法を提案することである．期前償還リスクの影響下で不安定な返済キャッシュフローを，期前償還リスクの低い安定した部分（優先債券，PAC bond）と，期前償還リスクの高い不安定な部分（劣後債券，Companion bond）の二つのクラスに分ける．その際，各時点において返済金の一部分を次の時点までリザーブすることにより，より多くの優先債券が発行できることを示す．

2. 優先劣後構造のモデル化

ローンの満期を T 年とする．各時点 t での優先債券支払い予定額を a_t，リザーブ上限を v_t とする．各時点 t での支払いは，次の順序で行われると仮定する．t 時点の返済キャッシュフローと $t-1$ 時点のリザーブを合わせた中から

1. まず初めに，優先債券に対する支払いを行う；
2. 次に，リザーブ上限を超えない分をリザーブし，$t+1$ 時点での支払いに回す；
3. 最後に，リザーブ上限を超えた分を劣後債券に支払う；

これにより，a_t, v_t を決めることで，すべてのキャッシュフローが決定される．t 時点の返済キャッシュフロー，優先債券支払額，劣後債券支払額，リザーブ額をそれぞれ C_t, A_t, B_t, V_t とすると，各 t において次の関係が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&A_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t)\\
&\quad=\min\{a_t, C_t+V_{t-1}(\boldsymbol{a}_{t-1}, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_{t-1})\}\\
&V_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{C}_t)\\
&\quad=\min\{v_t, C_t+V_{t-1}(\boldsymbol{a}_{t-1}, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_{t-1})\\
&\qquad-A_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t)\}\\
&B_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{C}_t)=C_t+V_{t-1}(\boldsymbol{a}_{t-1}, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_{t-1})\\
&\qquad-A_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t)-V_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{C}_t)
\end{aligned}
$$

ただし，$\boldsymbol{a}_t=(a_1,\cdots,a_t)$, $\boldsymbol{v}_t=(v_1,\cdots,v_t)$, $\boldsymbol{C}_t=(C_1,\cdots,C_t)$, $V_0=V_T=0$ である．また，返済キャッシュフロー C_t は確率変数である．

支払い予定額 a_t よりも，実際の支払い額 A_t の方が少ない場合に損失が生じるので，優先債券に関する t 時点の損失関数 L_t を以下のように定義する．

$$L_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t):=a_t-A_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t)$$

住宅ローンの貸出金利を r_0 とし，利子率 $r'(<r_0)$ の優先債券を発行する場合を考える．そのとき，支払い予定額が $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_T)$ である優先債券の割引現在価値を表す関数は次式で与えられる．

$$W(\boldsymbol{a}):=\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t}{(1+r')^t}$$

MBS発行者の目的として，優先債券の発行量を多くしたい，優先債券に対する支払いを予定額通り確実に行いたい，リザーブ量を少なくしたいなどが挙げられる．これらの要件を考慮して，次の数理計画モデルを提案する．

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}}\quad & W(\boldsymbol{a})-\sum_{t=1}^{T-1}\rho_t\cdot v_t\\
\text{s.t.}\quad & \mathrm{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\gamma_t\cdot L_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t)\right]\le U_L,\\
& \boldsymbol{a}\ge 0,\quad \boldsymbol{v}\ge 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ただし，$\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_{T-1})$ である．また，γ_t, ρ_t は重み係数，$\mathrm{E}[X]$ は X の期待値，U_L は優先債券に関する最大期待損失を表す定数である．

3. サンプルパスを用いた近似

返済キャッシュフロー $\boldsymbol{C}$ の分布は一般に既知では

ない．そこで，期前償還をモデル化したSchwartz and Torousモデルを用いて発生させた$\boldsymbol{C}$のサンプルパス$\boldsymbol{c}^{(i)}$を用いて，問題(1)中の期待値を近似的に計算する．I本のサンプルパスを用いて期待値を近似し，さらに従属変数$\boldsymbol{L}=(L_1^{(1)}, \cdots, L_T^{(1)}, \cdots, L_1^{(I)}, \cdots, L_T^{(I)})$, $\boldsymbol{V}=(V_0^{(1)}, \cdots, V_T^{(1)}, \cdots, V_0^{(I)}, V_T^{(I)})$（ただし$V_0^{(i)}=V_T^{(i)}=0$）を導入することにより，問題(1)は次の問題$\mathrm{P}_1$に書き直すことができる．

(P_1)

$$\begin{aligned}
\max_{a, v, L, V} \quad & W(\boldsymbol{a})-\sum_{t=1}^{T-1}\rho_t, v_t \\
\text{s.t.} \quad & \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\gamma_t \cdot L_t^{(i)} \leq \mathrm{U}_L, \\
& L_t^{(i)}=\max\{0, a_t-c_t^{(i)}-V_{t-1}^{(i)}\}, & (2) \\
& V_t^{(i)}=\min\{v_t, c_t^{(i)}+V_{t-1}^{(i)}+L_t^{(i)}-a_t\} & (3) \\
& \boldsymbol{a}\geq 0, \boldsymbol{v}\geq 0, V_t^{(i)}=V_T^{(i)}=0.
\end{aligned}$$

4. 線形計画モデル

問題P_1中の制約(2), (3)は相補性条件を用いて書き表されるため，問題P_1を直接解くのは非常に難しい．そこで，問題P_1中の相補性制約を取り除き，$V_t^{(i)}$に関する非負条件を付け加えた問題P_2を考える．

(P_2)

$$\begin{aligned}
\max_{a, v, L, V} \quad & W(\boldsymbol{a})-\sum_{t=1}^{T-1}\rho_t, v_t \\
\text{s.t.} \quad & \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\gamma_t \cdot L_t^{(i)} \leq \mathrm{U}_L, \\
& V_t^{(i)} \leq c_t^{(i)}+V_{t-1}^{(i)}+L_t^{(i)}-a_t, \\
& 0 \leq V_t^{(i)} \leq v_t, \\
& L_t^{(i)}\geq 0, a_t\geq 0, V_0^{(i)}=V_T^{(i)}=0.
\end{aligned}$$

問題(P_2)は線形計画問題であるから，単体法や内点法などにより効率的に解くことができる．次の定理は，$\gamma_t>\gamma_{t+1}(t=1, \cdots, T-1)$という自然な仮定のもとで，問題$\mathrm{P}_1$と問題$\mathrm{P}_2$が等価であることを示している．

定理1．問題P_2の最適解を$(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{L}}, \bar{\boldsymbol{V}})$とする．$\gamma_t>\gamma_{t+1}(t=1, \cdots, T-1)$のとき，適当な$\tilde{\boldsymbol{V}}$を与えると$(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$は問題$\mathrm{P}_1$の最適解となる．

5. 数値実験

元本総額1000億円とし，各パラメータを$T=30$, $r_0=0.05$, $r'=0.04$, $I=1000$と設定する．図1は，実験に用いた返済キャッシュフローのサンプルパスである．また，γ_t, ρ_tは次のように設定した．

$$\gamma_t := \frac{1}{(1+r')^t}, \quad \rho_t := \frac{\rho_0}{(1+r')^t}.$$

図2は$\mathrm{U}_L=0.1$, $\rho_0=0.1$として問題を解いたときの，最適解おける優先債券支払い予定額a_t，リザーブ上限v_t，平均リザーブ量$\mathbf{E}[\tilde{V}_t]$，優先債券損失$L_t^{(i)}$を表している．図2の各時点tで，優先債券に予定額が支払えない確率は0.5%以下であり，優先債券に対する支払いがほぼ確実に行われていることがわかる．またρ_0を小さく設定するほど，最適解におけるリザーブ量が大きくなり，それと同時に優先債券発行量も大きくなることが実験により確認された．これは，リザーブを許すことでより多くの優先債券が発行できるようになることを意味する．

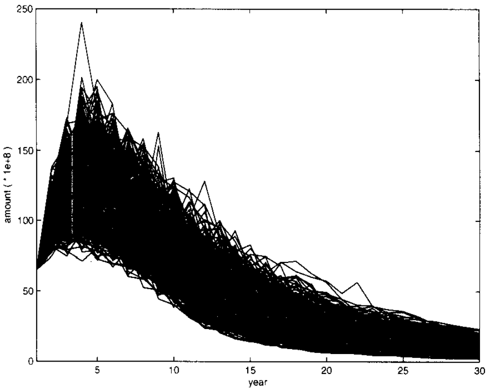

図1 用いた返済フローのサンプルパス

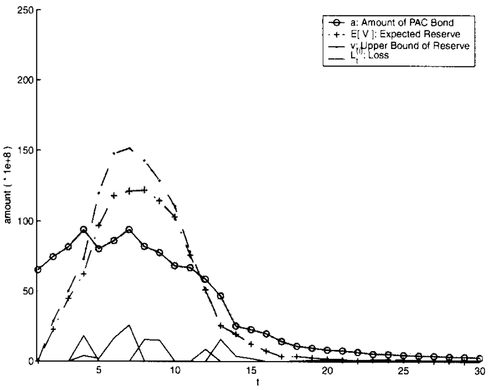

図2 得られた最適解

6. 結論

キャッシュリザーブを用いたMBS優先劣後構造を最適に設計するための手法を提案した．MBSのキャッシュフローを数学的にモデル化し，優先劣後構造を決定する問題を数理計画問題に定式化した．サンプルパスを用いて問題を近似し，その問題が等価な線形計画問題に再定式化されることを示した．また数値実験を行い，本手法により返済キャッシュフローを優先債券と劣後債券に効率的に切り分けられることを確かめた．

参考文献

[1] 甲斐良隆：MBS優先劣後構造の最適設計，日本不動産金融工学学会実務ジャーナル，Vol. 1, 2-25, 2003.