数理計画とシミュレーションのハイブリッド法
—ロジスティクス計画への応用を中心として—

森戸　晋

サプライチェーンマネジメントに象徴されるように，オペレーショナルな側面を視野に入れながらシステム全体の最適化を図る必要性が高まるなかでモデル分析の果たす役割が少なくない．こうした状況で，無理に一種類のモデルで問題を表現すると，モデルが複雑になり解の導出がおぼつかなくなるおそれもある．本稿では，数理計画による最適化とシミュレーションによる性能評価を反復的に繰り返すハイブリッド法を取り上げ，コールセンタの勤務シフトスケジューリングや，ロジスティクス設備配備計画を例に，切除平面を用いたハイブリッド法を中心に，最適化/シミュレーション併用の形を紹介する．

キーワード：数理計画，シミュレーション，ハイブリッド法，切除平面，ロジスティクス

1. はじめに

サプライチェーンマネジメントに象徴されるように，一見オペレーショナルなディテールに見えることが経営戦略や企業の業績に少なからぬ影響を与える時代となっている．このような状況下でオペレーショナルな側面を視野に入れながら，システム全体の最適化を図る必要性が高まっている．

計画は元来最適化を指向していることが多いので，最適化技法の活用を考えるのが自然である．しかし，決定要因が性能に及ぼす影響が完全に分からず，現実的に求解可能な最適化モデルの構築が容易でないことも少なくない．最適化を指向する問題ではあるが，数理計画だけで問題を表現し解を求めるのはつらいという状況では技法の併用が自然と頭に浮かぶ．

数理計画の結果をシミュレーションで評価する一方通行型の併用はよく見かけるが，数理計画とシミュレーションを反復的に併用して最良の意思決定を探るというアプローチは少ない．数理計画で得られる結果のフィージビリティをシミュレーションでチェックするという話はあるが，チェックにパスしなかったらどうするかについては言及されていない．本稿では，ロジスティクス計画を念頭に数理計画とシミュレーションの反復的併用法とその応用を紹介する．

もりと　すすむ
早稲田大学 理工学部経営システム工学科
〒169-8555 新宿区大久保 3-4-1

2. 最適化とシミュレーションの併用

2.1 技法併用のシナリオ

最適化とシミュレーションの併用がふさわしいロジスティクス計画問題のシナリオの紹介から始めよう：

シナリオ1：ハブ局から複数のノンハブ局を放射状に結ぶ郵便ネットワークがある．各局で集収される郵便量の推定値，ノンハブ局からハブ局へのトラック便のスケジュール，郵便をソートする区分機の処理能力は既知とする．宛地までの時間制約を満たすために，集収された郵便が長距離便の出発時刻に間に合うためには，何時までにハブ局に届けられなければいけないかが分かっている．このとき，スペース等の制約条件を満たし，総費用最小となるように，各局で集められた郵便を処理するには，どの局に何台の区分機をおいて区分すればよいか．□

シナリオ2：ある巨大コールセンタでは，あらかじめ定められた多数の勤務シフトそれぞれに対し何名のスタッフを割り当てるかを決めなければならない．勤務シフトごとの1人当たりの費用や時間帯ごとの顧客の到着率が既知であるとき，顧客の待ち時間などに関する一定のサービス水準を保つ最小費用勤務シフトスケジュールを求めたい．□

これらのシナリオに共通するのは，動的要因をはじめとするシステムの詳細を考慮したときに，広義の「サービス規準」を満たし，費用を最小化する計画の立案である．上位階層では費用最小化を目指し，下位階層はオペレーショナルディテール（最近ではこれ

がしばしば市場における競争力と密接に関係する）に関わる条件を設定しその満足化を図ることにより，問題を階層的にとらえることができる．

2.2 最適化・シミュレーション問題の類型

シミュレーションをしながら最適化を図る問題は，大きく分けると次の二つのタイプに分けられる：

1. シミュレーションによって目的関数（および制約条件）の評価をしながら最適政策を探索
2. ラフな（大雑把な）最適化＋シミュレーションによるフィージビリティチェック

前者は実験を繰り返しながら最適条件を探るもので，実験がシミュレーションでなければ古くから様々な分野で行われてきたことである．一方，後者は主要なコスト要因だけを考慮した最適化モデルを解いてマクロレベルにおける最小コストの解候補を生成し，次に，得られた解候補のフィージビリティをシミュレーションで確認するというアプローチである．

前者のタイプは，離散型シミュレーションの分野で「シミュレーション最適化（simulation optimization)」の名の下に1980年代以降盛んに研究が行われており，摂動解析法（Perturbation Analysis；PA）などによる勾配の推定と最適化，実験計画の流れをくむRanking and Selection法などが知られている（例えば，Fu[2]，三好[5]参照）．しかし，これらの技法が選択肢の数が多く，資源制約が最適化に複雑に絡む問題に対する技法として有効か否かについては未知の点が多くソフトウェアも完備していない．次では，後者のタイプの問題を想定し，数理計画とシミュレーションを併用したハイブリッド法に的を絞る．

2.3 数理計画とシミュレーションの強み・弱み

数理計画は相互に競合しあう資源制約のもとで多くの選択肢のなかから最適な政策を探る．これに対して，元来，評価技法であるシミュレーションは最適化に弱い．数理計画はマクロな意味での費用最小化，利益最大化に強い反面，解が天下り的に与えられるというきらいがあり，意思決定者への説明力・説得力に欠け，結局，説明・説得のためにシミュレーションが必要になることも少なくない．シミュレーションはミクロなものの動きや人為的な規則の表現を得意とし，モデル化の自由度や説明力・説得力に優れ，アニメーションを併用すれば説明効果が一層高まる．

数理計画モデルは，目的関数や制約条件を，通常，線形関数や線形の等式・不等式で表現する．しかし，現実のシステムに数理計画モデルとして表現困難な側面が存在しても不思議ではない．システムの動きを規定するメカニズムが分からないというわけではないけれども，数理計画モデルに定式化することが容易でない，得策でないと考えられる側面があってもおかしくない．数理計画の定式化を難しくする主な要因として次の三つをあげておく：

1. 確率的変動を伴う現象，とりわけ待ち行列タイプの混雑現象
2. 複雑かつ往々にして人為的な規則や詳細な条件（表現できても問題の規模をいたずらに大きくするため数理計画モデルに組み込みたくないような条件）
3. 時間とともに変動する（動的・非定常な）挙動

1や3は数理計画でも扱えるが，モデル化の自由度がかなり制限される．さらに，ロジスティクスへの応用では1，2，3が混在する場合が少なくない．こうした要因は計画全体に少なからぬ影響を及ぼしうるため，最終的に意思決定者に受け入れ可能な，真に実行可能な案を作り出すためにはどこかでこうした要因を含めた分析評価が必要となる．

3. 数理計画による最適化とシミュレーションによる評価の枠組み

3.1 ハイブリッド法設計のポイント

ここでは，数理計画による最適化とシミュレーションによる評価を併用したハイブリッド法を設計するに当たってのポイントを考えてみる．

(1) 各モデルの「守備範囲」の決定

様々な種類のモデルが存在するので，対象とするシステムを無理に一種類のモデルで表現しなければいけないというわけではない．両者の「いいとこどり」をする形で，各モデルの守備範囲を決めればよい．

サプライチェーンの設計，ロジスティクスネットワークの設計，運搬経路計画などの意思決定では，一般に考えられるネットワークの形状やパラメータの組合せが極めて多い．そのため，シミュレーションは設計段階の技法として適当ではなく，数理計画で設計案を絞り込んだ後でのシミュレーションが効果的である．

多くの場合，マクロな経済指標に対するラフな最適化を数理計画が担当し，その結果定まる戦略的決定要因のもとでシステムの詳細を取り込んだ性能評価をシミュレーションが担当し，フィージビリティをチェックしながら，最良なシステムを設計していく．この際，モデル化の容易さやモデルの複雑性を考えるとともに，

両モデルの計算効率を視野に入れてモデルの役割分担を決める必要がある.

(2) 反復メカニズムの設計と収束判定基準

数理計画とシミュレーションを往復するハイブリッド法の設計でポイントとなるのは,最適化モデルの「解(=提案)」をシミュレーションで評価した後に,反復を繰り返すか否かを判断するとともに,評価結果がノーの場合に数理計画モデルをどう修正するかのメカニズムである.具体的には,追加する制約条件(切除平面)の導出,それに必要な勾配などの計算,制約条件の修正方法などを定める必要がある.

(3) 各モデル実行の詳細設計,有限収束性など

各モデルをどう「解く」かに当たって解法の詳細設計が必要となる.特に確率変動を伴うシミュレーションの実行においては,ランの長さや回数,さらには同じ労力でより精度の高い結果を得るための分散減少法活用の検討などが必要となる.また,構築したハイブリッド法の収束性に関する理論的な保証や,実験的な収束性の確認が望まれる.

3.2 解法アプローチ

この種の問題に対する解法戦略として,次のようなアプローチが考えられる:

1. 実行可能解を順次改善していくアプローチ
2. 主な要因だけを考慮した数理計画を解いて得られた設計案をシミュレーションで評価し,詳細面も含めて許容と判断される解を得るアプローチ
3. 数理計画から得られる最適解がシミュレーション評価の結果元の問題に対して実行可能であったり実行不可能であったりを繰り返し,適当な収束判定基準が満たされるまで数理計画とシミュレーションを繰り返すアプローチ

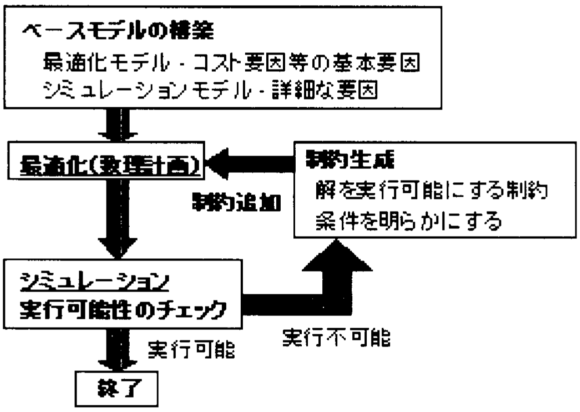

図1 制約追加型解法の枠組み

アプローチ3は,いわば本来の問題の緩和問題(近似問題)を攻め,シミュレーション評価の結果を受けて制約を順次追加・修正し,最終的に本来の問題の許容解を得ようとするものである.

次では「実行不可能領域から攻め」,解を実行可能にするように制約(切除平面)を追加するアプローチを2種類紹介する.図1は制約追加型の解法の基本的なフレームワークを示している.

4. 切除平面によるハイブリッド法の適用

4.1 コールセンタの勤務スケジューリング

Henderson and Mason[4]は,大規模なコールセンタにおける勤務スケジューリングへの応用に対して,整数計画法とシミュレーションの併用を考え,シミュレーション結果から切除平面を生成することによって整数計画を解きなおすという反復的解法を提案している.まず,Hendersonらが取りあげた問題の概略を紹介する:

1. 所定のサービス規準を満たすコールセンタの,最小コスト勤務シフトスケジュールを作成する
2. サービス要求(顧客)の到着はランダムで,到着率は時間とともにダイナミックに変動する
3. 隣接する時間帯において前の時間帯の処理残が次の時間帯のサービス性能に影響する
4. 勤務スケジュール作成に当たっては,種々の労働規則など多くの制約を満たさなくてはならない

勤務スケジュールのコスト効率を上げるためには,時間帯によって必要以上のスタッフを配することによって,全体のコスト削減が達成される可能性もある.

システムが短時間で定常状態に達するならば,待ち行列モデルによって定常状態を評価して必要スタッフ数を算定できる.ところが,多くのサービスシステムでは過去の履歴をひきずることが多く,定常状態で近似することに無理がある.そこで,こうした非定常なダイナミックな推移をシミュレーションによって評価し,その情報をもとに整数計画による最適化でスタッフ数ならびにスタッフの勤務スケジュールを決めるというアプローチを採用している.

まず,勤務パターンを列挙する.勤務パターン行列L(所与)は,列がある勤務パターンを示し,時間帯iを勤務する(しない)ときi行が1(0)の値をとる0-1行列である.変数x_jは勤務パターンjのスタッフ数,定数c_jは勤務パターンjのコストである.ベク

トル s は必要スタッフ数のベクトルで，変数 s_i が時間帯 i の必要スタッフ数を示す．時間帯ごとの必要スタッフ数が定数として与えられるのであれば（必要スタッフ数の算定に当たっては待ち行列の知識やシミュレーションが必要であろう），それを入力データとして勤務スケジュールを整数計画によって求めればよい．しかし，時間帯ごとの混雑状況が独立でなく，ある時間帯の混雑状況が後続する時間帯の混雑に影響を及ぼす状況においては s_i を定数と扱うことには問題がある．

整数計画問題（IP）は，次のような形となる：

$$\begin{array}{lll} \text{(IP)} & \min & c^T x \\ & \text{s.t.} & Lx - s \geq 0 \\ & & As \geq b \\ & & x, s \geq 0 \quad \text{and integer.} \end{array}$$

ここに，$r = Lx$ は各時間帯に勤務するスタッフ数のベクトルとなり，$Lx \geq s$ によって必要スタッフ数を確保するスケジュールを作ることになる．

時間帯ごとの必要スタッフ数の下界値は，時間帯 i を空（empty and idle）の状態からシミュレートすることで得られる．確率変動を考慮するために当該時間帯のシミュレーションを繰り返して，サービス品質の値 Q_i（詳細は文献[4]参照）がサービス規準をかろうじて超えるように時間帯 i のスタッフ数 s_i を設定する．次に，(IP) を解き，初期勤務スケジュール x とスタッフ数 $r = Lx$ を得る．

時間帯 i のサービス品質 Q_i が，$r_1, r_2, \cdots, r_i$ の凹関数であると仮定すると，$Q_i = g_i(r)$ と書け，$g_i(r)$ は，$r_1, \cdots, r_i$ までの関数である．このとき，関数 g が凹関数であることより，点 r における g_i の劣勾配 v_i は

$$Q_i(s) \leq g_i(r) + v_i^T(s - r)$$

となる．サービス品質 Q_i は所与のサービス規準 m_i 以上でなければならないので，

$$v_i^T s \geq v_i^T r + m_i - g_i(r)$$

となり，サービス規準を満たさない Q_i が存在するときこの不等式は（IP）の切除平面となる．サービス規準 m_i を満たさない Q_i ごとに，このような切除平面を導き（それらを組み合わせることもできる），これらを（IP）に追加して再度，整数計画問題を解く．このように，整数計画の求解，シミュレーション，切除平面の追加，整数計画の求解が繰り返される．

解法の流れは次のようにまとめられる：

1. スタッフ数 s の初期下界値 b を定める
2. $A = I$ とする
3. 勤務スケジュール作成問題（IP）を解き，$r = Lx$ を得る
4. r をシミュレータに送り，各時間帯のサービス品質 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_p$ を得る
5. 定められた収束判定基準を満たすときに，勤務パターンごとのスタッフ数 x とサービス品質 Q_i を出力して終了．収束判定基準を満たさないときは，上述のカット（複数本でも可）を（IP）に加えるべく，A と b を修正した上で3へ

ここで，劣勾配をどのように求めるかが問題となる．シミュレーションによる勾配推定法として，摂動解析法（PA）や尤度比法（likelihood ratio method）などがあるが，適用の条件が厳しく，特に整数変数の問題への適用は難しい．そこで，Henderson らはより頑健な方法として有限差分（finite difference）アプローチを用い，時間帯 i のスタッフ数 r_i を $r_i + 1$ または $r_i - 1$ にずらして再度シミュレーションを行っている．これによって，時間帯 $j \geq i$ に対して，劣勾配ベクトル v_j の i 番目の要素を推定する．時間帯 $j < i$ の品質は，r_i には影響を受けないので，$v_j(i) = 0$ である．

なお，Atlason ら[1]が，切除平面に基づく Henderson らのハイブリッド法の有限収束性を証明している．

4.2 郵便区分機の最適配置

Morito ら[6]は，冒頭のシナリオ1に示した一種の施設配置問題に対して，混合整数計画とシミュレーションを併用し，図1のようにシミュレーションの結果が受け入れ可能でない場合は，解を実行可能にする制約（より正確には，受け入れられない解を実行不可能とする制約）を付加して数理計画を解きなおす，という解法を提案・評価している．シナリオ1における「ハブ局」，「ノンハブ局」はそれぞれ，地域区分局，一般局と呼ばれており，問題は郵便の引受，区分処理や輸送に関する時間的制約や局舎スペースの制約を考慮した上で，費用最小な区分機の配置を求める問題である．

4.2.1 数理計画モデルの前提条件

数理計画モデルの主な前提条件は次の通り：

1. 1日に引き受ける郵便物の区分を考える
2. 引き受けた郵便物は自局が区分局の場合は自局ですべて区分し，自局が区分局でない場合は自局より地域区分局に近い一つの区分局（地域区

分局を含む）で区分する
3. 配達先が他の地域区分局，他の郵便線路の場合はいったん地域区分局を通過し，他の地域区分局から届けられた郵便物は地域区分局で区分されてから一般局に配送される
4. 地域区分局と一般局の設備費，および延輸送費の総和を最小化するように，各局の区分機種別毎の台数と手作業による区分作業時間，および，ある局の引受郵便物をどの局で区分するかを決める

4.2.2 数理計画モデルの定式化

変数

m_{ih}：局 i の区分機 h の台数（整数）
n_i：局 i における手作業時間
x_{ij}：局 i で引き受けた郵便物を局 j で区分する場合1，そうでない場合0

定数

a_h：区分機 h の1日1台当たりの設備費
b：1人単位時間当たりの労働費
c_{ij}：局 i，局 j 間の距離
q_{ij}：局 i から局 j への郵便OD量
r：地域区分局での引受通数
d_h：区分機 h 1台当たりの処理能力
e：手作業1人1時間当たりの処理速度
t_h：区分機 h 1台当たりの占有面積
u_i：局 i の設置可能面積
s：郵便1通単位距離当たり輸送費

定式化 （局1は地域区分局と仮定）

(MIP) Min $\sum_i\sum_h(a_h m_{ih}+bn_i)$
$+s\sum_i\sum_j\sum_k x_{ij}(c_{ij}\sum_l q_{il}+c_{jk}q_{ik})$

s. t. $\sum_j x_{ij}=1,\ \forall i, j$ （$\sum$ の局 j は局 i が属す線路上の自局より地域区分局に近い局）
$x_{ij}-x_{ii}\leq 0,\ \forall i, j$
$\sum_i q_{ij}x_{ij}-\sum_h d_h m_{jh}-en_j\leq 0,\ \forall j\neq 1$
$\sum_i q_{ij}x_{i1}+r-\sum_h d_h m_{1h}-en_1\leq 0$
$\sum_h t_h m_{ih}-u_i\leq 0,\ \forall i$
$x_{ij}\in\{0, 1\}, 0\leq m_{ih}\in Z^+, n_i\geq 0,\ \forall i, j, h$

4.2.3 シミュレーションモデルの前提条件

シミュレーションでは，数理計画モデルで求めた区分輸送形態（各局の区分機台数とある局の引受郵便物をどの局で区分するか），（現状の）郵便ダイヤ，および，時間帯ごとの引受通数を入力情報とし，区分機の処理能力が所与のとき，各局で発生したすべての郵便物がいつまでに区分されるかを確認する．シミュレーションモデルの主な前提条件は次の通り：

1. 郵便線路は既存の線路とし，1日3便とする
2. 郵便物の引受は1時間ごとにまとめて行われる．地域区分局においては，他の地域区分局から届けられた郵便物に関しても，自局の郵便物の引受と同様に1時間ごとにまとめて引き受けが行われるものとする
3. 郵便物が引き受けられてから区分が開始されるまでの前処理に30分の時間がかかる
4. 区分機および人員は，ある時間帯（6時～21時）の間，別の用途（配達のための道順組立）に使用されるため，区分は行えない．一般局では22時から6時の間も区分できない
5. 送達基準：区分局においては，0時から15時までに引き受けた郵便物は，その日の最終便までに区分する必要があり，それ以降に引き受けられた郵便物は翌日の1便までに区分することとする．一方，区分を行わない局では1，2便の出発時までに引き受けた郵便物を，区分局において最終便までに区分する必要がある

4.2.4 シミュレーション結果に基づく制約の追加

シミュレーションの結果（図2），すべての局で規定のトラック便の出発時刻までに区分が完了していれば最適な解が得られたことになるので解法は終了する．一方，いずれかの局で区分が完了しなかった場合は，区分をしている局の処理能力が十分でなかったことになる．

例えば，局 i と局 j の郵便物が局 j で区分され，局 j での区分が出発時刻までに完了しなかった場合には，局 j が時間内に処理を完了するために持つべき処理能力 c をシミュレーション結果から求めることができる．これをもとに，「もし，局 i と局 j の郵便物が局 j で区分処理されるとしたら，局 j の処理能力は少な

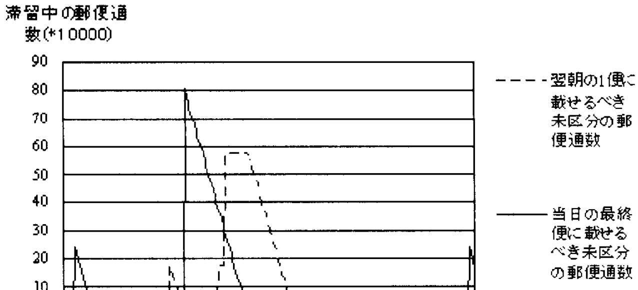

図2 シミュレーション結果

表　計算実験の結果例

反復回数	最終便の出発時刻までに区分を完了しなかった局の数	目的関数値（相対値）
1	3	1
2	1	1.006
3	0	1.009

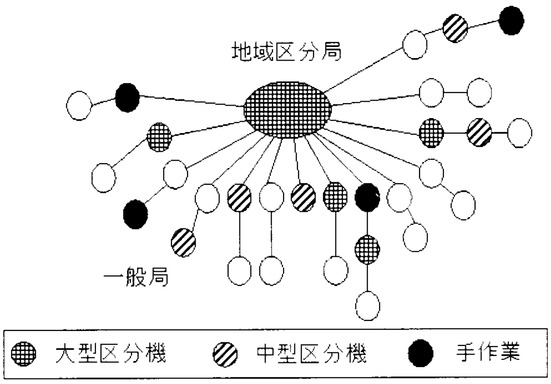

図3　区分機配置結果の例

くとも c 以上でなければならない」という論理条件，

$$cx_{ij} - \sum_h d_h m_{jh} - en_i \le 0$$

を設けることによって，必要な処理能力を確保することが可能となる．追加する制約条件は，区分局が他の2局以上の区分をまかされていたり，自局のみの区分を行っている場合にも同様に設定できる．

このような制約条件を，区分を完了しなかったすべての局に対して設定し，数理計画モデルに加えた上で数理計画モデルを解きなおす．表は，局数30の例に対して，この方法を適用した実験の結果を示しており，3回目の反復で時間内での区分処理を完了できる区分機配置計画が求められている（図3）．

5.　おわりに

最後に，前節で述べたタイプとは異なるハイブリッド法と応用について簡単にふれる．

Byrne and Hosein[2]らは，MRPやJITを想定した生産計画の最適化を取り上げている．在庫バランス制約と生産能力制約の下で，生産費＋在庫保管費＋品切費からなる総費用の最小化を図る数理計画モデルは，単純な負荷山積みで能力制約を評価すると，生産や移動に伴う待ちや変動，ディスパッチング規則などの影響を受けて工程能力をオーバしてしまうおそれがある．そこで，数理計画から得られる計画の工程能力が満足されるかをシミュレーションによって調べ，能力不足（余裕）の場合には生産能力制約をより厳しく（甘く）するように能力制約の右辺定数（生産能力値）あるいは左辺の係数（負荷見積もり）を修正する方法を提案し，少ない反復での収束を実験的に示している．他にも，R＆Dプロジェクト選択およびプロジェクトスケジューリング問題へのハイブリッド法の適用があるが，詳細はSubramanianら[7]を参照されたい．

ハイブリッド法は応用主導で自然発生的に生まれてきたものが多い．ロジスティクスの応用のようにマクロな最適化とミクロのフィージビリティを統一的な枠組みでとらえるためにはハイブリッド法が適しており，今後この種の試みが増えていくであろう．

参考文献

[1] J. Atlason, M. A. Epelman, and S. G. Henderson: "Call center staffing with simulation and cutting plane methods", *Annals of Operations Research*, Vol. 127, pp. 333-358, 2004.

[2] M. D. Byrne and M. M. Hosein: "Production planning: an improved hybird approach", *International Journal of Production Economics*, (to appear).

[3] M. C. Fu: "Optimization for simulation: theory vs. practice", *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 14, pp. 192-215, 2002.

[4] S. Henderson and A. J. Mason: "Rostering by iterative integer programming and simulation", *Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference*, pp. 677-683, 1998.

[5] 三好直人：「シミュレーションによる勾配推定の手法」，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 46, pp. 182-187, 2001.

[6] S. Morito, et al.: "Simulation-based constraint generation with applications to optimization of logistic system design", *Proceedings of the 1999 Winter Simulation Conference*, pp. 531-536, 1999.

[7] D. Subramanian, J. F. Pekny, and G. V. Reklaitis: "A simulation-optimization framework for addressing combinatorial and stochastic aspects of an R & D pipeline management problem", *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 24, pp. 1005-1011, 2000.