リスク評価と待ち行列モデル

牧本　直樹

本稿では，保険リスク評価の基本モデルとして知られるCramér-Lundbergモデルと待ち行列モデルの関連について解説する．Cramér-Lundbergモデルにおける破産確率は，支払請求の発生間隔と請求額をそれぞれ到着間隔とサービス時間に対応させることで，待ち行列モデルの待ち時間分布として表現できる．そのため，待ち行列理論における種々の結果からこのモデルのリスク評価を行うことが可能となる．また，破産時点など破産確率以外の評価指標や，マルコフ環境への拡張，請求額分布がファットテールを持つ場合など，双方のモデルにおける最近の話題についても概説する．

キーワード：Cramér-Lundbergモデル，待ち行列モデル，破産確率

1. はじめに

確率モデルを利用した分析は，待ち行列理論，信頼性理論，金融工学などさまざまな分野で重要な役割を果たしている．そこで利用される確率モデルには，マルコフ連鎖のようにほぼすべての分野で利用されるものもあれば，金融工学におけるリスク中立確率のように分野固有の手法として発展してきたものもある（リスク中立確率も測度変換として捉えれば適用範囲は広い）．また，異なる分野で独自に得られた手法や結果に関連性が見出されることも少なくない．

本稿では，そのような一例として，最も基本的なリスク評価モデルとして知られるCramér-Lundbergモデルを取り上げ，そこでの破産確率が待ち行列モデルの待ち時間分布として評価できることを説明する．これにより，待ち行列モデルに対するさまざまな手法や結果を転用することで，リスク評価が可能となる．

節2では，Cramér-Lundbergモデルについて述べる．次いで節3では待ち行列モデルとの関連性を示し，待ち時間分布に対する結果から破産確率が得られることを具体例も交えて説明する．説明を簡潔にするため節2，節3では最も基本的な評価指標やモデルを扱い，他の評価指標やより一般的なモデルへの展開については節4で概説する．

2. Cramér-Lundbergモデル

ある保険会社の準備金（reserve）の時間的変化を表す次のようなモデルを考えよう．保険会社は所定の保険料を徴収し，保険金の支払い請求があった場合には請求額を支払う．まず初期時点での準備金をxとする．保険料は単位時間当たり一定額αが得られるものとし，これを準備金に加える．一方，初期時点以降の支払い請求の発生間隔を順に$D_1, D_2, \cdots$，またk番目の支払い請求額をC_kとし，その都度準備金から支払われるものとする．

図1は，準備金の時間的変化を図示したもので，支払い請求がない間は一定の傾きαで増加し，支払い請求があるとC_kだけ減少する．実際には，将来の支払い請求の発生時点や請求額は現時点ではわからないため（C_kやD_kは確率変数として扱う），グラフの形状はさまざまな可能性があり得ることに注意しておこう．このようなモデルは，Lundbergによって示され，後にCramérによって詳しく分析されたためCramér-Lundbergモデルと呼ばれる[1，2，4]．

さて，請求額がその時点での準備金を上回ると支払いができなくなるため，モデル上はこれを保険会社の破産と定める．例えば，図1では3番目の請求時点で

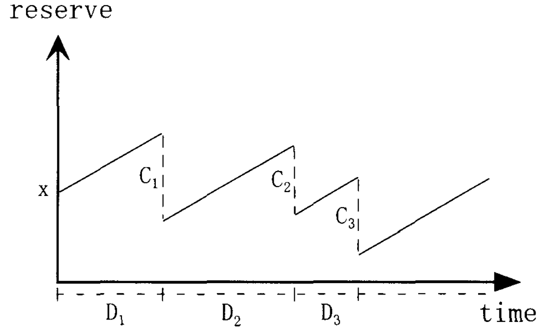

図1　準備金の時間的変化(1)

まきもと　なおき
筑波大学 ビジネス科学研究科
〒112-0012 文京区大塚3-29-1

まだ破産していないが，図2では，3番目の請求発生時点で破産となる．破産の起こりやすさは，初期の準備金 x，単位時間の保険料収入 α，支払い請求の発生間隔 D_k および請求額 C_k の分布によって決まるが，それらの関係を明らかにすることが，このモデルを分析する主な目的である．具体的には，初期準備金 x と破産確率の関係，破産した場合の損害額（図2における L）の分布，破産時点の分布などが分析対象となる．議論を簡単にするため，以下では初期準備金と無期限破産確率の関係に絞って説明を行い，関連する話題については節4で概要を記すことにしたい．

単位時間当たりの準備金の平均的な動きは，上向きに α，下向きに $\mathrm{E}(C_k)/\mathrm{E}(D_k)$ である．そのため，$\alpha \leq \mathrm{E}(C_k)/\mathrm{E}(D_k)$ の場合は，いつかは必ず破産してしまう．一方，$\alpha > \mathrm{E}(C_k)/\mathrm{E}(D_k)$ の場合は平均的には準備金は増加傾向にあるものの，大きな請求額が発生して倒産する可能性も残されている．したがって，以下では $\alpha > \mathrm{E}(C_k)/\mathrm{E}(D_k)$ の場合を考えることにする．

まだ破産していない場合，k 回目の請求発生直前の準備金は $x+\alpha\sum_{i=1}^{k} D_i - \sum_{i=1}^{k-1} C_i$ だから，もし

$$x+\alpha\sum_{i=1}^{k} D_i - \sum_{i=1}^{k-1} C_i < C_k$$

ならば k 回目の請求で破産することになる．したがって，初期の準備金が x の場合，いつかは破産してしまう確率は（項の入れ替えを行うと）

$$\overline{B}(x) := \mathrm{P}\left(\max_{k\geq 1}\left\{\sum_{i=1}^{k}(C_i-\alpha D_i)\right\} > x\right) \tag{1}$$

で与えられる．C_i や D_i の分布を所与として，式(1)の破産確率 $\overline{B}(x)$ を求めることがリスクモデルとしての目的であるが，実は $\overline{B}(x)$ は待ち行列モデルの待ち時間分布として求めることができる．次にその関係について説明しよう．

3. 待ち行列モデルとの関連性

3.1 Lindleyの等式と待ち時間

次のような単一窓口のGI/GI/1待ち行列モデルを考える．空の待ち行列に1番目の客が到着する．それ以降の客の到着間隔を順に $T_1, T_2, \cdots$ とし，最初の客も含めて k 番目に到着した客のサービス時間を S_k で表す．到着した客は，先客がいなければすぐにサービスを開始し，待っている客がいる場合は後ろに並んでサービスが終わるのを待つ（先着順サービス）．n 番目の客の待ち時間を W_n で表すと，$W_1, W_2, \cdots$ の間にはLindleyの等式と呼ばれる次の簡単な漸化式が成り立つ（図3参照）．

$$W_n = \max\{0,\ W_{n-1}+(S_{n-1}-T_{n-1})\} \tag{2}$$

さらに，式(2)を再帰的に解いていくと

$$W_n = \max\left\{0,\ \max_{1\leq k\leq n-1}\left\{\sum_{i=k}^{n-1}(S_i-T_i)\right\}\right\} \tag{3}$$

が得られる．待ち行列モデルでは，平均的な意味で処理能力が到着するサービス要求量を上回っていれば安定的に稼動することが知られている．このモデルでは，$\mathrm{E}(T_k) > \mathrm{E}(S_k)$ が満たされていれば，待ち時間の定常分布が存在する．具体的には，定常状態で待ち時間が x を超える裾確率は式(3)から

$$\overline{W}(x) := \mathrm{P}\left(\max_{k\geq 1}\left\{\sum_{i=1}^{k}(S_i-T_i)\right\} > x\right) \tag{4}$$

で与えられる．

3.2 破産確率と待ち時間分布

さて，式(1)と式(4)を比較し，表1の読み替えを行えば，破産確率と待ち時間の定常分布が同じ式で表され

表1

破産確率 $\overline{B}(x)$		待ち時間分布 $\overline{W}(x)$
C_k	$\Longleftrightarrow$	S_k
αD_k	$\Longleftrightarrow$	T_k

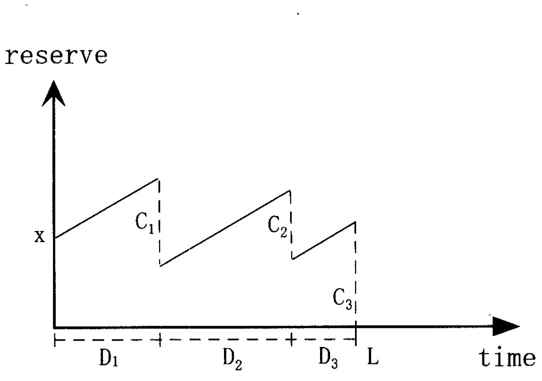

図2　準備金の時間的変化(2)

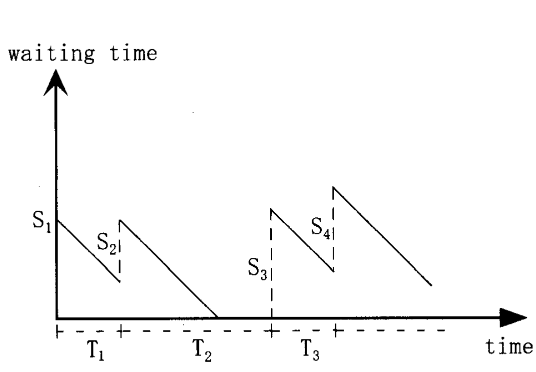

図3　待ち時間の推移

ていることがわかる．当然のことながら，両者を考える際の前提条件も，$\alpha\mathrm{E}(D_k)>\mathrm{E}(C_k)$ と $\mathrm{E}(T_k)>\mathrm{E}(S_k)$ となり一致する．したがって，いずれか一方が解ければ，両方とも求めることができるが，現段階では待ち行列モデルの分析の方が，モデルの拡張性や手法の多様性の点で進んでおり文献も多い．なお，理論的には式(1)や式(4)の分析は，ランダムウォークにおける ladder height（梯子の高さ）の問題として知られている[3]．

具体的な数値例を見てみよう．

（I）保険会社への支払い請求の到着は，ポアソン過程（D_k が指数分布に従う）としてモデル化されることが多い．その理由としては，（解析が容易になるという技術的な理由に加えて）被保険者の数が多く，個々の被保険者から請求が起こる確率は比較的小さいことから，いわゆる少数の法則の前提が満たされていると見なせることが挙げられる．このようなポアソン過程による支払い請求発生のモデルは，複合ポアソンモデルと呼ばれる．

D_k が率 λ の指数分布に従うことは，GI/GI/1 モデルにおいて T_k が率 λ/α の指数分布に従うことを意味する．これは M/G/1 モデルだから，よく知られた Pollaczek-Khinchin の公式によって待ち時間分布のラプラス変換が与えられ，それを利用して式(1)や式(4)を求めることができる．特に，請求額の分布もパラメータ μ の指数分布に従う場合は，M/M/1 モデルに対する結果から，

$$\bar{B}(x)=\frac{\lambda}{\alpha\mu}e^{-(\mu-\lambda/\alpha)x} \tag{5}$$

が得られる．

（II）支払い請求の発生間隔は一般分布に従うとして，請求額分布のみが率 μ の指数分布に従う場合を考える．対応する待ち行列モデルは GI/M/1 モデルで，これに対しては待ち時間分布が陽形式で得られており，結果として

$$\bar{B}(x)=\frac{\gamma}{\alpha\mu}e^{-(\mu-\gamma/\alpha)x} \tag{6}$$

となる．ただし，γ は，請求発生間隔分布のラプラス変換を β として $\gamma=\alpha\mu\beta(\alpha\mu-\gamma)$ の解である．

図4は，横軸に初期の準備金 x，縦軸（対数）に破産確率 $\bar{B}(x)$ をプロットした数値例である（被保険者数1000人，支払請求発生率10%，平均支払額100万円，保険料15%で計算）．支払い請求間隔と請求額がともに指数分布に従う場合（式(5)）と，請求間隔が2次のアーラン分布で請求額は指数分布に従う場合（式(6)）の2通りを示しているが，ともに指数分布の方が破産確率が高く，一方がアーラン分布になることで破産確率が減少することが観察できる．待ち行列モデルでは，到着間隔やサービス時間分布のランダムネスが大きくなるほど，待ち時間などの評価指標は悪化することが知られているが，同様の傾向はリスクモデルに対しても当てはまる．

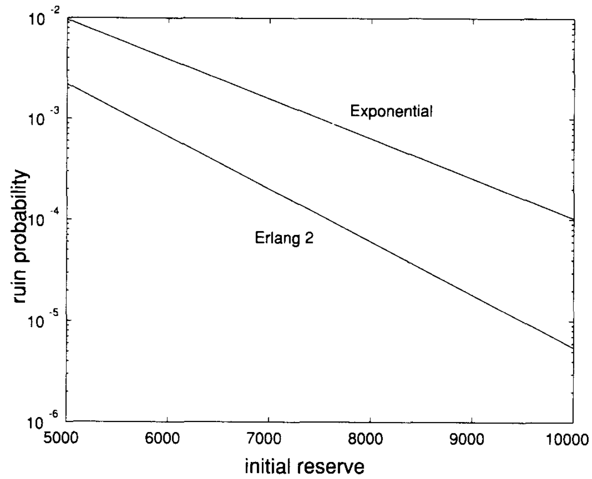

図4　初期準備金と破産確率

4. 関連する話題

前節までは，リスクモデルの破産確率と待ち行列モデルの待ち時間分布の関係がなるべく明らかになるように，最も簡単なモデルを利用して説明してきたが，類似の関係はより一般的なモデルに対しても成り立つことが知られている．また，その結果を用いることで他の評価尺度の性質を調べることも可能となる．モデルの拡張に関連するこれらの話題について，最後にその概要を述べておこう．結果を詳しく知りたい方は，文献[1, 4]などを参照されるとよいだろう．

まず Cramér-Lundberg モデルと待ち行列モデルの双対性は，次のように一般化することができる．

〈Cramér-Lundberg モデル〉　破産確率を考える期限を T とし，N を T 以前に起きた支払い請求回数とする．k 番目の支払い請求の発生時点と請求額をそれぞれ L_k, C_k とする．また単位時間当たりの保険料収入は，その時点での準備金に依存して $\alpha(\cdot)$ で決まる．このとき，時点 T 以内に破産する破産確率を $\bar{B}(x, T)$ で表す．

〈GI/GI/1 モデル〉　k 番目の客の到着時点を $T-L_{N-k+1}$，サービス時間を $S_k=C_{N-k+1}$ とする（時間をリスクモデルと逆向きに進めるように考える）．仮

待ち時間の過程 $\{V_t\}$ は，$V_0=0$ からスタートして，k 番目の客の到着時点で S_k 増加し，到着時点以外では $\alpha(V_t)$ の傾き（サービス率）で減少する．時点 T における仮待ち時間の補分布を $\bar{W}(x, T)=\mathrm{P}(V_T>x)$ とする．

このように対応付けて構築した二つのモデルの評価尺度の間には，前節までと同様に次の関係が成り立つ．

$$\bar{B}(x, T)=\bar{W}(x, T)$$

仮待ち時間の分析は待ち行列モデルを解析する上で重要な役割を占めており，幅広いモデルに対してさまざまな成果が得られている．したがって，それらの結果を利用することで，有限期限の破産確率も求めることができる．また，そこでの手法を援用すると，破産時点や，破産した場合の不足額（破産直前の準備金から請求額を差し引いた金額）の分布なども調べることが可能となる．

もう一つ，別の方向へのモデルの一般化として，マルコフ環境（Markovian environment）について触れておこう．大まかに言うと，マルコフ環境とは，

- リスクモデルや待ち行列モデルの時間的変化（支払い請求の発生間隔や請求額の分布，保険料など）が，各時点での環境に依存する
- 環境を表す状態はマルコフ的に変化する

というものである（分野によっては，マルコフレジームスイッチなどと呼ばれることもある）．マルコフ環境の具体例としては，請求額の分布を指数分布（複合ポアソンモデル）から相型分布に拡張したモデル，単位時間当たりの保険料率がマルコフ的に変化するモデル，支払い請求の発生率がマルコフ的に変化するモデルなどが挙げられる．このようなマルコフ環境のモデルは，待ち行列の分野でこの10数年急速に進展しており[5]，その成果を取り入れることで分析可能なリスクモデルの範囲も広がりを見せている[1, 4]．

最後に請求額分布の裾と破産確率の関連について述べておこう．火災や自然災害などの損害保険請求額のデータを統計的に分析すると，しばしば裾が厚い（heavy tailed）分布が現われる[2]．裾が厚い分布とは，指数分布や正規分布のように分布の裾が指数関数的に急速に減少するのではなく，それよりゆっくりと減少するものを意味し，やや裾が厚い中間的な分布として対数正規分布など，さらに裾が厚い分布としてはパレート分布や極値分布の一種であるフレシェ分布などがある．保険会社の立場で考えれば，現実の請求額分布の裾が厚いということは，より大きな請求額が起こりやすいことを意味しており，指数分布などを仮定した分析では破産確率を過少評価する恐れがある．したがって，そのような分布に対する破産確率の評価が求められることになる．

一般に裾の厚い分布に対する解析では，破産確率を陽に求めることが難しいため，準備金の水準 x が大きい場合に破産確率がどの程度小さくなるか，という評価が行われる．結論だけを示せば，節2の基本モデルで支払い請求が発生率 λ のポアソン過程で起こる複合ポアソンモデルにおいて，請求額分布 F が（裾が厚い分布も含めた）あるクラスに入るならば，$x\to\infty$ のとき

$$\bar{B}(x)\sim\frac{\lambda \mathrm{E}(C_k)}{\alpha-\lambda \mathrm{E}(C_k)}\bar{F}_e(x)$$

の関係が成り立つ[2]．ここで，

$$\bar{F}_e=1-\frac{1}{\mathrm{E}(C_k)}\int_0^x[1-F(y)]\mathrm{d}y$$

である．F の裾が厚い場合は，$\bar{F}_e$ も類似の性質を持つので，破産確率を一定にするには，請求額分布の裾が厚い方がより多くの準備金を必要とすることがわかる．実証データも含めた保険における裾が厚い分布の取り扱いについては文献[2]に詳しい．

なお，待ち行列においても，裾の厚い分布をサービス時間分布とするモデルの分析が近年盛んに行われているが，こちらはインターネットの普及によって，通信の中心が音声から（サイズの大きな）データに移行したことが主な原因となっている．理由や目的は異なるものの，同時期に同じようなモデルが関心を集めているのは，興味深い現象と思われる．

参考文献

[1] S. Asumussen: "Ruin Probabilities", World Scientific, Singapore, 2000.

[2] P. Embrechts, C. Klüppelberg and T. Mikosch: "Modelling Extremal Events", Springer, Berlin, 1999.

[3] W. Feller: "Introduction to Probability Theory and Its Applications", Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1971.

[4] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt and J. Teugels: "Stochastic Processes for Insurance and Finance", Wiley, Chichester, 1999.

[5] 牧本直樹："待ち行列アルゴリズム—行列解析アプローチ—", 朝倉書店, 2001.