意思決定における評価方法

加藤　豊

1. AHPの概観

ORの定義として有名なものに「定量的常識」がある．この定量的常識を実感させる手法—AHP（Analytic Hierarchy Process，階層化意思決定法）—が1970年代にSaatyにより開発された．AHPは，様々な状況下での意思決定に広く適用可能な手法で，統計学のTQC（全社的品質管理）と同様に広く社会に受け入れられうる頑強性のある手法である．今後，適用するシステムの広がりにより，認知科学や社会心理学との接近もより必要となるであろう．

AHPにおける最も重要な問題は逆数正行列のクラス $R_M(n)$

$$R_M(n)=\left\{A=(a_{ij})\in R^{n\times n}\,\middle|\,a_{ij}>0,\ a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}\right\} \tag{1}$$

に属する一対比較行列 A から各項目のウェイトをどう推定するかである．

Saatyは A の主固有ベクトルをウェイトの推定量とすることを提案した（固有値法）．すなわち，

$$A\boldsymbol{h}=\lambda_{\max}\boldsymbol{h} \tag{2}$$

を満たす要素の和が1となるベクトルをウェイトとする．この固有値法の理論的意味付けは，近年関谷・八巻[2]により与えられた．関谷・八巻は，非負行列に対するフロベニウスの定理から，「ばらつき最小化問題を解くことが固有値法である」というエレガントな解釈を与えた．

さらにSaaty・Vargas[1]は，対数最小2乗法により，A の各行の幾何平均（Geometric Mean）

$$G_i=\sqrt[n]{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}},\quad i=1,\cdots,n \tag{3}$$

がウェイトの最小2乗推定量であることを示した．

固有値法と幾何平均法の違いの重要な部分は，一対比較行列に対する考え方の違いであろう．固有値法では，与えられた一対比較行列は誤差を含まない結果であり，それを w_i/w_j であてはめるときにその違いを最小にするウェイトを決定しようとするものである．一方，幾何平均法は，真の一対比較値は w_i/w_j であり，一対比較行列にはそれを判定する際の誤差が含まれているので，誤差の2乗和を最小にしようという考え方に立っている．

これらの考え方における違いは，一対比較行列に異常に大きい値や小さい値が含まれる場合であろう．幾何平均の考え方に立つならばその値は，はずれ値であり考慮の対象から外すべき値となるが，固有値法であればそれらの値を変更をせずにそのモデルの妥当性や他のあてはめ方法によるウェイト推定を検討すべきである．

ところで，A の i 行の一般平均（General Mean）は

$$A_{ri}=\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{r}\right)^{1/r},\ r\neq 0,\ i=1,\cdots,n \tag{4}$$

で与えられるが，上述の幾何平均は

$$G_i=\lim_{r\to 0}A_{ri} \tag{5}$$

である．さらに

$$\begin{aligned}\max(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})&=\lim_{r\to+\infty}A_{ri}\\ \min(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})&=\lim_{r\to-\infty}A_{ri}\end{aligned} \tag{6}$$

であり，一般平均 A_{ri} は r に関して単調増加で最小値と最大値の間にばらついている．

幾何平均法の考え方を拡張して，近年加藤・小沢[3]は A の各行の一般平均もウェイトの最小2乗推定量であることを示した．すなわち，次の最小化問題

問題 $\langle M_r\rangle$

$$\min_{w}\frac{1}{2n^2r^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((\sqrt{a_{ij}}\,w_j)^{-r}-(\sqrt{a_{ji}}\,w_i)^{-r})^2 \tag{7}$$

s. t.

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i^{-r}\right)^{-1/r}=1 \tag{8}$$

の最適解が

かとう　ゆたか
法政大学 工学部
〒184-8584 小金井市梶野町3-7-2

$$\widehat{w}_i=\frac{A_{ri}}{A_r}, \quad i=1, \cdots, n \tag{9}$$

で与えられる．ここで，

$$A_r=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ri}^{-r}\right)^{-1/r} \tag{10}$$

である．明らかに，この問題〈M_r〉において $r \to 0$ とすると，Saaty・Vargasの対数最小2乗問題を得る．

幾何平均がウェイトの最小2乗推定量であることは，一対比較値 a_{ij} が真のウェイト・ベクトル $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^\top$ を用いて

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\delta_{ij} \tag{11}$$

と表現されることに基づいている．ここに，δ_{ij} は誤差を表す正の確率変数である．

この誤差を最小2乗法の考え方ではなく，一対比較行列を行列の要素が w_i/w_j であるランク1の行列であてはめる問題を考えてみよう．そこで，一対比較行列 A が与えられたとき，ランク1の行列 (w_i/w_j) であてはめたときの誤差を

$$B=\left[a_{ij}\cdot\frac{w_j}{w_i}\right] \tag{12}$$

とし，これを誤差行列と呼ぶことにする．いま，ベクトル・ノルム

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}, \ 1 \leq p \leq \infty \tag{13}$$

に従う行列ノルム（従属ノルムという）

$$\|B\|_p=\max_{x \neq 0}\frac{\|B\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p}, \ 1 \leq p \leq \infty \tag{14}$$

の下での誤差行列の最小化問題

問題〈M〉

$$\min\|B\|_p \tag{15}$$

s.t. $\boldsymbol{w}>\boldsymbol{0}$

を考えることにする．最近，小沢・加藤[4]は問題〈M〉の最適解は

$$\widehat{w}_i=h_i^{1-1/p}\cdot g_i^{-1/p}, \ i=1, 2, \cdots, n \tag{16}$$

で与えられることを示した．ここに，$\boldsymbol{h}=(h_1, h_2, \cdots, h_n)^\top$ は A の主固有ベクトルで

$$A\boldsymbol{h}=\lambda_{\max}\boldsymbol{h}, \tag{17}$$

また，$\boldsymbol{g}=(g_1, g_2, \cdots, g_n)^\top$ は，A の左主固有ベクトル

$$A^\top\boldsymbol{g}=\lambda_{\max}\boldsymbol{g} \tag{18}$$

である．

Saatyの固有値法は，問題〈M〉において，$p=\infty$ の場合である．$p=1$ の場合は，ウェイトを左主固有ベクトルの要素の逆数，すなわち

$$\widehat{w}_i=1/g_i, \ i=1, 2, \cdots, n \tag{19}$$

で推定することを提案していることになる．ウェイトを推定するにあたって，一対比較行列の固有ベクトルを使用することを考えると，単純には $p=1$ と $p=\infty$ の場合の2通りが考えられる．しかし，これらの中間的な方法として問題〈M〉においてユークリッド・ノルムを使用した $p=2$ の場合は

$$\widehat{w}_i=\sqrt{h_i/g_i}, \ i=1, 2, \cdots, n \tag{20}$$

でウェイトを推定することを提案しているが，これは問題〈M〉のもう一つの自然な主張と考えることができる．

誤差行列を考え，その行列ノルムを最小にする問題群の中の一つとして，Saatyの固有値法を含めることができる．固有値法の固有ベクトルをベキ乗法で求めることは，ウェイトを一対比較行列にかけることを繰り返して求めることになり，単純な思考過程を再現した方法と同じと考えられている．同様に，その転置した行列に対する左固有ベクトルもウェイトの逆数を同様に求めた結果といえる．これらの解の合成で得られるウェイト推定は，ある意味でエルゴード的な考え方によったウェイト推定と考えることができる．

一方，幾何平均法や一般平均法は，最小2乗法という意味である誤差分布を想定して，その真のウェイトを推定しようとする考え方であり，上述のエルゴード的な意味とは違ってくる．これらは，得られた一対比較行列とランク1の行列 (w_i/w_j) との違いを生み出すのが個々の独立した人間による評価誤差と考える方法である．

これらの一対比較行列と理想行列との間に差が生じる過程について，各一対比較において誤差が個別に現われることを想定している．しかし，そのようでない考え方もある．

木下・中西[6]は，一対比較がある基準となる評価項目を中心にして行われていて，その際に基準となる評価項目に従属して誤差が生じるものと考えて，「支配型AHP」を提案した．

このように一対比較値に内在する誤差をどのように解釈するかによってウェイトを推定する方法が多くあり，一対比較した状況の違いによって使用するウェイトも選択する必要が生じる．もし，一対比較行列が整合性

$$a_{ij}=a_{ik}\cdot a_{kj}, \quad i, j, k=1, 2, \cdots, n \tag{21}$$

を満たしていれば，上で示したすべてのウェイトの推

定量はすべて同じウェイトになる．しかし，整合性を満たしていれば，一対比較行列 A の各行はすべて同じ情報を持つことになり，ウェイトの推定量は1行目を用いて

$$w_1 : w_2 : \cdots : w_n = 1 : \frac{1}{a_{12}} : \frac{1}{a_{13}} : \cdots : \frac{1}{a_{1n}} \tag{22}$$

より，求めることが可能であり，主固有ベクトルや幾何平均を用いる必要はなくなる．

整合性を満たさないのが自然であるとSaatyは考え，一対比較を $n(n-1)/2$ 回行い，それを行列表示した一対比較行列からウェイトを推定したのだと思う．よって，どのウェイトの推定方法を使用したらよいかが重要な問題となる．この問題を解決するには，そのときの状況や心理などを定性的に扱う必要が生じるので，社会科学との接近が今後は必要になると思う．

2. ANP

AHPの発展モデルとして，Saatyによる「ANP (Analytic Network Process)」がある．ANPについては関谷・高橋[5]の優れた解説があるが，ここでは別の解釈を与えよう．

AHPは，まず評価項目間の一対比較により評価項目のウェイト・ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求め，次に各評価項目の下で代替案間の一対比較を行い，その一対比較行列からウェイト・ベクトルを求め，それを列ベクトルとする行列 W を用いて，代替案の総合得点 $\boldsymbol{y}$ を

$$\boldsymbol{y} = W\boldsymbol{x} \tag{23}$$

として求める手法である．

各代替案は，どの評価項目に重点を置いているかも意思決定の上で重要な情報であるので，各代替案ごとに評価項目間の一対比較を行い，その一対比較行列から求めたウェイト・ベクトルを列ベクトルとする行列を V とおくと

$$\boldsymbol{x} = V\boldsymbol{y} \tag{24}$$

なる関係式も成立する．式(23), (24)を行列表示すれば，$\boldsymbol{z}^{\top} = (\boldsymbol{x}^{\top}, \boldsymbol{y}^{\top})$ と

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & V \\ W & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{25}$$

を用いて

$$\boldsymbol{z} = S\boldsymbol{z} \tag{26}$$

なる関係式を得る．式(26)をANPの基本方程式といい，列和が1の確率行列をSaatyは超行列（Super Matrix）と名付けた（図1参照）．

S は確率行列であるので，S を推移確率行列とする

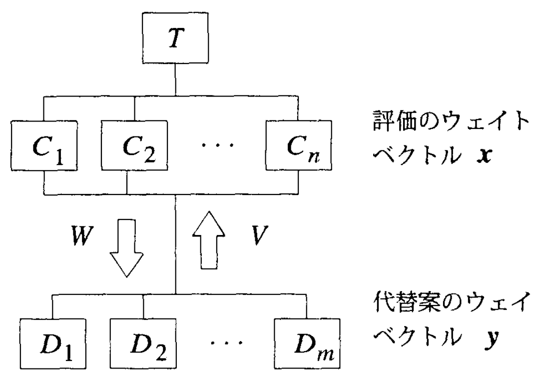

図1

マルコフ連鎖を考えると，このマルコフ連鎖は状態空間が $\{1, 2, 3, \cdots, m+n\}$ の有限マルコフで，すべての状態は互いに到達可能であるので，マルコフ連鎖は既約（irreducible）である．ゆえに，式(26)の解は存在し，式(26)を満たす確率分布を定常分布（stationary distribution）という．S の最大固有値は1であるので，式(26)の解を主固有ベクトルと解釈してもよい．

もし，自然数 t_0 が存在して

$$S^{t_0} > 0 \tag{27}$$

が成立していれば，S を「エルゴード的」という．このマルコフ連鎖は既約であるので，各状態の周期は等しく，この周期が1，すなわちマルコフ連鎖が非周期的（aperiodic）であれば，式(27)を満たす自然数 t_0 が存在する．この「エルゴード的」を「混合的」，「原始的」，「完全エルゴード的」，「正則」という場合もある．

Theorem（マルコフ連鎖のエルゴード定理）

S がエルゴード的であれば

(1) $\boldsymbol{z} = S\boldsymbol{z}$

(2) $\lim_{t\to\infty} S^t = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}, \cdots, \boldsymbol{z})$

を満たすただ一つの確率分布 $\boldsymbol{z}$ が存在する．

このエルゴード定理より，任意の初期分布 $\boldsymbol{z}_0$ に対して

$$\boldsymbol{z} = \lim_{t\to\infty} S^t \boldsymbol{z}_0 \tag{28}$$

から定常分布 $\boldsymbol{z}$ が求まる．S がエルゴード的でない場合には

$$S_\alpha = \alpha I + (1-\alpha)S, \ \alpha \in (0, 1) \tag{29}$$

とおくと，S_α はエルゴード的になり，S_α の定常分布は S の定常分布である．以上により，ANPは超行列の定常分布を求め，それを各項目のウェイトとする手法である．よって，ANPは「エルゴード的手法」である．ところで，「エルゴード性」は，時刻 t での系の状態の分布が $t \to \infty$ に伴い，ある意味で初期状態を

“忘れていく”ことを意味する（式(28)）．よって初期状態からあまりにも離れた解となる場合があり，そのときに解を十分に受け入れるのが難しい場合がある．

今，n 人の学生が m 教科の授業を受け，m 人の先生の学生への評価から n 人の学生の評価を求める例題を考える．このとき，学生による m 人の先生への評価結果も重要であるので，ANP で解析を行った．

先生による学生 n 人の評価は

$$W=\begin{pmatrix} 1-(n-1)p & 1/n & \cdots & 1/n \\ p & 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p & 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix} \tag{30}$$

であり，1 人の先生以外は，n 人の学生の能力はすべて同じであると評価している．一方，学生による m 人の先生の評価は

$$V=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/(m-1) & \cdots & 1/(m-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1/(m-1) & \cdots & 1/(m-1) \end{pmatrix} \tag{31}$$

であり，1 人の学生以外は，学生に特殊の評価を与えた先生への評価は 0 で，それ以外の $(m-1)$ 人の先生の教え方の能力は同じであるといっている．このとき，超行列

$$S=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & V \\ W & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

の定常分布を求めると

$$\boldsymbol{x}=\left(\frac{m-1}{pn(n-1)}, 1, \cdots, 1\right)^{\top}$$
$$\boldsymbol{y}=\left(\frac{m-1}{pn(n-1)}, \frac{m-1}{n-1}, \cdots, \frac{m-1}{n-1}\right)^{\top} \tag{32}$$

である．いま，$m=4, n=5$ とし $p=1/40$ すると，

$$\boldsymbol{x}=(2/3, 1/9, 1/9, 1/9)^{\top}$$
$$\boldsymbol{y}=(2/3, 1/12, 1/12, 1/12, 1/12)^{\top} \tag{33}$$

となる．ここで，ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の要素の和は 1 にそろえてある．

この結果を見ると，4 人の学生が評価 0 とした先生が最も優れていると評価した学生が，1 人高い得点を得ている．このとき，もし $p\to 0$ となるならば，1 人の先生と 1 人の学生のみが高評価を得て，他は 0 となってしまう．これは，m や n がいくつであっても起きることであり，特定の 2 人が結託をするとその結果は非常に変なものになる．ここで，重要なことは，このような結託はごく自然に行われる可能性が高いことである．良い点を貰った学生がその先生を高評価し，逆に先生にとって自分を高く評価してくれた学生に甘くなることは充分に起こり得るからである．

行列の特殊性は，このような場合だけではない．例えば，

$$W=\begin{pmatrix} 1-(n-1)p & 0 & \cdots & 0 \\ p & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix} \tag{34}$$

とし，V は式(31)と同じ場合には，$p(>0)$ がどんな値であっても，前の例では高評価だった先生と学生のウェイトは 0 となり，他のウェイトは同じ値になる．

また，

$$V=\begin{pmatrix} 1-(m-1)q & 0 & \cdots & 0 \\ q & \frac{1}{m-1} & \cdots & \frac{1}{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q & \frac{1}{m-1} & \cdots & \frac{1}{m-1} \end{pmatrix} \tag{35}$$

とし，W は式(30)と同じ場合には，q が正で 0 にならなければ，最初の例では高評価だった先生と学生のウェイトが p を小さくしても大きくなり続けることはない．

このように，ANP において固有ベクトルを使用すると，平均的な考え方から離れた解となり，これらの結果に疑問を感じる人も多いと思う．

そこで，式(30)，(31)において初期分布をその行列の各行の平均を使用して定め，超行列をエルゴード化した行列

$$S_{1/2}=\frac{1}{2}(I+S)$$

を用いて，$\boldsymbol{z}_t=S_{1/2}^t\boldsymbol{z}_0$ を $m=4, n=5, p=1/40$ の場合に計算したのが表 1 である．

ここでは，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の要素の和を 1 とした．定常分布の $\boldsymbol{z}_\infty$ より，この $\boldsymbol{z}_3$ の方をウェイトとして採用した方がよいと思う人も多いと思う．また，特別扱いを受けた学生と特別扱いをした先生のウェイトを 0 とした初期分布 $\boldsymbol{z}_0=(0, 1/3, 1/3, 1/3, 0, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^{\top}$ を用いて，$\boldsymbol{z}_t=S_{1/2}^t\boldsymbol{z}_0$ を求めることも考えられる．これは初期分布に外部からの客観性を考慮したと考えてよい．

しかし，定常分布 $\boldsymbol{z}$ は，極限状態確率分布

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_\infty=\lim_{t\to\infty}S_{1/2}^t\boldsymbol{z}_0 \tag{36}$$

であり，エルゴード性より $\boldsymbol{z}_0$ の情報を忘れていくの

表1 分布の推移

	z_0	z_1	z_3	z_5	z_∞
x_1	1/5	0.2875	0.3508	0.4000	2/3
x_2	4/15	0.2375	0.2164	0.2000	1/9
x_3	4/15	0.2375	0.2164	0.2000	1/9
x_4	4/15	0.2375	0.2164	0.2000	1/9
y_1	3/8	0.3576	0.4024	0.4440	2/3
y_2	5/32	0.1606	0.1494	0.1390	1/12
y_3	5/32	0.1606	0.1494	0.1390	1/12
y_4	5/32	0.1606	0.1494	0.1390	1/12
y_5	5/32	0.1606	0.1494	0.1390	1/12

で，ある意味で，外部から見た客観性を排除していることになっている．この客観性の扱いが重要な問題であると思う．

固有ベクトルを使用しない方法としては，各行の平均を使用するのが一般的である．ここで次のような問題を考える：

問題〈N〉

$$\min_{x,y}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\{(w_{ij}^r-x_i^r)^2+(v_{ji}^r-y_j^r)^2\} \tag{37}$$

この問題から求まる推定ウェイトは，一般平均

$$x_i=\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}^r\right)^{1/r},\ y_j=\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}v_{ji}^r\right)^{1/r} \tag{38}$$

となる．上述の特異な状況の例（$p\to0$とした場合）では，この方法で推定したウェイトの方がANPの結果より受け入れやすい．

しかし，この方法ではANPの特徴である双方の意見を互いに取り入れることができなくなる．このことからも，ANPにおいては固有ベクトルを使用してそのウェイトを求めているが，平均より離れたウェイトが推定されることを考慮した方法の開発が望まれる．

3. 非エルゴード的手法

SaatyによるANPの解法はエルゴード的手法であるが，前述の例から分かるように，どの初期分布からスタートしても定常分布に吸収されて行く状況に疑問を感じる人も多いと思う．この疑問を解消するには，非エルゴード的な考え方が必要となる．

どの項目に着目して一対比較するかによって，一対比較値が影響を受けるので，Saatyは$n(n-1)/2$回一対比較を行い，それを行列表示した一対比較行列からウェイトを求めたのだと思う．

木下・中西[6]は，この考え方より一歩踏み込んで，支配型AHPを提案する動機として

『AHPはもともと合理的な意思決定を道づけるオペレーション技法として考案されたものである．合理的な意思決定を行うための道筋（Process）は唯一ではなく合理的な解も一つでない．合理的な意思決定を行うための道筋の恣意的な選択が最初に行わなければならない』

と述べている．認知科学者に聞くと，何かを「認知」するとき，「後付け」であるという．「後付け」とは，最初に「認知」ありきで，この「認知」に客観性を持たせるために，いろいろな考察がなされるのである．支配型AHPは，各評価項目のウェイトならびに各代替案の評価が，特定の具体的な代替案を基準にイメージしてはじめて決定できるという考え方に立つ手法で，「非エルゴード的手法」である．

意思決定の手法という観点から考えると，非エルゴード的手法の方が自然であると私は思う．しかし，意思決定を何回も繰り返し，その平均的ウェイトを求めようとする場合には，エルゴード的手法の結果の方が優れていると思う．それゆえ，支配型AHPの提案動機を反映した支配代替案の選び方と，「一斉法」に代わる思考の特徴を考慮した収束方法の提案が望まれる．

前述したように，一対比較値に内在する誤差をどのように解釈し，どう評価するかによってウェイトの推定方法が多く存在し，一対比較した状況の違いによって使用するウェイトも選択する必要が生じる．これらの問題に対応するためには，一対比較したときの状況の分析やそのときの心理などを定性的に扱う必要が生じるので，社会心理学や認知科学との接近が必要となる．その結果，エルゴード的手法と非エルゴード的手法が有機的に結合され，AHPの頑強性がさらに高まり，統計学のTQCと同様に社会で広く活用されることを望みたい．

最後に，複雑系の研究者の言葉を述べて本稿を終る：『健康な人間の生体情報はカオス的である』

参考文献

[1] Saaty, T. L. and Vargas, C. G., “Comparison of eigen value, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios”, Mathematical Modelling, Vol. 5, 1984, pp. 309-324.

[2] Sekitani, K. and Yamaki, Y., “A logical interpreta-

tion for eigenvalue method in AHP", Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 42, 1999, pp. 219-232.

[3] Kato, Y. and Ozawa, M., "The characteristics of the consistency function of the general mean method", Proceedings of ISAHP '99, 1999, pp. 77-82.

[4] 小沢正典, 加藤豊, "行列ノルムによる一対比較行列からのウェイト推定", 日本OR学会春季研究会アブストラクト集, 2002年3月, pp. 52-53.

[5] Sekitani, K. and Takahashi, I., "A unified model and analysis for AHP and ANP", Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 44, 2001, pp. 67-89.

[6] Kinoshita, E. and Nakanishi, M., "Proposal of new AHP model in light of dominative relationship among alternatives", Journal of the Operations Reaearch Society of Japan, Vol. 42, 1999, pp. 180-198.