大規模施設の混雑現象
—待ち行列理論によるアプローチ—

増山　博之，滝根　哲哉

本稿では，待ち行列理論を用いてデパートや美術館といった大規模施設の混雑現象を考察する．まず初めに，無限個のサーバをもつ待ち行列モデルにおけるサーバ群を一つのサービス施設と見なすことで，大規模施設内の客数過程の挙動をマクロ的に扱うモデルが構築できることを示す．さらに，デパート内の店内客数を例に挙げ，待ち行列理論から得られる様々な知見を紹介する．特に，店内客数は店内滞在時間分布の変動が大きいほど来店客数の時間変化に対して“鈍感”になり，来店客数が急激に増加しても店内客数は緩やかにしか増加しないという興味深い事実を明らかにする．

キーワード：大規模施設，混雑現象，待ち行列理論，無限サーバ待ち行列モデル

1. はじめに

本稿では待ち行列理論を用いて大規模施設の混雑現象を考察してみようと思います．多くの読者は「待ち行列」という言葉を聞くとサーバ（窓口あるいはサービスカウンタ）の前に行列ができているといった状況を思い浮かべるのではないでしょうか．サーバの数は一つかもしれませんし，非常にたくさんあるかもしれませんが，いずれにせよ高々有限個しかないと考えるのが普通だと思います．このような，サーバの数に限りのあるモデルは有限サーバ待ち行列モデルと呼ばれています（図1参照）．

有限サーバ待ち行列モデルでは，客がシステムに到着したとき空いているサーバがあれば，待ち時間なしで直ちにサービスを受けることができます．逆に，到着時にサーバが全て塞がっている場合には，自分の順番が回ってくるまで待合室で待つことになります．こうした現象はスーパーのレジ，銀行の窓口，高速道路の料金所等でよく見かけられます．

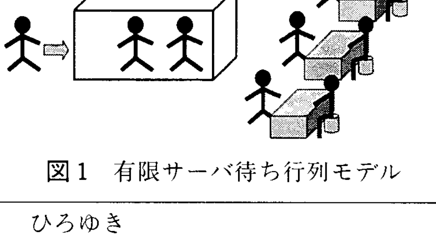

図1　有限サーバ待ち行列モデル

では，サーバ数が限りなく多くなったとすると，客の挙動はどのようになるでしょうか．サーバが無数にあれば，客がシステムに到着したとき必ず空いているサーバがありますから，到着した客はいつでも待ち時間なしでサービスを受けることができます．すなわち，システムがいかに混雑していようとも，他の客とは無関係に到着後直ちにサービスを受けることができ，自分のサービスが終了すればシステムを離れることができます．このようなモデルは無限サーバ待ち行列モデルと呼ばれています．

待ち行列理論に馴染みのない読者にとっては無限サーバ待ち行列モデルが非現実的で，利用価値のないモデルであると感じられるかもしれません．しかし，少し見方を変えて，サーバ群全体を一つのサービス施設と捉えてみましょう．そうすると，無限サーバ待ち行列モデルは，到着したそれぞれの客が自分の要求が満たされるまでサービス施設内に滞在し，要求が満たされれば勝手にサービス施設を離れていくという状況を表すモデルであると考えることができます（図2参照）．

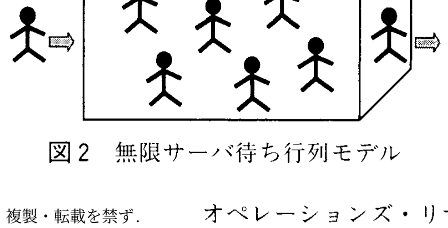

図2　無限サーバ待ち行列モデル

ますやま　ひろゆき
京都大学 大学院情報学研究科
〒606-8501 京都市左京区吉田本町
たきね　てつや
大阪大学 大学院工学研究科
〒565-0871 吹田市山田丘2-1

このような捉え方で無限サーバ待ち行列モデルを用いると，例えば，デパート，美術館，図書館，遊園地といった大規模施設内の客数過程の挙動をマクロ的に扱うモデルの構築が可能となります．また，京都に滞在している観光客の数やインターネットに接続して何らかの作業をしている人の数など，具体的にシステムをイメージしにくい対象にも応用が可能です．次節では，大規模施設の混雑現象の例としてデパート内の客数過程を取り上げます．デパート全体を無限サーバ待ち行列モデルを用いてモデル化し，待ち行列理論を用いることでどのようなことが分かるのかを見ていきましょう．

2. デパートの混雑現象への応用

2.1 観測データから分かること

本格的な待ち行列理論を用いる前に，まず，比較的容易に入手可能な観測データから何が分かるのかを見ておきましょう．この節では，デパートは時刻0に開店し，時刻 T に閉店するものとします．また，開店時の店内客数は0人であり，閉店時に店内にいる客は強制的に退去させられるものとしましょう．$A(t)$ を時刻0から時刻 t までの間に来店した客の総数とし，$D(t)$ を時刻0から時刻 t までの間にデパートから出ていった客（離脱客）の総数とします（図3参照）．

開店時には店内に客がいませんので，$A(t)$ と $D(t)$ の差 $L(t)=A(t)-D(t)$ は時刻 t における店内客数を与えます．したがって，出入り口で累積来店客数と累積離脱客数を数えていけば，開店時刻から閉店時刻までの店内客数の時間変化が観測できます．さらに，一日を通しての単位時間当たりの平均来店客数（到着率）λ と店内にいる客数の平均 l は，それぞれ

$$\lambda=\frac{A(T)}{T},\ l=\frac{1}{T}\int_0^T L(t)dt \tag{1}$$

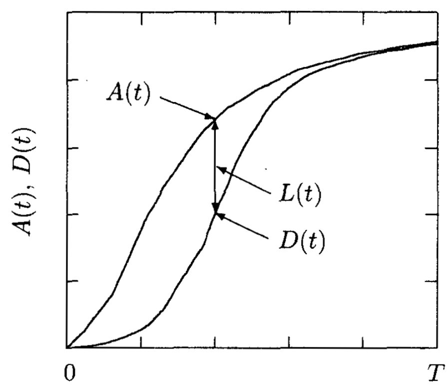

図3 来店客数と離脱客数

を計算すれば求められます．平均店内客数 l の右辺に現れる積分は $A(t)$ と $D(t)$ で囲まれた部分の面積に対応しており，延べ店内客数（時間×人）を表していることに注意して下さい．

次に，来店した客が店内に滞在している時間の平均を考えましょう．n 番目に来店した客の店内滞在時間を H_n で表すとすると，平均店内滞在時間 h は次式で与えられます．

$$h=\frac{1}{A(T)}\sum_{n=1}^{A(T)}H_n, \tag{2}$$

一方，閉店時刻 T にいる客は強制的に退去させられる $(L(T)=0)$ ため，来店した客の店内滞在時間の総和は延べ店内客数に等しくなります．

$$\sum_{n=1}^{A(T)}H_n=\int_0^T L(t)dt \tag{3}$$

式(1)と式(3)を用いて式(2)を書き換えますと

$$h=l/\lambda \tag{4}$$

を得ます．平均店内客数 l と平均店内滞在時間 h の間に成り立つこの関係式はリトルの公式と呼ばれており，待ち行列理論の中でも最も基本的なものです．式(4)を用いると，来店した客の店内滞在時間を直接調べることなしに，平均店内滞在時間 h を求めることができます．

このように，比較的容易に入手可能な累積来店客数ならびに累積離脱客数のデータから分かることもありますが，その結果はデータを取ったある特定の一日にしか当てはまりません．つまり一日の観測データからは別の日の混雑状況に関しては何の情報も得ることができません．次節では，より“普遍的な”混雑状況を把握するために無限サーバ待ち行列モデルを活用してみましょう．

2.2 一定到着率モデル

節2.1で見たように，一日ごとの到着率と平均店内滞在時間は観測することによって簡単に分かりますので，何日間かにわたって観測したデータから客の到着率 λ と平均店内滞在時間 h を定めたとしましょう．その上で，次のような二つの仮定をおいてみます．

(i) 客はランダムに到着し，到着率 λ は時間に依存しない．

(ii) 客の店内滞在時間は独立かつ同一に分布しており平均 h をもつ分布 $H(x)$ に従う．

このときデパート内の客数過程をモデル化した無限サーバ待ち行列モデルはM/G/∞と呼ばれています．

開店時（時刻0）には店内に客がいないとしますと，

このM/G/∞待ち行列モデルの時刻tにおける店内客数分布$\Pr(L(t)=n)(t\geq 0, n=0,1,\cdots)$は次式で与えられます．

$$\Pr(L(t)=n)=\exp[-\rho H_e(t)]\frac{(\rho H_e(t))^n}{n!} \tag{5}$$

ただし，$\rho=\lambda h$であり，$H_e(t)$はサービス時間の平衡分布（equilibrium distribution）です．

$$H_e(t)=h^{-1}\int_0^t(1-H(x))dx$$

式(5)から明らかなように，時刻tに店内にいる客数は平均$\rho H_e(t)$のポワソン分布に従います．また，平均店内客数$\rho H_e(t)$は時刻tの単調非減少な関数となります．さらに，定常状態における店内客数$L=L(\infty)$の分布$\Pr(L=n)(n=0,1,\cdots)$は

$$\Pr(L=n)=\exp[-\rho]\frac{\rho^n}{n!}$$

となり，平均$\rho=\lambda h$のポワソン分布で与えられます．したがって，定常状態では，客の店内滞在時間分布はその平均hを通してのみ店内客数分布に影響を与え，分布の形には依存しません．図4に滞在時間の分布が

(a) 2ステージアーラン分布（変動係数$1/\sqrt{2}$）

(b) 指数分布（変動係数1）

(c) 2状態平衡超指数分布（変動係数$\sqrt{2}$）

の3通りの場合の平均店内客数を示します．店内滞在時間分布の変動が大きいほど，定常状態に近づくのに時間がかかることが分かります．

以上のように，一定の到着率をもつランダムな到着と独立で同一な店内滞在時間分布を仮定しますと，店内客数分布に関して単純でかつ完全な解析結果が得られます．しかし，実際には，来店する客の数は時間帯によって大きく変化すると思われますし，店内客数過程が閉店までに定常状態に到達するとも思えません．そこで，次節では到着率が時間帯によって変化する場合について考察してみましょう．

2.3 非一定到着率モデル

本節では10時に開店し，20時に閉店するデパートを考えることにしましょう．以下では1時間を1単位時間とします．何日間かの観測の結果，1時間ごとに区切られた各時間帯の客の到着率はおよそ表1のようになっていることが分かったとしましょう．また，簡単化のため，客の店内滞在時間は時間帯とは無関係に平均1時間の独立で同一な分布に従うことにします．

詳細は省略しますが，各時間帯での到着がランダムであると仮定しますと，このような到着をもつ無限サーバ待ち行列モデルを解析することが可能です．さらに，一定到着率の場合と同様に，店内客数は時刻tに依存する平均をもつポワソン分布に従うということを示すことができます．図5は，図4と同じ3種類の店内滞在時間分布のそれぞれに対して，解析結果に基づいて平均店内客数を計算した結果を示したものです．図4で与えた一定到着率の場合の結果と比べると，非一定到着率モデルの方がより現実味のあるモデルであることが分かります．

図5をよく見ますと，店内滞在時間分布の変動が大きいほど，閉店時刻が近づき到着率が低くなっても店内客数の減少する速度が遅いことが分かります．この現象を説明するために図5における3種類の店内滞在

表1 客の到着率（人/時間）

時間帯	到着率	時間帯	到着率
10時～11時	500	15時～16時	1000
11時～12時	1000	16時～17時	1000
12時～13時	3000	17時～18時	500
13時～14時	2000	18時～19時	200
14時～15時	2000	19時～20時	100

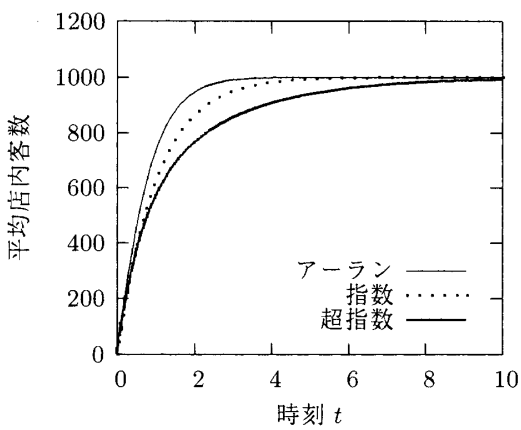

図4 M/G/∞（到着率$\lambda=1000$，平均滞在時間$h=1$）

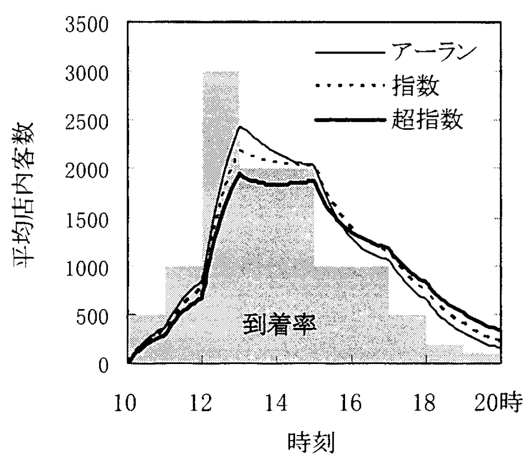

図5 デパート内の平均客数

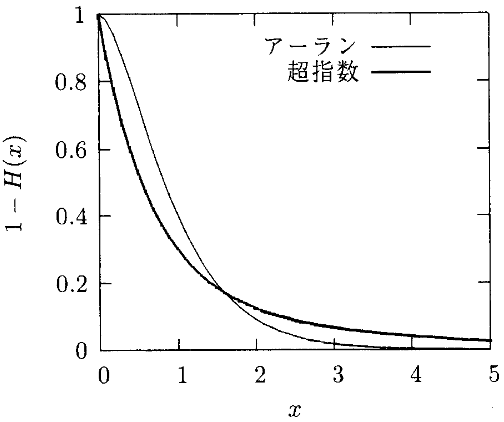

図6 店内滞在時間分布の補分布関数（平均1）

時間分布のうち，変動の最も小さなアーラン分布と最も大きい平衡超指数分布の補分布関数 $1-H(x)$ を図6に示しました．この図から店内滞在時間が変動の大きい平衡超指数分布に従う場合，店内に長く滞在する客がより発生しやすくなることが分かります．その結果，店内滞在時間の変動が大きい場合，閉店時刻よりかなり前に来店した客であっても閉店時刻近くまで店内に留まり続ける可能性が大きくなるため，到着率が減少していっても店内客数はなかなか減少しないと考えられます．

また，図5から，滞在時間分布の変動が小さいほど到着率の増加と共に平均店内客数はより急激に増加し，平均店内客数の最大値も大きくなっていますが，この現象は以下のように説明することができます．ここまでの議論では閉店時に店内にいた客は強制的に退去させられると仮定してきましたが，以下ではこの仮定を取り除き，閉店時刻に店内にいた客はそれ以降も気が済むまで引き続き店内に留まることができるとしましょう．ただし，閉店時刻以降に新たな客は来店しないとしておきます．この結果，閉店後，十分に時間が経てば店内に残っていた客は全て退去し，店内から客がいなくなります．

営業時間内に来店した客は閉店時刻の制約を受けませんので，来店した客の平均店内滞在時間は h で与えられます．ここで，開店時刻を時刻0，閉店時刻を時刻 T，さらに閉店後に店内から客がいなくなる時刻を時刻 T^* としますと，閉店後も含めた1日の延べ店内客数は

$$\int_0^{T^*} L(t)dt = \sum_{n=1}^{A(T)} H_n$$

で与えられます（式(3)参照）．この結果，1日の平均延べ店内客数は

$$E\left[\int_0^{T^*} L(t)dt\right] = E\left[\sum_{n=1}^{A(T)} H_n\right] = E[A(T)]h$$

となり，店内滞在時間分布の形とは無関係です．言い換えますと，図5において，横軸を延長して閉店後の平均店内客数も描いたとすると，平均店内客数を表す曲線と横軸で囲まれた部分の面積は $E[A(T)]h$ で与えられ，3通りの滞在時間分布のいずれの場合も同じ面積になります．上で述べたように，店内滞在時間の変動が大きいほど閉店間際の店内客数が多くなる傾向にありますから，逆に店内滞在時間の変動が小さいほど店内客数が多くなる時間帯が営業時間内のどこかになければなりません．

最後に，この節で観察してきた事柄をまとめておきます．客の到着率が時間と共に変化する場合，店内滞在時間分布の変動が小さいほど店内客数過程は到着率の時間変化に対して“敏感”に反応します．逆に，店内滞在時間分布の変動が大きい場合には，店内客数過程は到着率の時間変化に対して“鈍感”になり，店内の混雑度も比較的緩やかなものとなります．この現象はサービス時間分布の変動が大きくなると混雑度が増す傾向にある単一あるいは少数のサーバをもつ待ち行列モデルとは対照的で，無限サーバ待ち行列モデルに特徴的に見られる現象であることが知られています[1]．

3. おわりに

デパートを例に挙げ，無限サーバ待ち行列モデルを用いて大規模システムの混雑現象を考察しました．本稿では簡単化のため，店内滞在時間は時間帯に関係なく独立で同一に分布していると仮定しましたが，実際には開店して間もない頃に来店した客と閉店間際に来店した客とでは明らかに店内滞在時間分布は異なるでしょう．また，店内滞在時間分布は性別や年齢などにも依存しているかもしれません．このような状況も待ち行列理論で扱うことが可能です．この小文を通して待ち行列理論の奥の深さを感じていただければ幸いです．

参考文献

[1] H. Masuyama and T. Takine: Analysis of an infinite-server queue with batch Markovian arrival streams, *Queueing Systems*, 42, 269-296, 2002.