連載講座

AHPの世界

第3回　新しいAHPの動向

木下　栄蔵

1.　ベルトンとゲアの反例[1]

例えば，日本の次期総理候補に，A，B，Cの3氏が浮上したとする．そして評価基準として，a（経済政策），b（外交政策），c（人気）の3要素が選ばれたとする．さて，この問題をAHPで分析するため階層構造にしたのが図1である．

そこで，レベル2の三つの評価基準（a, b, c）が相対的にどれだけ次期総理の選出に影響しているかを，経験と勘で判断する．それには，これら三つの評価基準のうち二つずつを比べて，表1のようにまとめる．この場合，すべて同じくらい重要なので，「1」という数字が入る．このマトリックスの最大固有値（λmax $=3.0$）に対する固有ベクトル W は，

$$W^T=(1/3, 1/3, 1/3)$$

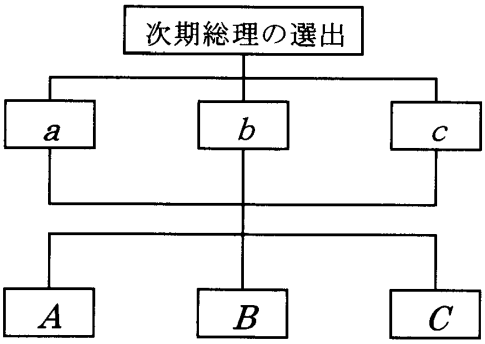

図1　次期総理の選出に関する階層構造

表1　評価基準に関するペア比較

	a	b	c
a	1	1	1
b	1	1	1
c	1	1	1

である．

次にレベル3に示した3人の候補者を三つの評価基準に基づいてそれぞれペア比較する．その結果は，表2のようになる．これら三つのペア比較マトリックスのそれぞれの最大固有値（いずれもλmax $=3$）に対する固有ベクトルは，

$$w_a^T=(1/11, 9/11, 1/11)$$
$$w_b^T=(9/11, 1/11, 1/11)$$
$$w_c^T=(8/18, 9/18, 1/18)$$

である．

ところで，代替案の選出基準の重みを X とすると，

$$X=[w_a, w_b, w_c]W$$

となる．

この例の場合，

$$X=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/11 & 9/11 & 8/18 \\ 9/11 & 1/11 & 9/18 \\ 1/11 & 1/11 & 1/18 \end{bmatrix} \end{array}\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}=\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.47 \\ 0.08 \end{bmatrix}$$

となる．したがって，各代替案の選好順序は $B>A>C$ である．ただし，表1と表2に示したペア比較マトリックスはすべて首尾一貫性がある．

ところで，ここに新たに，D氏も候補者の1人として浮上してきたとする．そこで，D氏も加えた4氏による評価をする．ただし，三つの評価基準の重み

表2　次期総理候補における三つの評価基準のペア比較

a	A	B	C
A	1	1/9	1
B	9	1	9
C	1	1/9	1

b	A	B	C
A	1	9	9
B	1/9	1	1
C	1/9	1	1

c	A	B	C
A	1	8/9	8
B	9/8	1	9
C	1/8	1/9	1

きのした　えいぞう
名城大学 都市情報学部
〒509-0261 可児市虹ケ丘4-3-3

W，ならびに各評価基準に関する3氏（A, B, C）のペア比較の値は変えないとする．その結果，三つの評価基準に関する4氏のペア比較マトリックスは表3に示すようになる．しかも，新たに代替案が加わっても首尾一貫性は保たれるのである．さて，これら三つのマトリックスのそれぞれの最大固有値（いずれも $\lambda\max=4$）に対する固有ベクトルは次のようになる．

$$w_a^T=(1/20, 9/20, 1/20, 9/20)$$

$$w_b^T=(9/12, 1/12, 1/12, 1/12)$$

$$w_c^T=(8/27, 9/27, 1/27, 9/27)$$

したがって，各代替案の重みを X とすると，この場合，

$$X=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/20 & 9/12 & 8/27 \\ 9/20 & 1/12 & 9/27 \\ 1/20 & 1/12 & 1/27 \\ 9/20 & 1/12 & 9/27 \end{bmatrix} \end{array}\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.29 \\ 0.06 \\ 0.29 \end{bmatrix}$$

となる．すなわち，各代替案の選好順序は $A>B=D>C$ である．

しかし，この結果は，実にパラドックスに満ちている．というのは，新たに D 氏を加えることにより，今までの3氏のなかで，A，B 両氏の評価が逆転するからである．しかも，A，B，C，3氏の評価に関するペア比較マトリックスの値は，D 氏が加わっても変わっていないのである．

実はこの順位逆転現象はベルトンとゲアに指摘されたものであるが，AHPの提唱者サーティはこの種の逆転は受け入れられると反論している．なぜなら，追加された代替案（この例では D 氏）が，今までの代替案のコピーならば，その代替案の評価値（重み）が下がることは明らかにされたからである．表3をよく見ると，D 氏は B 氏のコピーであることがわかる．例えば，同一人物でなくても各々の評価基準に対して同じ評価を受ける人物である．このように，コピー代替案が追加されればされるほど該当する代替案の重みが下がることは前述したように明示されている．

表3　総理候補4氏のペア比較

a	A	B	C	D
A	1	1/9	1	1/9
B	9	1	9	1
C	1	1/9	1	1/9
D	9	1	9	1

b	A	B	C	D
A	1	9	9	9
B	1/9	1	1	1
C	1/9	1	1	1
D	1/9	1	1	1

c	A	B	C	D
A	1	8/9	8	8/9
B	9/8	1	9	1
C	1/8	1/9	1	1/9
D	9/8	1	9	1

2. 反例の解釈と新しい計算法[2]

1章で紹介したベルトンとゲアの反例をめぐって，サーティとバルガスの反論[3]，およびベルトンとゲアの再反論がある[4]．しかし，AHPにおいて，コピー代替案が混じっている場合，前述したように該当する代替案が過小評価されることは明らかである．

そこで，本章においては，このような順位逆転の起こる理由を考察し，コピー代替案が混じっている場合の計算法を紹介する．また，ベルトンとゲアの反例において D が追加された後で，A，B，C に対するペア比較の値を変えていないにも関わらず，A と B の間に逆転現象が見られた．そこで，評価基準 a，b，c に関する各代替案の評価の変化（D が追加される前と後）を見る．すると，B の方が A よりも評価が高い評価基準 a，c に関する評価が半分ぐらい低くなっていることがわかる（表4参照）．つまり評価基準間の重みと各評価基準に対する各代替案の重みを変えない限り，a，c の影響度が相対的に減少するために，A と B の順位に逆転が生じるのである．

すなわち，各評価基準に対する各代替案の評価値（重み）が正規化されているため，新たに代替案が追加された場合尺度が変わってしまい，この例に見られ

表4　A，B に関する重みの変化

	A			B		
	a	b	c	a	b	c
Dが追加される前	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{18}$
Dが追加された後	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{9}{27}$

るような現象が起こるのである．したがって，コピー代替案 D が追加される前と同じ評価基準間の重みを使う限り，正規化は総合評価値が算出された後に行うことが必要である．

そこで，このような場合における各代替案の総合評価値を求める計算法を紹介する．ただし，各評価基準は $C_i(i=1,\cdots,n)$，C_i の重みを v_i，各代替案は $A_j(j=1,\cdots,m)$，C_i に関する A_j の評価値（重み）を w_{ij} とする．

(1) ある代替案 A_{m+1} が追加されたとする．

このとき v_i が変化しないのは当然であるが，w_{ij} もこのまま採用する．そして C_i に関する A_{m+1} の評価値（重み）を新たに，$w_{i,m+1}$ として評価する．もし A_{m+1} が A_j^* のコピーならば，$w_{i,m+1}=w_{ij}^*$ となる．

(2)

$$\sum_{i=1}^{n} v_i w_{ij}=\varepsilon_j \quad (j=1,\cdots,m+1)$$

$$\sum_{j=1}^{m+1} v_i w_{ij}=f_j \quad (i=1,\cdots,n)$$

上の2式を計算する．ε_j は代替案 A_j の総合評価値であり，f_j は評価基準 i の重みである．

(3)

$$\sum_{i=1}^{n} f_i=F\left(=\sum_{j=1}^{m+1}\varepsilon_j\right)$$

を計算する．そして，正規化するために

$$\varepsilon_j/F=w_j$$

を計算する．この w_j が代替案 j の正規化された総合評価値である．

以上の計算の方法をベルトンとゲアの例に当てはめると表5のようになる．

すなわち，

$A(w_1)=0.3070$, $B(w_2)=0.3196$,

$C(w_3)=0.0538$, $D(w_4)=0.3196$

表5　新しい計算法

	a	b	c	w_j
A	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{11}$	$\frac{1}{3}\times\frac{9}{11}$	$\frac{1}{3}\times\frac{8}{18}$	$\left(\frac{1}{33}+\frac{9}{33}+\frac{8}{54}\right)/1.4697=0.3070$
B	$\frac{1}{3}\times\frac{9}{11}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{11}$	$\frac{1}{3}\times\frac{9}{18}$	0.3196
C	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{11}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{11}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{18}$	0.0538
D	$\frac{1}{3}\times\frac{9}{11}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{11}$	$\frac{1}{3}\times\frac{9}{18}$	0.3196
f_i	0.606	0.3636	0.5	$F=1.4697$

であり，選好順序は $B=D>A>C$ となり，順位逆転は起こらない．しかも，この結果は代替案 D が追加される前の代替案 (A, B, C) 間の総合評価値の比と変わらないことがわかる．

3．選好順序逆転の例[5]

第1章において，コピー代替案による選好順序逆転の例を紹介した．そこで，本章においては，コピーではなく代替案追加によって選好順序が逆転するケースをサーティの例3.1を用いて説明する．さらに，コピー代替案追加による選好順序が妥当性を有するケースについてサーティの例3.2を用いて説明する．

3.1　投資問題

財産管理において投資は重要な意思決定である．そこで，投資問題を総合目的とする階層構造を図2に示す．すなわち，評価基準は，利益率と安全性であり，代替案は，株・債券等の投資対象 A，B とする．また，利益率と安全性の重みは，

$$W^T=(0.5, 0.5)$$

とする．次に各評価基準に関する各代替案のペア比較は表6に示したとおりである．すなわち，利益率に関しては，B よりも A の方がよく $(A>B)$，安全性に関しては A よりも B の方がよいのである $(A<B)$．

そして，これら二つのペア比較マトリックスの固有ベクトル（重み）は，

$$w_a^T=(0.75, 0.25)$$

$$w_b^T=(0.33, 0.67)$$

である．したがって，A，B の総合評価値は，

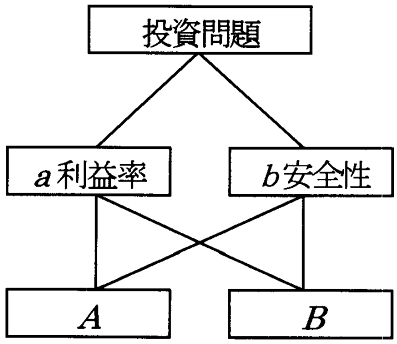

図2　投資問題の階層構造

表6　各評価基準に関するペア比較

利益率	A	B
A	1	3
B	1/3	1

安全性	A	B
A	1	1/2
B	2	1

$$X=\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{cc} a & b \\ \begin{bmatrix} 0.75 & 0.33 \\ 0.25 & 0.67 \end{bmatrix} \end{array}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.54 \\ 0.46 \end{bmatrix}$$

となり選好順序は$A>B$となる．

そこで，いま新しく代替案Cが追加されたとする．そして，各評価基準に関する各代替案（A, B, C）のペア比較は，表7に示すとおりである．

これら二つのペア比較マトリックスの固有ベクトル（重み）は，

$$w_a^T=(0.3, 0.1, 0.6)$$

$$w_b^T=(0.31, 0.62, 0.08)$$

である．すなわち，利益率に関しては，AよりもCの方がよく（$C>A>B$），安全性に関しては，CよりもAの方がよい（$B>A>C$）．

したがって，A，B，Cの総合評価値は，

$$X=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{cc} a & b \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.31 \\ 0.1 & 0.62 \\ 0.6 & 0.08 \end{bmatrix} \end{array}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.36 \\ 0.34 \end{bmatrix}$$

となる．すなわち，各代替案の選好順序は，$B>C>A$となり，AとBが逆転する．しかも追加した代替案Cは代替案A，Bのコピーではない．このことにより，コピーではなくとも代替案追加によって選好順序が逆転する場合のあることがわかる．そしてこのような場合においても，2章の新しい計算法を当てはめてみると表8のようになる．すなわち，

$$A(w_1)=0.302,\ B(w_2)=0.256,\ C(w_3)=0.442$$

表7 各評価基準に関するペア比較

利益率	A	B	C
A	1	3	1/2
B	1/3	1	1/6
C	2	6	1

安全性	A	B	C
A	1	1/2	4
B	2	1	8
C	1/4	1/8	1

表8 修正計算

	a	b	w_j
A	$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)/1.792=0.302$
B	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$	0.256
C	$\frac{1}{2}\times\frac{6}{4}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}$	0.442
f_i	1.25	0.542	$F=1.792$

であり，選好順序は，$C>A>B$となり順位逆転は起こらない．しかも，この結果は代替案Cが追加される前の代替案（A，B）の総合評価値の比と変わらないことがわかる．

3.2 洋服選択の例

サーティは，コピー代替案追加による選好順序逆転が妥当性を有する例として，以下に示す洋服の選択問題を提案している．まず，問題の階層構造は，図3に示すとおりである．すなわち，評価基準はデザインと希少価値であり，代替案は洋服Aと洋服Bである．また各評価基準の重みは，

$$W^T=(0.4, 0.6)$$

とする．次に，各評価基準に関する各代替案のペア比較は，表9に示すとおりである．

そして，これら二つのペア比較マトリックスの固有ベクトル（重み）は，

$$w_a^T=(0.75, 0.25)$$

$$w_b^T=(0.5, 0.5)$$

となる．すなわち，デザインに関して洋服Bよりも洋服Aの方がよく，希少価値に関しては洋服AとBは同じである．したがって，洋服AとBの総合評価値は，

$$X=\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{cc} a & b \\ \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

となり，選好順序は洋服$A>$洋服Bとなる．

そこで，新しく洋服C（洋服Aと同じもの）が加わったとする．すなわち，この洋装店で，よく品物を

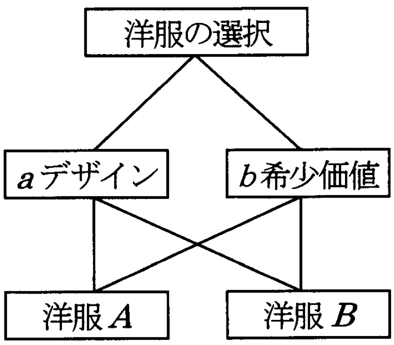

図3 洋服の選択の階層構造

表9 各評価基準に関するペア比較

デザイン	A	B
A	1	3
B	1/3	1

希少価値	A	B
A	1	1
B	1	1

見回すと，洋服 A とよく似た洋服 C を見つけたのである．そして，各評価基準に関する各洋服（A, B, C）のペア比較をし直すと，表10に示すとおりになった．また，これら二つのペア比較マトリックスの固有ベクトル（重み）は，

$$w_a^T=(0.42, 0.16, 0.42)$$

$$w_b^T=(0.125, 0.75, 0.125)$$

となる．すなわち，デザインに関しては，洋服 C は洋服 A と同じ評価になる（$A=C>B$）．一方，希少価値に関しては，洋服 A と C がよく似ているので，洋服 B の評価が上がる．

したがって，洋服 A，B，C の総合評価値は，

$$X=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.42 & 0.125 \\ 0.16 & 0.75 \\ 0.42 & 0.125 \end{bmatrix} \end{array}\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.238 \\ 0.514 \\ 0.238 \end{bmatrix}$$

となる．すなわち，選好順序は，洋服 $B>$ 洋服 $A=$ 洋服 C となり，A，B が逆転していることがわかる．そこで，この例に2章と同じ新しい計算法を当てはめてみると表11のようになる．すなわち，

$$A(w_1)=0.27835,\ B(w_2)=0.4433$$

$$C(w_3)=0.27835$$

であり，選好順序は洋服 $B>$ 洋服 $A=$ 洋服 C となり，順位逆転のままである．つまり，この例における順位逆転は，洋服 A，C がよく似ているので，洋服 B の希少価値が上がったために起こったと考えられる．したがって，この場合の選好順序逆転は妥当性を有すると考えられる．

表10 各評価基準に関するペア比較

デザイン	A	B	C
A	1	3	1
B	1/3	1	1/3
C	1	3	1

希少価値	A	B	C
A	1	1/6	1
B	6	1	6
C	1	1/6	1

表11 修正計算

	a	b	w_j
A	$0.4\times\frac{3}{4}$	$0.6\times\frac{1}{7}$	$\left(0.4\times\frac{3}{4}+0.6\times\frac{1}{7}\right)/1.3857=0.27835$
B	$0.4\times\frac{1}{4}$	$0.6\times\frac{6}{7}$	0.4433
C	$0.4\times\frac{3}{4}$	$0.6\times\frac{1}{7}$	0.27835
f_i	0.7	0.6857	$F=1.3857$

4．新しいAHPの動向

これまでに提案されている主な新しいAHPは，代替案の評価値決定の際，主固有ベクトルの和が1になるように正規化する部分，または，総合重要度が加法和により求める部分に修正を加えている．前者は，順位逆転の原因を，和を1とする正規化では代替案の追加により他の代替案の重要度も変わりうることによると考えたものである．また，後者は，加法和では一対比較により求めた重要度の比率尺度が保たれないことを根拠としている．以下，年代順に主な新しいAHPモデルについて要約する．

4.1 Belton-Gear's model

Belton[1, 4]らが順位逆転の事例を報告した際に同時に提案したモデルである．主固有ベクトルの成分和を1とする正規化に加えて，成分の最大値（最も重要な代替案の重要度）を1とする正規化を行う．また，代替案の追加などによって，ある評価基準のもとで最大値が変更された場合にはそれに合わせて他の代替案の重要度も変化するが，その重要度変化を打ち消すように評価基準の重要度を変更する．

4.2 Schoner and Wedley's model

評価基準の重要度は代替案と無関係に決まるわけではなく，各評価基準の下にある一つまたは複数の代替案評価値が評価基準の重要度に影響を及ぼすことを想定したものであり，Schoner and Wedleyらにより発表された．すべての代替案が評価基準に影響を与えると考えたReferenced model[6]，各評価基準に影響を与える代替案を一つだけと想定したLinking-pins model[7]，評価基準に影響を与える代替案を複数個と想定したBenchmark model[8]がある．いずれも評価基準に影響を及ぼす特定代替案の重要度和が1となるように正規化し，各評価基準の下で特定代替案を選択することを前提にして，評価基準の一対比較を行う．また，代替案の追加によって特定代替案の重要度和が変化した場合に限り，その変化を打ち消すように，評価基準の重要度を変更する．

4.3 Dominant model

ある特定の代替案（支配代替案）が評価基準や代替案の重要度づけに影響を及ぼす状況を想定したモデルである[9, 10]．評価基準同士の一対比較は，各評価基準のもとで支配代替案を選択することを前提にして行う．また，代替案の一対比較においては，各代替案と支配代替案との一対比較だけを行い（全一対比較を

行ってもよい)，支配代替案の重要度を1に正規化する．さらに，支配代替案が複数個ある場合に対応した重要度決定法（一斉法）も提案されている[11]．

4.4 Descriptive model

選好順位逆転は日常の意思決定過程で起こりうるものと考え，これを適切に記述することを目指したモデルである[12]．選好順位逆転の原因を意思決定手続きの変化または推移律の侵害と定義し，いずれかの原因が起こった場合にのみ順位逆転を許容する．前者の原因に対応して，各評価基準のもとで満足/不満足の境界線を示す希求水準を仮想的な代替案として追加し，代替案重要度の決定に際しては希求水準を1とする正規化を行う．また，後者の原因に対応して，一対比較の不整合度合に応じて評価基準の重要度を修正する．

4.5 Multiplicatives model

評価項目の一対比較から得られる重要度は比率尺度に従っているが，総合重要度の計算に加法和を利用すると，この比率尺度は維持されなくなる．これが順位逆転の原因だとし，加法和に代えて，乗法形の統合を行う[13]．

最後に，本稿4章『新しいAHPの動向』は，田地宏一氏（大阪大学），高橋理氏（三菱電気）との議論に負うところが大であり[14]，両氏に厚く感謝する次第である．

参考文献

[1] V. Belton and T. Gear: On a Shortcoming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies, Omega 11, pp. 228-230, 1983.

[2] 木下栄蔵：階層分析手法による多目的意思決定問題への適用に関する研究, 交通工学, Vol. 28, No. 1, pp. 35-44, 1993.

[3] T. L. Saaty and L. Vargas: The Legitimacy of Rank Reversal, Omega 12, pp. 513-516, 1984.

[4] V. Belton and T. Gear: The Legitimacy of Rank Reversal-A comment, Omega 13, pp. 1431-144, 1985.

[5] T. L. Saaty: The Analytic Hierarchy Process, RWS, 1990.

[6] B. Schoner and W. C. Wedley: Ambiguous Criteria Weights in AHP: Consequences and Solutions, Decision, Sciences, Vol. 20, No. 3, pp. 462-475, 1989.

[7] B. Schoner, W. C. Wedley and E. U. Choo: A unified approach to AHPwith linking pins, European Journal of Operational Research, Vol. 64, pp. 384-392, 1993.

[8] W. C. Wedley, E. U. Choo and B. Schoner: Benchmark Measurement: Between Relative and Absolute, Proc. of International Symposium on Analytic Hierarchy Process, pp. 335-345, 1996.

[9] 木下栄蔵，中西昌武：AHPにおける新しい視点の提案, 土木学会論文集, No. 569/4-36, pp. 1-8, 1997.

[10] E. Kinoshita and M. Nakanishi: Proposal of New AHP Model in Light of Dominant Relationship among Altenatives, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol. 42, No. 2, pp. 180-197, 1999.

[11] 木下栄蔵, 中西昌武：支配代替案法における追加データの処理手法「一斉法」の提案, 土木学会論文集, No. 611/IV-42, pp. 13-19, 1999.

[12] 田村坦之, 高橋理, 鳩野逸生, 馬野元秀：階層化意思決定法（AHP）の記述的モデルの提案と選好順位逆転現象の整合的解釈, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol. 41, No. 2, pp. 214-227, 1998.

[13] E. Triantapryllou: Two new cases of rank reversals when the AHP and some of its additive variants are used that do not occur with the multiplicative AHP, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, Vol. 10, pp. 11-25, 2001.

[14] 高橋理, 田地宏一, 木下栄蔵：AHPの選好順位逆転をめぐる調査研究, 2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp. 8-9, 2002.