マルチンゲール変換を用いたアメリカンオプション価格の上限評価

上園　智大
(東京工業大学大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻　現所属・東京海上火災保険㈱)
指導教官　高橋幸雄 教授

1. はじめに

オプションの公正価格を求める要求は大きいが，アメリカンオプション価格の解析は難しく，これまで適当な方法が知られていなかった．アメリカンオプションの価格は割り引かれたペイオフ値の期待値の，有界な停止時に対するsupで与えられるが，Rogers[1]は，マルチンゲールを変数とする一種のmin-max問題としてこれを解く斬新な手法を提案した．しかし彼の手法を適用するには適切なマルチンゲール過程を構成する必要があり，これも簡単ではない．本論では離散化モデルにおいて，原資産のマルチンゲール変換で与えられるマルチンゲールに制限した上で，将来のある時点が最適となるマルチンゲールを逐次的に生成することにより，価格に対する良い上界を求める方法を提案する．これは，精度の良い解を少ない計算時間で求めるだけでなく，オプションヘッジという観点からも意味のある価格付けをすることが数値的に確かめられる．

2. Rogersによる上限評価

確率空間を$(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}, P)$とする．リスク中立測度$P$の下での標準ブラウン運動を$\{W_t\}$として，$\sigma\{W_s : s \leq t\}$を完備化したものをフィルトレーション$\{\mathcal{F}_t\}$とする．また，オプション満期を$T$，短期金利を$r$，ボラティリティーを$\sigma$とする．株価過程$S$を$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t^{\alpha} dW_t$，$\mathbb{R}$値ペイオフ関数を$\psi$，割引き内在価値過程$Z$を$Z_t = e^{-rt}\psi(S_t, t)$として定義する．ただし，ある$p>1$に対して$\sup_{0\leq t\leq T}|Z_t| \in L^p$であるものとする．

Rogers[1]はアメリカンオプションの価格Y_0が以下のように表現されることを示した．

Theorem 2.1

$$Y_0 = \inf_{M \in H_0^1} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}(Z_t - M_t)\right] \tag{1}$$

ただしH_0^1は，$\sup_{0\leq t\leq T}|M_t| \in L^1$かつ$M_0 = 0$を満たすようなマルチンゲール$M = \{M_t\}$の空間である．

3. マルチンゲールの生成方法

Rogersの手法は，infを与えるマルチンゲール過程がわかれば，モンテカルロ法を用いることでアメリカンオプション価格が推定できる利点を持つ．しかし，このマルチンゲール過程は実際にはわからない．本論ではまず(1)式を離散化し，ある有界かつ可予測な過程$\{\theta_n\}$による，割引いた原資産のマルチンゲール変換によって生成されるマルチンゲールの空間の中で下限を求めることにより，(1)式の近似解を求めることを試みる．

新たな離散の確率空間$(\Omega, \mathcal{G}, Q)$を考え，フィルトレーションを$\mathcal{G}_n = \sigma\{S_0, S_1, \cdots, S_n\}$と定義する．ここで，$S, Z, M$の離散化は次のようになされる．$\alpha \leq 1$, $0 \leq n \leq N$に対して，$\Delta t = T/N$, $S_n = S_{n-1} + rS_{n-1}\Delta t + \sigma S_{n-1}^{\alpha}\sqrt{\Delta t}\varepsilon_n$, $Z_n = (1 + r\Delta t)^{-n}\psi(S_n, n)$, $M_n = \sum_{m=1}^{n}\theta_m(\bar{S}_m - \bar{S}_{m-1})$．ただし，$\bar{S}_n$は割引かれた株価過程を表している．このとき$Y_0$は，有界かつ可予測な過程の集合$\Theta$を用いて次のように評価される．

$$Y_0 < \min_{\theta\in\Theta} E\left[\max_{0\leq n\leq N}\left(Z_n - \sum_{m=1}^{n}\theta_m(\bar{S}_m - \bar{S}_{m-1})\right)\right] \tag{2}$$

3.1 過去の履歴と一つの時点を考慮する場合

$\psi(S_n, n) = (K - S_n)^+$というペイオフを持つオプションを考える．$Y_0$の上界を求めるために(2)式右辺を考えることにしたが，実はこれを解くのも困難である．そのため(2)式をさらに制限し，過去の履歴から$j \in \mathbb{N}$時点先の期待値を最小にするθ_nを逐次的に求めることで近似的に解いていくことにする．つまり固定された$n \in [1, N]$に対して，

$$\min_{\theta_n\in\mathbb{R}} E\left[\max\left\{\max_{0\leq l\leq n-1}\left(Z_l - \sum_{m=1}^{l}\theta_m(\bar{S}_m - \bar{S}_{m-1})\right), Z_n - M_n\right\} \middle| \mathcal{G}_{n-1}\right] \tag{3}$$

とすることでθ_nを求め，それを$1 \leq n \leq N$で繰り返す．ただしSが従う過程は，固定されたnに対して$n-1$以下の時点では前述の式で表されるが，n時点では実際のところj時点先を見ているため

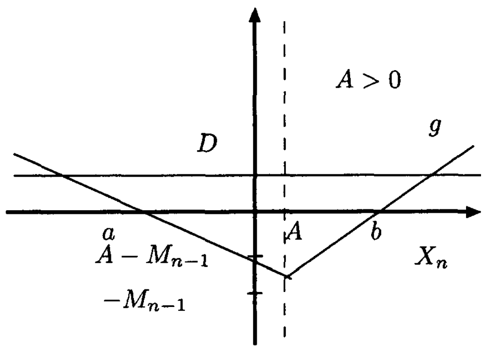

図1 関数 g と値 D の関係

$$S_{j+n-1}-S_{n-1}=rj\Delta tS_{n-1}+\sigma S_{n-1}^{\alpha}\sqrt{j\Delta t}\,\varepsilon_n' \tag{4}$$

と表される．ε' は正規分布に従う確率変数である．上の S, Z, M の形を用いてさらに変形すると

$$\min_{\theta_n\in\mathbf{R}}E[\max\{((A-X_n)^+-\theta_nX_n-M_{n-1}), D\}|\mathcal{G}_{n-1}] \tag{5}$$

となる．上の変数は $\mathcal{G}_{n-1}$ 上で次のように定義される．$X_n=\dfrac{\sigma S_{n-1}^{\alpha}\sqrt{j\Delta_t}\,\varepsilon_n'}{(1+rj\Delta_t)(1+r\Delta t)^{n-1}}$，$A=(1+rj\Delta t)^{-1}(1+r\Delta t)^{-(n-1)}K-\bar{S}_{n-1}$，$D=\max_{l\leq n-1}(Z_l-M_l)$．時点 $n-1$ の情報を持った上で最適な θ_n を考えているので，ここでの確率変数は X_n のみである．また θ_n が取り得る範囲は $[-1,0]$ であることがわかっており，$g(X_n)=(A-X_n)^+-\theta_nX_n-M_{n-1}$ を X_n の関数とみなすと，図1のようになる．この g と定数 D の max を取った関数の期待値を最小にする θ_n が求めたい θ_n になる．関数 g と直線 D が交わる2点の x 座標を a, $b(a<b)$ とおくと，$a=(A-M_{n-1}-D)/(1+\theta_n)$，$b=-(M_{n-1}+D)/\theta_n$ となる．よって，期待値 $W\overset{\mathrm{def}}{=}E[\max\{g(X), D\}|\mathcal{G}_{n-1}]$ は次のように計算できる．ただし，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\bar{\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2\bar{\sigma}^2}}$，$\bar{\sigma}=\dfrac{\sigma S_{n-1}^{\alpha}\sqrt{j\Delta t}}{(1+r\Delta t)^{n-1}(1+rj\Delta t)}$ である．

$$\begin{aligned}W&=E[\max\{g(X), D\}|\mathcal{G}_{n-1}]\\&=\int_{-\infty}^{a}(A-(1+\theta_n)x-M_{n-1})f(x)dx\\&\quad+\int_{1}^{b}Df(x)dx-\int_{b}^{\infty}(\theta_nx+M_{n-1})f(x)dx\end{aligned} \tag{6}$$

a, b が θ_n の関数であることに注意して W を θ_n で微分すると，$a=-b$ のときに W が最小となることがわかり次のような θ_n^* が得られる．

$$\theta_n^*=-\frac{M_{n-1}+D}{(M_{n-1}+D)+(M_{n-1}+D-A)} \tag{7}$$

表1 (i)，(ii)における上界値，標準偏差，MAD 値，括弧内は(ii)の値

S_0	上界	標準偏差	MAD 値
80	21.846(21.824)	0.008(0.007)	1.585(1.118)
100	10.057(10.137)	0.021(0.010)	4.498(2.681)
120	4.137(4.225)	0.018(0.010)	4.608(1.558)

これを $1\leq n\leq N$ で繰り返すことで θ^* を求め，マルチンゲールを生成する．また，過去の履歴と二つの先の時点を考慮する場合も有効であった．

4. 実験結果

$K=100$，$r=0.06$，$\sigma=0.4$，$T=0.5$，$N=40$，$\alpha=1$ の場合において，(i) j 時点先を考慮する場合，(ii) 過去の履歴と2時点を考慮する場合，で価格の上界の期待値，標準偏差，MAD 値を評価する．ここでいう MAD 値とは上の手法で得られたマルチンゲールが，どれだけ H_0^1 の inf を得るマルチンゲールに近いかを表す指標であり，小さい程良い．なお，j の値は各時点毎で最大に取れば良いことがわかっている．

二つの手法での結果を $S_0=80$，100，120 の3通りについて表1に示す．(i)と(ii)の結果を比べると，上界値に関してはそれほど違いが見られないものの MAD 値に関しては(ii)の方法が良い．一方，計算時間を考慮すると，(i)手法の方がずっと優れている．

まとめとして次のようなことがいえる．(1)，(i)の手法は θ_n^* を簡単な式で表すことができるため，他の手法と比べ計算時間が優れている．上界の精度に関しては(ii)と同様である．(2)，(ii)の手法は(i)と比べて良い MAD 値を求めることができる．また計算時間を工夫すれば，考慮する時点の数を増やすことでさらに良い結果を得られることが予想される．(3)，本手法は株価過程がある程度複雑であっても適用でき，$\alpha<1$ のとき (CEV モデル) でも評価することが可能である．(4)，多資産のオプションの場合，考慮する確率変数の数が増えるため本手法の適用は今のところ難しい．

参考文献

[1] L. C. G. Rogers: Monte Carlo Valuation of American Options, *Mathematical Finance,* 12, 271-286, 2002.