限定合理性への手がかり
—実質合理性（Substantive Rationality）—

下川　拓平

エージェントの「合理性」という，行動を特徴づける特性が，いわゆる情報構造の理論を用いてどのように定式化されるかを[6, 2]，それぞれにて言及/定義される，実質合理性："Substantive Rationality" の概念に焦点をあてて論じる．これは「合理性」の認識論的分析の，ある種の土台を探し出す作業をも含む．具体的には，この "Substantive Rationality" がエージェント間の共有知識であるとの一見同一の前提条件で，上記の文献で一見背反な結果が導出されている，その簡単な例を見る（「合理性」の定義の微妙な差異により，まるで異なる結果が導出されてしまうことは，示唆する所大である）．簡単なイグゼンプラを見ながら説明を行う．

キーワード：完全情報展開型ゲーム，情報構造，実質合理性

1. 合理性とは

現在パラダイムシフトが生起しつつある，ということは，ある意味周知である，ということをまず強調した上で，現行のミクロ経済学のパラダイムにおいては，次のような前提にもとづく理論が機軸をなしているといわれている．

・エージェントの意思決定は「効用（利益）最大化」を機軸になされる．つまりこれが行動原理．その最大達成を「めざす」ための「合理性」の仮定が不可欠．

・ミクロ経済学における「合理性」の仮定は，よく指摘されるように非常に強力で，ある種無限の記憶と計算力を仮定する．この仮定にしたがったエージェントによる理論が主軸．

・エージェントの意思決定が常に合理的である，ということはつまり全エージェントは同質ということをも含意する．

・情報伝達速度は無限大（つまり一瞬で全ての情報がエージェントに共有される）．

・上記のように，エージェントが合理的に利益最大化へ意思決定した瞬間にある状態ができる．ケネス・アローによれば，この状態はパレート最適となる（厚生経済学の基本定理．例えば文献[3]を参照）．

無論，批判者は，上記のような仮定は現実とは異なり，したがってこれらの仮説や数理的理論にもとづく政策や予測を意味のあるものと認定できない，として，ハーバード・サイモンのいわゆる**限定合理性**[8]の議論へとシフトしていく．しかし，筆者の存知する範囲では，この限定合理性という言葉が経済学において，あるいはゲーム理論のなかで，何がしかの結果を導出する土台として定義をされているのをあまり見かけないように思われる．

行動科学としてのゲーム理論において，エージェントの行動を規定するはずであるエージェントの情報能力の輪郭を明確にする，ということが「限定合理性を定義する」こと，ならば，それは極めて本質的であろう．ではまず合理性というものが何かを我々は分析的にとらえる必要がある．

2. 枠組の概観

ゲーム論の枠組で「合理性」を論じるのは，それが数学的な概念として厳密に記述されるという意味で，また例題が構成しやすいという意味で，好都合である．

「合理性」についての議論は，ミクロ経済学の領域において例題や事例を用いて，非常に数多く，また様々なアプローチをもってなされている．本来ならば経済エージェントの「合理性」というものについての先人の考究をある範囲で鳥瞰すべきところであるが，本稿ではそれをあえてせず（あるいは先行する節にて論じた範囲にとどめ），主としてゲーム理論の数理的展開におけるそれへ焦点をあてて，そのゲーム理論における「合理性」の概念の精緻化を，後述する「実質

しもがわ　たくへい
武蔵大学 経済学部
〒176-8534 練馬区豊玉上 1-26-1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

合理性」の定義への直感的な道筋を例にして，論じてみる．

次に，後続する議論で使用する通常のゲーム論の緒概念を，記法に着意しながら定式化しておく．まず，展開型ゲームから示す．

定義 2.1（展開型ゲーム） 展開型ゲームとは$\langle \Gamma, N, \{\pi_i\}_{i\in N}, \phi\rangle$である．ここに，$\Gamma$は（有限）木構造$(V, E)$（$V$はノード（ヴァーテックス）の集合，$E$は$V$上の二項関係，通例の木における「エッジ」），$N$は有限集合でプレイヤ（エージェント）の集合を表示し，さらに，プレイヤの利得函数は，

$\pi_i: T \to \mathrm{R}$（実数） for all $i \in N$,

とする．ここで，$T(\subset V)$は木構造Γのターミナルノード，あるいは「葉」の集合で，子ノードをもたないノードの集合（通常の木構造におけるそれと同一の概念）とする．最後に，

$\phi: V - T \to N$

で，各ノード（ターミナルノード以外）における，「アクション」（通常，エッジに付されるインデックスとして図示される）をとるプレイヤを表示する．木構造を採用する理由は，各プレイヤが時系列でアクションをとっていく，という状況を表示するためである．ルートノード（親ノードをもたないノード）から，ターミナルノードへ向かって各プレイヤが順にアクションをとる，と解釈する．

念のために一例を図1に示す．

図1において，プレイヤの集合は$N=\{A, B, C\}$，アクションはすべてのプレイヤにとって$\{1, 2\}$であり，またそれぞれのノードにはϕの値すなわちプレイヤの名前が付されている．またターミナルノードそれぞれにはπ_A, π_B, π_Cの値が付されている．最初のアクションはAによってとられ，例えばAが2をとれば次のアクションはCによってとられる，等々である．

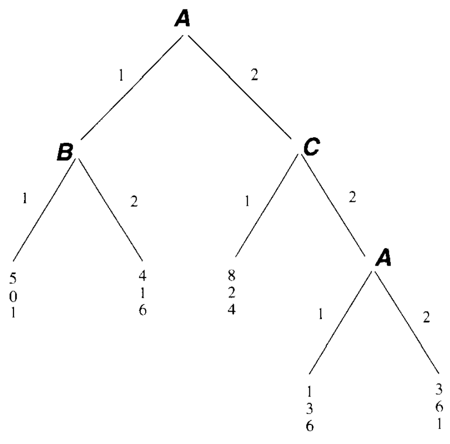

図1　展開型ゲーム

定義 2.2（完全情報ゲーム） 与えられた展開型ゲーム$\langle \Gamma, N, \{\pi_i\}_{i\in N}, \phi\rangle$が完全情報ゲームである，とは，任意のノードにおいて，すべてのプレイヤは「誰が，どういうアクションをとってきたか」を記憶している，の謂である．つまり参加しているゲームにおいて，現在そのゲームがどのノードに到達しているか，をすべてのプレイヤは知っているということになる．

定義 2.3（モデル） 展開型ゲーム$\mathcal{G}=\langle \Gamma, N, \{\pi_i\}_{i\in P}, \phi\rangle$を所与とする．**$\mathcal{G}$のモデル**とは，三つ組$\langle \Omega, \{P_i\}_{i\in N}, \mathbf{s}\rangle$である．ここに，$\Omega$は世界の状態を表示する集合，$P_i$は

$P_i: \Omega \to 2^{\Omega}$

であり，プレイヤiの**可能性対応**（probability correspondence）とよばれる．通常，この可能性対応は，エージェントの保有する情報の「精緻さ」を表現する．(Ω, P_i)の二つ組を，**プレイヤ（エージェント）iの情報構造**とよぶ．さらにsについて，まずプレイヤiがとることが可能なアクションの集合をA_iと表示して，

$\sigma_i: \phi^{-1}(i) \to A_i$

を**iの戦略**とよぶ．iがとり得る戦略全体の集合をΣ_iと表示して，

$\mathbf{s}: \Omega \to \prod_{i\in N} \Sigma_i$

とする．なお，$\prod_{i\in N} \Sigma_i$の要素は通常**戦略プロファイル**とよばれる．

可能性対応は，プレイヤの世界に対する「認識力」を規定する．つまり$\omega' \in P_i(\omega)$は，「プレイヤiは，世界の状態ωにおいて，世界の状態ω'と実際のωを区別できない」の謂となる．

$\mathbf{s}(\omega)$の値の意味は，「世界の状態がωにある場合，各プレイヤの戦略はこれこれである」ということになる．なお，「世界の状態がωであったときに，プレイヤiがとる戦略」を，$\mathbf{s}_i(\omega)$と表示することとする．つまり

$\mathbf{s}_i: \Omega \xrightarrow{\text{(onto)}} \Sigma_i$

である．onto 写像である理由は，「どのような戦略も，『とられ得ない』ことはない」という直観による．

可能性対応について，本稿では次の二つを仮定する：

1) $\omega \in P_i(\omega)$ for all $\omega \in \Omega$,

2) $\omega' \in P_i(\omega)$ implies $P_i(\omega) \subseteq P_i(\omega')$

1)の意味は，「iは，実際の世界の状態を，『可能な

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

状態』の一つとして認識できている」という仮定，また2)は，「世界の状態が ω のときにもし i が『自分は ω' という状況下にいるのかもしれない』と思うならば，ω' という状況下では，ω とそれに類似する状況：$P_i(\omega)$ と ω' をも区別できないであろう」となる．

命題 2.4 展開型ゲームのモデル $\langle \Omega, \{P_i\}_{i\in N}, \mathbf{s}\rangle$ において，P_i に上記1)，2)を仮定すると，

$\bigcup_{\omega\in\Omega} P_i(\omega)=\Omega$，かつ

$P_i(\omega)\cap P_i(\omega')\neq\emptyset \rightarrow P_i(\omega)=P_i(\omega')$

が成り立つ．

証明：略．■

つまり，P_i は1)，2)というある種自然な条件で，Ω 上に分割を構成する．このように $i\in N$ それぞれに対応して構成された Ω 上の分割を，**i の情報分割** (information partition) とよぶ．

定義 2.5 (イベントの認識) 一般に $E\subseteq\Omega$ をイベントとよぶ．今，

$K_i : 2^{\Omega}\ni E\mapsto\{\omega\in\Omega|P_i(\omega)\subseteq E\}$

なる対応を定義する．このとき，もし $K_i(E)\neq\emptyset$ であれば，**i は $\omega\in K_i(E)$ において，イベント E を認識しているという．**

$K_i(E)$ は，「i がイベント E を認識する，というイベント」となる．

定義 2.6 (共有知識 (例えば文献[7])) 与えられた展開型ゲームのモデル：$\langle \Omega, \{P_i\}_{i\in N}, \mathbf{s}\rangle$ のイベント $E\subseteq\Omega$ について，

$$A(E)=\bigcap_{i\in N} K_i(E)$$

として，さらに

$$C(E)=A(E)\cap A(A(E))\cap A(A(A(E)))\cap\cdots$$

なる集合を定義する．$C(E)$ が非空のとき E は**共有知識であるといい**，$C(E)\subseteq\Omega$ は，「E が共有知識である」というイベントである．

展開型ゲームのモデル $\langle \Omega, \{P_i\}_{i\in N}, \mathbf{s}\rangle$ を所与とし，条件1)，2)が成立しているものとする．このとき，$\mathbf{s}_i^{-1}(\sigma_i)\subset\Omega$ は，「i が戦略 σ_i をとる，というイベント」となる．この場合，もし，($\mathbf{s}_i(\omega)=\sigma_i$ として)

$$K_i(\mathbf{s}_i^{-1}(\sigma_i))\supseteq P_i(\omega),\quad \text{for all } \sigma_i\in\textstyle\sum_i \tag{1}$$

であるならば，次が成立する：

命題 2.7 上記式(1)が成立しているとき，またそのときに限って，$\omega'\in P_i(\omega)$ は常に $\mathbf{s}_i(\omega)=\mathbf{s}_i(\omega')$ を含意する．

証明：$\omega\in\Omega$ とする．任意の $\omega'\in P_i(\omega)(\omega\neq\omega')$ について，(1)より $\omega'\in K_i(\mathbf{s}_i^{-1}(\sigma_i))$ つまり $P_i(\omega')\subseteq \mathbf{s}_i^{-1}(\sigma_i)$，よって $\mathbf{s}_i(\omega')=\sigma_i=\mathbf{s}_i(\omega)$．逆に，いかなる $\omega''\in P_i(\omega)$ に関しても $\mathbf{s}_i(\omega)=\mathbf{s}_i(\omega'')$ であるから $P_i(\omega'')\subseteq\mathbf{s}_i^{-1}(\sigma_i)$，よって定義2.5より $\omega''\in K_i(\mathbf{s}_i^{-1}(\sigma_i))$．■

命題2.7より，式(1)は前提となすべきプレイヤ i の性質を規定する．すなわち，もし式(1)が成立するような i は，**自分のとる戦略をきちんと認識している**と解釈できる．本稿では，式(1)を常に仮定して議論を行う．

3. 「合理性」を概念操作の対象となす

完全情報ゲームという条件をもうけた上で，合理性の議論が比較的クリアに行えることを以下に見ていく．また本節は，枠組自体を紹介するという本稿の主旨の一つにそって，やや多くの記法や概念を導入していく．

展開型ゲーム $\mathcal{G}=\langle \Gamma, N, \{\pi_i\}_{i\in N}, \phi\rangle$ と，そのモデル $\langle \Omega, \{P_i\}_{i\in N}, \mathbf{s}\rangle$ を所与とする．まず任意の戦略プロファイル：$(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)\in\prod_{i\in N}\sum_i$ は，任意のノード v からターミナルノードへいたる道筋を一意に決定することに注意し，このとき決定されるターミナルノードを $\tau_v(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)$ で表示する．

完全パスとは，ルートノードからあるターミナルノードへいたる，一意に決定されるパスのこととする．$(v_r, v_1,\cdots,t)$ (v_r はルートノード，また $v_i\in V, t\in T$) のように表示する．また**パス**とは，すべての完全パスおよび，任意の完全パス $(v_r,\cdots,v_j,\cdots,v_k,\cdots,t)$ の，部分列すなわち：$(v_j,\cdots,v_k)$ と表示できるものすべて，とする．

戦略プロファイル $(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)$ によってパス $(v_j,\cdots,v_k)$ が“実現”される場合，つまりこの戦略プロファイルで，ノード v_j からゲームをはじめるとノード v_k にいたる場合，

$(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)\Vdash(v_j,\cdots,v_k)$ あるいは

$(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)\Vdash_{v_j}v_k$

のように表示することとする．つまり，

$(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)\Vdash_{v}\tau_v(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)$

がつねに成立する．また，任意の戦略プロファイル $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{j-1},\sigma_j,\sigma_{j+1},\cdots,\sigma_m)$ に対応して，$\sigma_{-j}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{j-1},\sigma_{j+1},\cdots,\sigma_m)$ という，よく用いられる記法も採用しておく．展開型ゲームのモデルにおける戦略プロファイル $\mathbf{s}(\omega)$ についても，同様の記法：$\mathbf{s}_{-j}(\omega)$ を用いる．

これから，任意の戦略プロファイルとノード v から各プレイヤの利得を与える写像：

 © 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$\hat{\pi}_v : \prod_{i \in N} \sum_i \ni (\sigma_1, \cdots, \sigma_m)$$
$$\mapsto (\pi_1(t), \cdots, \pi_m(t)) \in \mathrm{R}^m$$

(ただし，$t=\tau_v(\sigma_1, \cdots, \sigma_m)$)が定義できる．これも，個々のプレイヤに対応して，$\hat{\pi}_{v,i}(\sigma_1, \cdots, \sigma_m)=\pi_i(t)$ などと記法を定義しておく．

定義 3.1 展開型ゲームとそのモデルにおいて，**世界 ω におけるプレイヤ i が，ノード v において，合理的であるとは，**

$$(\exists\, \omega' \in P_i(\omega))(\forall\, \sigma_i \in \textstyle\sum_i)$$
$$(\hat{\pi}_{v,i}(\mathbf{s}(\omega')) \geq \hat{\pi}_{v,i}(\mathbf{s}_{-i}(\omega'), \sigma_i)) \tag{2}$$

つまり，ノード v にいたった所で，ω' という i にとって可能性を否定できない世界で，i がとることになる戦略 $\mathbf{s}_i(\omega')$ が，最適反応になっている，ということである．これを用いて，

定義 3.2 (Aumann の実質合理性 ([5, 6])) 与えられた完全情報展開型ゲームとそのモデルにおいて，プレイヤ i が世界 ω において**実質合理的**であるとは，任意のノードについて，式(2)が成立することである．

さて，この定義について次の疑問が生じる．「完全情報なのであるから，あるプレイヤが，ノード $v(\neq v_r$：ルートノード) にいたったと想像した場合に，v にいたるという仮想的な世界は『もとの世界とは必ずしも一致しない』はずである」．

「合理的」である i の思考は，「v にいたる，ということを仮定すると，世界の認識を少々変更せねばならないが，それでも最適反応をするように戦略を設定しておく」となるはず，との直観である．

この直観は，プレイヤ i が，世界 ω の中で，v にいたったと想像したときに「想定する」世界 $\omega'=e_i(\omega, v)$ をまず規定することを要求する．つまり，その ω' において「合理的」に行動するような $\mathbf{s}_i(\omega')$ が選ばれることが，i の合理性の定義として採用されねばならない．

そのような $\omega'=e_i(\omega, v)$ はどのような規定をうけるか．文献[1, 2]にて提示されている条件を，やや形式的に書き直してみると：

F 1)：$\mathbf{s}(e_i(\omega, v)) \Vdash_{v_r} v$,

F 2)：$\mathbf{s}(\omega) \Vdash_{v_r} v$ ならば $e_i(\omega, v)=\omega$,

F 3)：v またはそれより下にあるノードを $V|_v$ で表示して，任意の $v' \in V|_v$ について，また任意のプレイヤ i について，もし $v' \in \phi^{-1}(i)$ ならば，$\mathbf{s}_i(e_i(\omega, v))(v')=\mathbf{s}_i(\omega)(v')$.

F 1) は，「v は $e_i(\omega, v)$ において実際に到達されねばならない」，F 2) は，「ω において v が実際到達されるとすると，i の想定は ω でよい」，F 3) は，「$e_i(\omega, v)$ なる『想定された別の世界』は，v 到達より以前の変更だけ，とみるのが自然である」の謂である．

定義 3.3 (Stalnaker の実質合理性 [2]) 展開型ゲームとそのモデルにおいて，世界 ω においてプレイヤ i が実質合理的であるとは，i が任意のノード v で，世界 $\tilde{\omega}=e_i(\omega, v)$ において合理的である，の謂である．すなわち，

$$(\exists\, \omega'' \in P_i(\tilde{\omega}))(\forall\, \sigma_i \in \textstyle\sum_i)$$
$$(\hat{\pi}_{v,i}(\mathbf{s}(\omega'')) \geq \hat{\pi}_{v,i}(\mathbf{s}_{-i}(\omega''), \sigma_i)) \tag{3}$$

が任意のノード v において成立するとき，となる．

定義 3.2 と定義 3.3 がどのように違うのか，以下のような簡単なイグゼンプラにより見ることができる．

まず，世界 $\Omega=\{\omega_1, \cdots, \omega_5\}$ とする．プレイヤは $\{A, B\}$ で，$\phi^{-1}(A)=\{A1, A2\}, \phi^{-1}(B)=\{B\}$ であり，アクションは A, B ともに $\{L, R\}$ である．

$$\mathbf{s}(\omega_1)=(LR, L) \qquad \mathbf{s}(\omega_2)=(RR, L)$$
$$\mathbf{s}(\omega_3)=(RL, L) \qquad \mathbf{s}(\omega_4)=(RR, R)$$
$$\mathbf{s}(\omega_5)=(RL, R)$$

($\mathbf{s}_A(\omega_1)(A1)=L, \mathbf{s}_A(\omega_1)(A2)=R, \mathbf{s}_B(\omega_1)(B)=L$, 等々という意味) また，

$$P_A(\omega_k)=\{\omega_k\} \text{ for all } k \in \{1, \cdots, 5\},$$
$$P_B(\omega_k)=\{\omega_k\} \text{ for } k=1,4,5 \text{ and}$$
$$P_B(\omega_2)=P_B(\omega_3)=\{\omega_2, \omega_3\}$$

とする．

まず明らかに，この例では B は，世界 ω_1 ではノード B において合理的ではない．つまり Aumann の意味 (定義 3.2) の実質合理性は ω_1 にて成立しない．さらに，定義 2.6 により，Aumann の意味での実質合理性が ω_1 にて共有知識であることもない．一方，B は世界 ω_2 ではノード B において合理的である，

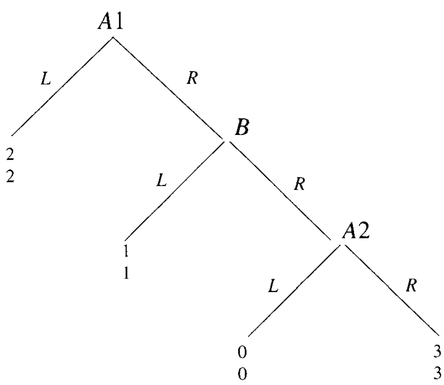

図 2 イグゼンプラ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

というのはBはAがノード$A2$においてLをとる可能性を否定できないからである（$P_B(\omega_2)=\{\omega_2, \omega_3\}$）．同様に，プレイヤ$A$は世界$\omega_4$ではノード$A2$において合理的である．ここで，先に導入した，F 1)〜F 3) をみたす対応$e_A(_,_)$, $e_B(_,_)$を考える．この場合，あきらかに$e_B(\omega_1, B)=\omega_2$であり，$e_A(\omega_1, A2)=\omega_4$であることから，定義3.3により，$A, B$双方は$\omega_1$においてStalnakerの意味で実質合理的であり，よって，ω_1においてStalnakerの意味での実質合理性は共有知識である．

結論：上記の例において，我々は世界ω_1でのStalnakerの意味での実質合理性が共有知識であることをみた．ところが，ω_1では，ゲームの「合理的解」であるバックワードインダクションソリューション（例えば教科書として文献[4]）は得られない（ω_4にて得られる）．一方，この例においては，Aumannの意味での実質合理性が共有知識となることはない（Aumannは，文献[6]において，実質合理性の共有知識は，かならずバックワードインダクションソリューションを含意する，という意味の定理を証明している．このイグゼンプラは，その一例を提示している）．

●Aumannの意味での実質合理性が共有知識である⇒それはバックワードインダクションソリューションを提供する，

●Stalnakerの意味での実質合理性が共有知識であることは，かならずしもバックワードインダクションを含意しない．

4. 結論

我々はエージェントの行動を規定するその情報「力」を定式化する数理的な枠組を，見てきた．特に，完全情報展開型ゲームにおける実質合理性という概念を，エージェントの情報構造（本論の中では，与えられたゲームに対応するモデルという形であらわれた）を用いて二通りに定義し，その違いをイグゼンプラを通じて観察した．

このような枠組は，まだそれほど一般的ではないとも思える．ここで紹介したことは，Aumannをはじめとする先人の，比較的最近の結果の（あまり忠実でない）片鱗である（筆者自身が己の考究の課程で導入した概念をも（便宜的に）含んでいることをここに申しそえる）．

「合理的であるかどうか」といった非常に抽象的な概念が，ゲーム理論という実際問題を直接的に扱う枠組のなかで，どうやら輪郭を見せてくれる，という事実はそれなりに示唆に富むのではなかろうかと筆者は考えるものである．枠組そのものについてのご教示を含め，識者の御意見，御批判をたまわれば幸いである．

参考文献

[1] J. Y. Halpern: Hypothetical Knowledge and Counterfactual Reasoning, *Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge: Proc. Seventh Conference, San Francisco, Calif.*, 83-96, 1998.

[2] R. C. Stalnaker: Knowledge, Belief and Counterfactual Reasoning in Games, *Economics and Philosophy*, 12, 133-163, 1996.

[3] 西村和雄：ミクロ経済学入門，岩波書店，1995.

[4] H. Gintis: Game Theory Evolving: A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Behavior, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2001.

[5] R. J. Aumann: Rationality and Bounded Rationality, Nancy Schwartz Lecture, Kellogg Foundation, 1996.

[6] R. J. Aumann: Backwards Induction and Common Knowledge of Rationality, *Games and Economic Behavior*, 8, 6-19, 1997.

[7] J. Geanacoplos: Common Knowledge, R. Aumann, S. Hart, eds.: Handbook of Game Theory, Elsevier, Leiden, 1438-1496, 1994.

[8] H. A. Simon: "Theories of Bounded Rationality", *Decision and Organization*, C. B. McGuire and R. Radner, eds., 22, 161-176, North Holland, Amsterdam, 1972.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．