論文・事例研究

天候デリバティブにおける マルコフ連鎖型モデルに基づく評価法の提案

宮崎　浩一

1. はじめに

天候は人々の行動パターンを大きく左右するため，天候次第で売上が大きく変動するような製品やサービスを提供している企業は，従来から大きなリスクを抱えてビジネスを行わなければならなかった．このタイプのリスクを回避するための画期的な保険商品を1999年6月に三井海上が「積雪量指数オプション」という形で誕生させた．それ以来，天候デリバティブの需要は急増しており，日本経済新聞でも大きく取り上げられた．しかしながら，その評価方法について記した容易に入手可能な文献は，極めて少ない．著者の知る限りでは，Geoffrey[3]，Cao and Wei[7]，Brody, Syroka and Zervos[6]，土方[1]が数少ない文献である．土方[1]では，気温デリバティブおよびその評価法を例に基づいてわかりやすく全般的に概説している．Geoffrey[3]では，気温デリバティブの評価を気温パスをモデル化せずに行っている．Cao and Wei[7]，Brody, Syroka and Zervos[6]は共にパスをモデル化した評価法を採用している．前者は，気温パスが平均回帰する自己回帰時系列モデルを，後者は，気温パスがfractal Brownian motionに従うモデルを採用している．また，両者の相違は気温パスのモデル化のみならず，節5で述べるように気温デリバティブの評価を行う際のリスクプレミアムの導出法にも相違が見られる．土方[1]では，“日本において，現状ではほとんどの天候デリバティブの評価は気温パスをモデル化しない方法に基づいていると思われる”としている．その理由としては，実際の取引が欧米における程多くないことが挙げられ，Cao and Wei[7]，Brody, Syroka and Zervos[6]にあるような精巧なモデルで評価するほど市場が適切な値動きをしているとはいえないことが考えられる．事実，イギリスの天候デリバティブ市場でさえBrody, Syroka and Zervos[6]が指摘するように，構造的に整合性がとれたものとはなっておらず，市場自身が進化していくことが期待されている状態である．

過去の経験確率分布やそれを正規分布等でフィットした分布に基づいて行使の可能性を評価するような気温パスをモデル化しない評価法は，極めて簡便で効果的な評価法であるが，満期までの累積値のみの情報を利用して評価するため，主に次の2点の不都合が生じる．(1)プレミアム間の相対比較が，過去のデータに依存するため時間の経過とともに気温変化が変わることや比較する地点によってプレミアムは異なること等から難しい．(2)円高リスクはとれるが冷夏リスクはとれない企業には，為替リスクと天候リスクとを交換するスワップ取引のニーズが考えられるが，為替派生証券を含む他の金融派生証券のほとんど全てが変動のパスをモデル化することによって評価されているため，これらとの融合ができない．気温パスをモデル化しない評価法が弱点(1)，(2)を孕んでしまう理由は，評価において，満期までのペイオフの指標となる日次インデックスに関する累積値のみの情報を利用して評価することに由来する．本論文では，一般的にデリバティブ評価を行うには変動のパスのモデル化は不可欠であるという立場から，気温パスをマルコフ連鎖型モデルで記述したうえで気温デリバティブの評価を行う一つの方法を提案し，その具体化への第一歩を，東京における1月，2月の気温デリバティブを取り上げて示すことにある．

本論文の構成は以下の通り．次節では，気温デリバティブの商品説明と気温パスをモデル化しない評価法を手短にまとめたうえで問題提起を行う．節3では，気温パスをモデル化した気温デリバティブの評価法に関する海外の先行研究を手短にまとめたうえで，本稿の評価法がどのような位置付けになるかを示す．節4では，気温パスの性質を記述するモデルとしてYin

みやざき　こういち
電気通信大学 システム工学科
〒182-8585 調布市調布ヶ丘1-5-1
受付01.10.1　採択03.1.14

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

and Zhang[4]におけるマルコフ連鎖型気温変化モデルを離散時間の枠組みで取り上げ，具体的な実データに基づいて，現実的なHDD（Heating Degree Daysの略語であり，日次平均気温が18.33℃を下回る値）に関する累積値の分布を得る方法と分布例を示す．節5では，市場に流通している派生証券からリスク中立確率を導出する手法に関する先行研究Rubinstein[8]およびJackwerth and Rubinstein[5]とを踏まえたうえで，マルコフ連鎖型モデルに基づく評価法の提案とそれに基づくプレミアムの比較分析を行う．最終節では，まとめと今後の課題を与える．

2. 気温デリバティブの商品説明，気温パスをモデル化しない評価法と問題提起

2.1 商品説明

米国における気温デリバティブ取引の95%は，気温に関するものであり，しかも次に定義するHDD（Heating Degree Days），CDD（Cooling Degree Days）という日々の平均気温の累積度数をインデックス化したものに関するデリバティブである．

（定義）

日次　HDD＝Max（0，18.33℃－日次平均気温）

日次　CDD＝Max（0，日次平均気温－18.33）

与えられた期間におけるHDD，CDDは，上記の日次ベースのものに関する累積値とする．

（商品例）

オプション購入者	：ガス会社A社
オプション引受者	：損害保険会社B社
取引形態	：累積HDDをインデックスとするプット・オプション
気温観測値	：東京都
観測期間	：2001年1月1日から1月31日までの計31日間
ストライク	：累積HDD 400
単位金額	：1 HDD＝1,000,000円
支払い条件	：ストライクを1 HDD下回るごとに1,000,000円
プレミアム料	：28,000,000円

この商品では，ガス会社A社は，累積HDDが400（過去40年間の1月における平均値）以下であるとき，つまり通常の気温よりも暖かかった場合に，1 HDDごとに1,000,000円の支払いを損害保険会社B社から受けることになり，その保険料として28,000,000円を先に支払うことになる．寒さが厳しく，累積HDDが400を上回った場合には，A社は何ら支払いを受けられず，B社は，当初の保険料である28,000,000円全額が利益となる．

2.2 気温パスをモデル化しない評価法

節2.1で示した商品例のケースを取り上げて，気温パスをモデル化しない評価法を示す．

(1) 過去の各年（例えば1961年から2000年の40年間）における1月の累積HDDを求める．度数分布に広がりがある場合には，この累積HDD分布に基づいて，広がりがない場合には，この累積HDDの分布を正規分布（又は他の分布）でフィットした分布に基づいてMax（0，400－累積HDD）の分布を作り，その期待値と標準偏差を求める．

(2) (1)で求めた期待値に，リスク・スプレッドとして標準偏差の定数倍を加えてプレミアムとする．

2.3 問題提起

節2.2で示した評価法に関して，プレミアムの相対価値分析の観点から問題提起を行う．節2.2の評価法で必要なのは，ペイオフに関する期待値と分散であった．1月のプットオプション，コールオプション，を評価する際のペイオフに関する期待値と標準偏差を各分布の生成法別，ストライク別に表1，2に示した．各表において，“Actual”は過去の累積HDDに基づ

表1　January：Put Option

Mean				
Strike	400	390	380	370
Actual	16.58	11.66	7.92	4.90
Normal	21.37	15.20	10.38	7.10
Markov	13.10	9.46	7.06	4.81

Std				
Strike	400	390	380	370
Actual	27.80	22.19	17.26	13.13
Normal	32.42	26.21	20.86	16.19
Markov	29.07	25.02	21.48	18.51

表2　January：Call Option

Mean				
Strike	400	410	420	430
Actual	13.51	9.41	5.91	3.22
Normal	14.35	11.20	8.26	5.75
Markov	11.02	7.62	4.37	1.12

Std				
Strike	400	410	420	430
Actual	23.69	18.25	13.42	9.57
Normal	28.29	23.36	18.75	14.58
Markov	19.15	13.47	7.85	2.58

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

いた生成法であり，“Normal”は，過去の累積HDDを正規分布でフィットしたものに基づく生成法であり，“Markov”は，節4で詳しく述べるマルコフ連鎖型の気温パスモデルに基づく生成法である．特に，“Markov”に関しては，節4における考察から期間2分割のケースに基づいている．また，節5におけるプレミアム分析も同様にこのケースに基づく．

今，節2.1の気温デリバティブの商品説明において例示した商品が実際に取引されたとする．このとき，行使価格のみが異なる同じ商品の価格をどのように評価すればよいかを考える．現行の評価法によれば，プレミアムは，期待値に標準偏差の一定比率を上乗せして決めているから，28から行使価格400の期待値(13.1)を引いて，行使価格400の標準偏差(29.07)で除して一定比率を求める．その一定比率を他の行使価格のプレミアム導出に用いることになる．ここで問題となるのは，“他の行使価格のオプションを評価するときに標準偏差の一定比率で評価するのが適切であるか？”である．累積HDDの累積密度関数として現実的なものを用いたとしても，行使価格が異なれば，オプション価格評価に影響する（ペイオフがゼロでない）分布は異なるわけであるから標準誤差の持つ意味も異なるので，同じ一定比率を乗じた場合に同じリスク回避度を表現したといえるかが判断しにくく，同じ商品でも行使価格ごとのプレミアムの比較が難しい．この難点が，“1月における行使価格400のプットオプションと2月における行使価格350のプットオプションの取引が成立したときに，1月から2月の2ヶ月間を観測期間とする行使価格750のプットオプションの評価する問題”を考える場合にも生じる．このとき，成立した取引の各リスク・スプレッドと整合的な2ヶ月間プットオプションのリスク・スプレッドを与える標準偏差の一定比率とは何を意味するか？　また，どのようにして求めるのか？”等には適切な答えがないのではなかろうか？　Geoffrey[3]は，上記の問題を気温パスをモデル化しない評価法の範囲で評価しているが，リスク・スプレッドに関する考察は，一切行われていない．

他の問題点が，オプションの購入者がリスクサイドの異なるオプションの価格を尋ねてきた場合に生じる．例えば，1月の累積HDDが400近辺であれば，高い売上が見込めるが，累積HDDが大きくても小さくても売上が低下するような企業があったとすると，リスクヘッジのためにストライク400のコールオプションとプットオプションの両方の購入，つまり，ストラドルの買いを行うことが考えられる．この場合に，両方のオプションに対して，どちらか一つを単体で購入する際に用いた一定比率を用いて両方のオプションにリスク・スプレッドをオプション購入者に対してチャージすることが，引受け者のリスク回避度の観点から妥当であるかという問題点である．気温パスをモデル化しないアプローチでは，適切な価格付けが困難であると考えられる．

3. 気温パスをモデル化した気温デリバティブ評価法の先行研究

金融派生証券の評価理論は，完備市場におけるものと非完備市場におけるものとがある．株式市場を想定するなら，一般に，n個の株式と1個の債券からなる市場では，株価変化の取り得る状態が$(n+2)$以上であれば，リスク中立確率は一意に定まらず，このような市場を非完備市場と呼んでいる．気温デリバティブの“原資産”に当たる気温（HDD）は，株式等とは異なり市場において取引されておらず，気温デリバティブの評価は，上記よりも強い意味で非完備市場における価格理論の中に位置づけられる．よって，無裁定条件や市場の完備性に依拠する通常の金融派生証券評価理論の気温デリバティブへの単純な適用は適切でない．以下，気温パスをモデル化した気温デリバティブの評価法に関する海外の先行研究を二つ挙げ，各アプローチの概要を手短にまとめる．

Brody, Syroka and Zervos[6]では，期待割引価値法を採用している．この評価法では，期待価値を与えられた期間における気温の関数として，エンピリカルな確率測度で評価するものである．彼らは，気温パスX_tをfractal Brownian motionによって表現したうえで，ペイオフが将来の時間$[T-S, T]$における累積HDDに比例するような気温デリバティブの評価を以下の$v(T, x)$で与えている．

$$v(T, x)=E\left[e^{-\delta T}\int_{T-S}^{T}(18-X_t)^+dt\right],$$

ここで，δは，金利と市場リスクプレミアムを説明するために選ばれる正の定数である．期待値計算は，エンピリカルな確率測度に関して行う．Brody, Syroka and Zervos[6]の主な仕事は，$v(T, x)$の評価を適切な仮定の下で，初期条件$w(0, x)=0$の下でパラメータとしてδを含むwに関するある放物型偏微分方程式を解けば，$v(T, x)$が$w(T, x)$として評価でき

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

るということである．よって，具体的に一つ気温デリバティブの価格が与えられると，その価格が $w(T, x)$ に一致するような δ が一つ求められ，他の気温デリバティブもこのを用いて評価できることになる．

Cao and Wei[7]では，均衡アプローチを用いた評価法を採用している．これは，Lucasの純粋な交換経済モデルを拡張したもので，初期時点で株式を1株与えられたエージェント（投資家というものの代表を想定）が株式，割引債，他の派生証券（天候デリバティブ）の三つへ投資し，その投資戦略から得られた収益を消費する設定になっている．エージェントの効用関数としては，時間選好率 $\rho \geq 0$ とリスクパラメータ $\gamma \in [-1, 0]$ からなるCRRA（Constant-Relative-Risk-Aversion）族とし，株式の配当プロセスとしては，三つのパラメータを含む $\ln \delta_t = \alpha + \mu \ln \delta_{t-1} + \sigma_\delta \varepsilon_t, \forall \mu \geq 1$（ここで，$\varepsilon_t$ は独立で同じ標準正規分布に従う確率変数）に従うものとし，気温プロセスに関しては，いくつかのパラメータを含む平均回帰する自己回帰時系列モデルを採用している．これらの前提の下で，エージェントは，生涯にわたる期待効用を最大にする最適な投資戦略をとるものと仮定し，そのような最適性の一次条件として通常のオイラー条件である次式を導入している．

$$X_t = E_t\left(\sum_{\tau=t+1}^{\infty} \frac{U_c(c_\tau, \tau)}{U_c(c_t, t)} D_\tau\right),$$

ここで，X_t, D_t は，それぞれ，時刻 t における証券価格ベクトル，配当ベクトルであり，$U_c(c_t, t)$ は，時刻 t において消費水準が c_t である場合のエージェントの効用水準を表す．均衡においては，金融市場と材市場は共に清算されて消費 c_t が株式から得られる配当 δ_t に等しくなることを理由に，時刻 T のみで1が支払われる割引債の時刻 t における均衡価格 $B(t, T)$ を次式で与えている．

$$B(t, T) = \frac{1}{U_c(\delta_t, t)} E_t(U_c(\delta_T, T)), \forall t \in (0, T).$$

また，満期 T でペイオフが q_T となる派生証券の時刻 t における価格を $F_t(t, T)$ とすると

$$F(t, T) = \frac{1}{U_c(\delta_t, t)} E_t(U_c(\delta_T, T) q_T),$$
$$\forall t \in (0, T).$$

によって評価できるとしている．Cao and Wei[7]の戦略は，気温プロセスモデルのパラメータは，現実の気温変動から推定しておき，気温デリバティブの評価に必要な効用関数のパラメータと配当プロセスのパラメータを合わせた五つのパラメータを上で与えた $B(t, T)$ の均衡価格式が市場価格に一致するように推定したうえで，気温デリバティブを $F_t(t, T)$ によって評価するものである．

この節で示した二つの評価法は，共に通常の派生証券の価格評価法であるリスク中立評価法と次の点で異なることに注意したい．Brody, Syroka and Zervos[6]では，期待価値をエンピリカルな確率測度に基づいて計算している点であり（ただし，δ には，金利以外に市場リスクプレミアムが含まれているが），Cao and Wei[7]では，均衡においてではあるが，割引債価格を介在させる点でリスク中立評価法に近い立場だが，非線形な効用関数を仮定している点で，初めからリスク中立の前提でない点である．節5で述べる本稿の評価法は，通常の派生証券評価法で利用されるリスク中立条件が気温デリバティブにおいては現実的な意味を持たないことを示し，エンピリカルな確率測度を派生証券価格と整合性を持つように修正した確率測度に基づいて派生証券の評価を行う．よって，本稿の評価法も，いわゆるリスク中立評価法とは異なる．本稿における確率測度の修正が，Brody, Syroka and Zervos[6]では，割引率を，通常用いられる無リスク金利 r から，それに市場リスクプレミアムを加えた δ に修正していることと類似しており，本稿の評価法は，均衡アプローチよりは期待割引価値法に近いものと分類される．

4. 気温のパスを記述するマルコフ型モデル

ここでは，Yin and Zhang[4]における気温のパスを表現するモデルを採用したうえで，現実の累積HDDの分布に近く，かつ，妥当な数の累積HDD（累積CDDの場合でも方法は同じ）のサンプルを集める方法を提案する．以下では，東京都の日次平均気温の推移を取り上げ，具体的に1月に焦点を当てて説明する．

横軸には時間軸を，縦軸には平均気温軸を取り，それぞれ1日ごと，1℃ごと（端数は四捨五入）からなる格子点として，ある時間における状態を表現する．過去40年間の日次平均気温は，−1℃から33℃までであり，例えばこれを五つの気温帯にグループ化し，グループ1（以下G1等と記す）は，−1℃以上6℃未満，G2は，6℃以上13℃未満，G3は，13℃以上20℃未満，G4は，20℃以上26℃未満，G5は，26℃

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

以上33℃未満，とする．1月は，過去40年間において20℃以上になったことはなく，事実上グループ1からグループ3における格子点が実際に使用されることになる．暖冬等の言葉があるように，現実には気温は1月を通して暖かいというような継続性が度々生じるが，日次の気温の変化を単純に日々の推移確率行列を用いて1月間繋ぐと平均的な1月の累積気温近くに集積される傾向が強いため，単純なマルコフ連鎖では気温プロセスを表現できない．そこで，上記のグループ内の素早い変動を表現する，短期的な気温のマルコフ連鎖とグループ間を動くゆっくりと動く変動を表現したマルコフ連鎖とを組み合わせることにより，気温の動きを記述するモデルが，Yin and Zhang[4]において例示されている．そこでは，テキストの理解を助けるための例（そこでは連続時間である）として取り上げられている．

気温デリバティブの評価においては，将来の状態確率ではなく，気温のパスに関する情報が必要となるため，離散時間で取り扱うことにした．状態空間のグループ化を上記に示したが，時間軸方向にも分割する．例えば，3分割のケースであれば，1月1日～1月10日を期間1（以下P1と記す），1月11日～1月20日をP2，1月21日～1月31日をP3とする．グループ間をゆっくりと動く変動を表現したマルコフ連鎖は，この3期間をG1G2G1，G2G2G1などのような組み合わせ（1月であれば，最大27通りが考えられる）で表現される．この推移確率行列は，3行3列である．グループ内の素早い変動を表現する短期的なマルコフ連鎖は，各グループ，各期間における日々の推移確率行列を用いて記述される．各グループは，例えばG1であれば－1℃以上6℃未満の整数値であるように，それぞれ七つの状態空間を持つため，推移確率行列は，7行7列である．

推移確率行列の作り方の提案

グループ間推移確率行列

P1における各グループの確率は，過去40年間を調べて1月1日にG1，G2，G3の各グループの気温帯に実際の気温があった確率を用いる．ちなみに，0.45，0.55，0である．P2における各グループの確率は，1月1日～1月11日への推移を調べる．例えば，1月1日にG1に10回いたとし，そのうち1個がG3に4個がG2に，5個がG1に留まったとすると，グループ間推移確率行列の初期状態G1（P1ではG1であった）部分に対応する行には，(5/10，4/10，1/10）が用いられる．初期状態が他のグループである場合も同様に行う．但し，初期状態に確率がない場合には，自動的に，(0，0，0）を採用する．先に示した実際の例では，1月1日においては，G3の確率は0であったから，P1からP2へのグループ間推移確率行列の第3行は，すべて0が入ることになる．P2からP3へのグループ間推移確率行列も同様にして求められる．

グループ内推移確率行列

グループ内推移確率行列を求めるには，まず，現実のパスを加工しなければならない．例えばP1においてG1である場合には，現実の気温変化が1月7日から8日にかけてG1グループである5℃からG2グループである7℃に変化した場合でも，8日の気温は5℃とするように加工する．なぜなら，G1における最高気温の状態は，5℃だからである．逆に，ある期間内において，現実の気温が低いグループの気温状態空間に推移する場合でも，モデル上では現グループの下限の状態に推移したと加工する．このような加工を施した後で，グループ間推移確率行列を導いた手順を日次のジャンプに関して適用すれば，グループ内における日々の気温変化を表す推移確率行列が得られる．

気温のパスに関する取り扱いの提案

気温デリバティブを評価するためには，上記のモデルで生成される各気温パスの確率と累積HDDが必要になるが，すべての気温パスの情報を用いることは，場合の数が極端に多くなり事実上不可能である．そこで，気温パスを集約する一つの方法を，提案する．まず，グループ間の気温パスはすべて情報として採用する．この場合最大で27であった．例えば，G1G2G3なるグループ間のパスの例を取り上げよう．このグループパスの発生確率が，グループ間推移確率行列を用いて，1/27であったとする．次に，グループ内における気温パスに関しては，当該期間の最終日にたどり着いた状態ごとにパスを区分けする．この例では，P1においてG1をとっているので，P1の最終日である1月10日における状態は，七つあり，$-1 \leq f_1 < 0, 0 \leq f_2 < 1, \cdots, 5 \leq f_7 < 6$ ただし，$f_i (i=1, 2, \cdots, 7)$ は整数である．G1内のすべてのパスはこの七つのいずれかの状態にたどり着き，七つに集約されるとする．－1℃に集約されたパスの一つ一つについてHDDと確率がわかれば，－1℃に集約されるパスのP1における期待累積HDDが求まり（簡便な方法は後で述べる），最終日の－1℃の状態確率（これは既知）とセッ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

トにして，P1におけるG1の一つのパスと捉える．この手続きによって本来なら，7の10乗通りのパスが7通りに集約される．同様にして，P2におけるG2のパス，P3におけるG3のパスも7個ずつ得られる．G1，G2，G3の各グループから一つずつ取って繋ぎあわせると7の3乗個のパスが得られる．このようにしてできたパスの1本1本は，その確率と1月の累積HDDの情報を持っている．気温デリバティブを評価する際には，確率に関しては，グループパスとしてG1G2G3をとったという条件が加わるため，1/27倍する必要がある．上記の集約法を用いると，状態空間，期間ともに3分割の場合には，9261（7の3乗掛ける27）通りのパスで気温デリバティブの評価を行うことになる．

一つの状態に集約されるパスに関する期待累積HDDの計算方法

P1においてG1部分に関して示す．

時刻tにおける状態確率を$\mathbf{P}^t=(p^t_{-1}, p^t_0, \cdots, p^t_5)$とすると，日次の期待HDDを求める元となるベクトルは，$\mathbf{E}^t=(p^t_{-1}(18.33-(-1)), p^t_0(18.33-0), \cdots, p^t_5(18.33-5))$であり，各成分を加えたものが日次の期待HDDになる．時刻tから$t+1$までの間に状態iから状態$j(i, j=-1, 0, 1, 2, \cdots, 5)$に変化する推移確率行列を$\mathbf{Q}^t$とする．

Step 0. Calculate $\mathbf{E}^1$ and $\mathbf{F}^1=\mathbf{E}^1\mathbf{Q}^1$. Set $t=1$.

Step 1. Calculate $\mathbf{E}^{t+1}$ and $\mathbf{F}^{t+1}=\mathbf{E}^{t+1}+\mathbf{F}^t\mathbf{Q}^t$. Set $t:=t+1$.

Step 2. If $t=10$, then stop. $\mathbf{F}_{10}$ gives the expected cumulative HDD. Otherwise go to step 1.

数値例

上記の状態空間と状態のグループ化を採用して，期間分割を3分割したケースに関して，過去40年間の東京都における日次平均気温データから，1月と2月における累積HDDの累積密度関数を求めて図1，2に示した．期間分割を増やすに従って，累積分布関数が滑らかになり，かつ中央値付近の確率が高くなる傾

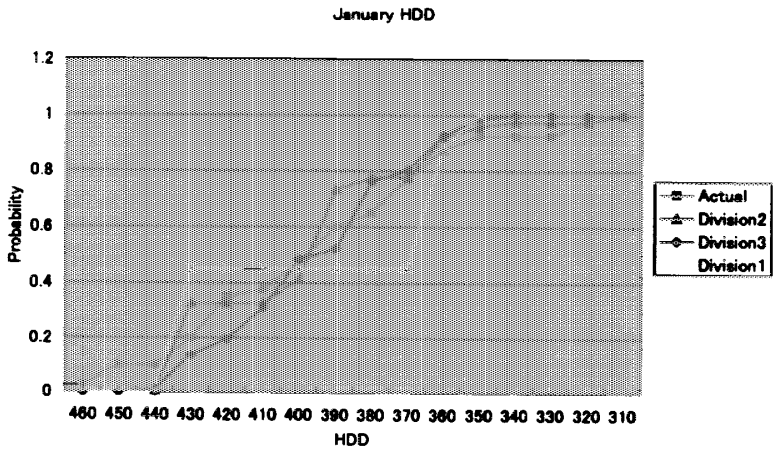

図1　1月の累積HDDの期間分割間比較

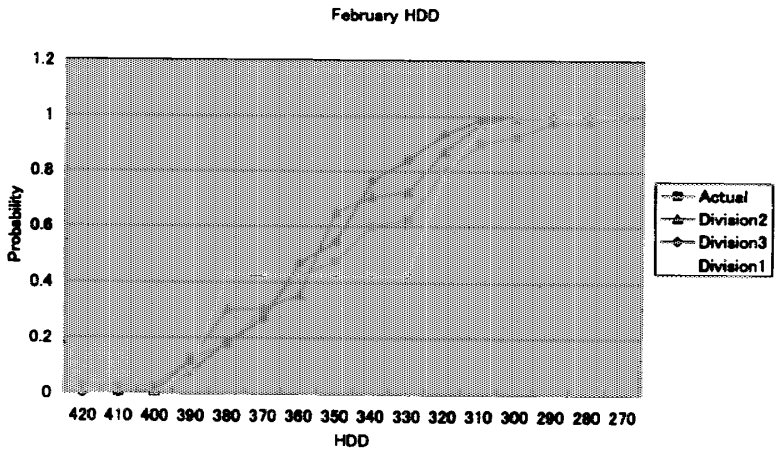

図2　2月の累積HDDの期間分割間比較

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

向が見られる．現実の累積密度関数に最も近いのは，1月，2月共に2分割の場合であることが図から読み取れる．これは，1分割では長期的なトレンドがつかまえられず，逆に，3分割では上下限の誤差が効いてくるためである．具体的に述べると，1分割では，グループ間のジャンプは1回だけであるから，各グループ内での変動の影響を組み合わせる機会が1回しかなく，HDDの中央地付近は真中のグループの，HDDの両端では両端のグループの影響が強く出すぎるためにグループ間を動く長期的なトレンドの表現が弱くなり，グラフは2段の階段状に近くなる．逆に，3分割ではグループ間ジャンプが3回と多くなるため，各グループは，他のグループからの影響を大きく受けるため，各グループ内だけでの変動よりも大きな変動となる．図3，4は，1月と2月における累積HDDの累積密度関数に関して，現実のもの，正規分布でフィットしたもの，本モデルによるものを合わせて示した．この程度の粗さのグルーピングであったとしても，現行の手法，つまり，現実の累積HDD分布を単に正規分布でフィットさせて得られる累積HDD累積密度関数と同程度の分布が得られる．具体的に，1月の累積HDD分布を見ると，正規分布でフィットさせた累積HDD分布は，累積HDDが430以下であるところではすべて現実の累積HDDよりも確率は低いのに対し，モデルからの累積HDD分布にはそのようなバイアスはないが，現実の累積HDD分布を直接フィットさせたわけではないので，累積HDDの値間の滑らかさに劣る傾向が見られる．2月の累積HDD分布を見ると，累積HDDが370以下のところでは，正規分布でフィットさせた累積HDD分布とモデルからの累積HDD分布は，ほとんど同じ確率を与える．累積HDDが380においては正規分布でフィットさせた累積HDD分布が現実の確率を捉えているのに対し，累積HDDが390以上の部分に関しては，モデルからの累積HDD分布が現実の累積HDDの確率を捉えている．また，先に指摘したそのようなモデルからの累積

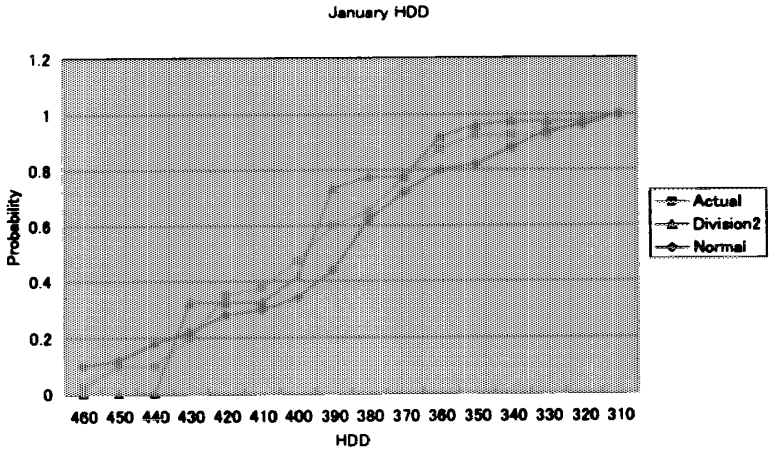

図3　1月の累積HDDのモデル間比較

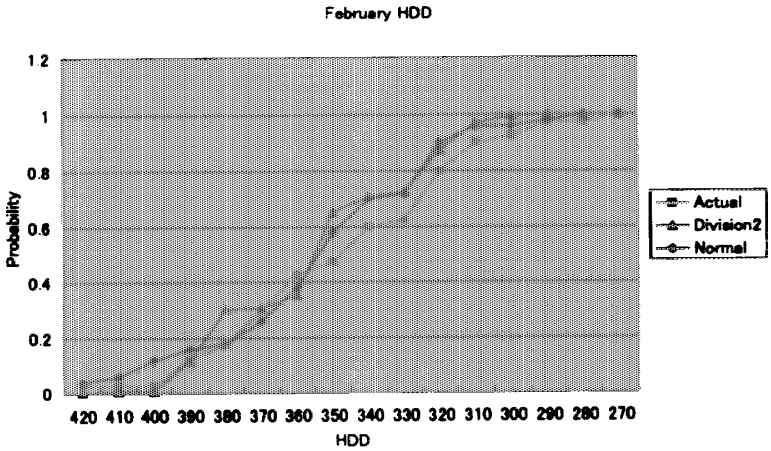

図4　2月の累積HDDのモデル間比較

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

HDD分布に滑らかさが少ない傾向はここでも見られる．この傾向を解消するには，適切にグルーピングを増やす必要がある．

5. マルコフ連鎖型モデルに基づく評価法とプレミアム分析

通常，派生証券を評価するには，リスク中立確率を用いる．ここでは，既に市場に流通している派生証券からリスク中立確率を導出する手法を扱った論文Rubinstein[8]およびJackwerth and Rubinstein[5]を参照し，マルコフ連鎖型モデルに基づく気温デリバティブの評価法を，通常のリスク中立評価法との相違点を明確にしたうえで提案する．ます，参考文献[5, 8]の手法をRubinsteinの方法として節5.1で解説する．節5.2で，マルコフ連鎖型モデルに基づく気温デリバティブの評価法を前節で示したRubinsteinの方法と対比させて示す．また，この対比から明らかになる相違点に着目して，気温デリバティブにおける無裁定条件なるものをまとめておく．節5.3では，節2.1の商品説明において用いた気温デリバティブを節5.2の方法に基づいて評価たプレミアム分析の数値例を紹介する．

5.1 Rubinsteinの方法

Rubinsteinの方法は，株式オプションを2項モデルで評価するという前提のもとで，Part(1)ある同じ満期の異なる行使価格のヨーロピアン株式コールオプションの価格から，満期時点でのリスク中立確率を導出する，およびPart(2)後ろ向き再帰法に基づき，無裁定条件を満たす制約の下で2項木すべてのリスク中立確率を導出することから成る．本質的な部分を手短にまとめておく．

Part(1)のまとめ

満期における株価を低い方から高い方へと$S_j(j=0, \cdots, n)$とする．つまり，2項木の最も先の枝の状態を下から上に$S_j(j=0, \cdots, n)$とする．P'_jが満期時点でのリスク中立確率となるには，まず，$\sum_j P'_j=1$（後に示す二次計画法における（C：R1）に相当）を満たさねばならない．p^Eを2項木の各時点における上方ジャンプのエンピリカルなジャンプ確率とすると，2項モデルでは末端における状態S_jに到達するエンピリカルな確率は，$P^E_j=[n!/j!(n-j)!]p^{Ej}(1-p^E)^{n-j}$である．また，$p'$を2項木の各時点における上方ジャンプのリスク中立確率とするなら，$P'_j=[n!/j!(n-j)!]p'^j(1-p')^{n-j}$である．この確率は$n$が十分大きいときに対数正規分布に近づく．Rubinsteinは，事後的なリスク中立確率P_j（同じ満期の異なる行使価格のヨーロピアン株式コールオプションの価格から得られるリスク中立確率）の分布を，P'_jの分布に最小二乗法の意味で最も近くなるように二次計画法を用いて求めた．

二次計画法

$$\min_{P_j} \sum_j (P_j - P'_j)^2 \quad \text{subject to}$$

$$\sum_j P_j = 1 \quad \text{and} \quad P_j \geq 0 \quad \text{for} \quad j=0, \cdots, n$$

（C；R1）

$$S^b \leq S \leq S^a \quad \text{where} \quad S = \left(\delta^n \sum_j P_j S_j\right) \Big/ r^n$$

（C；R2）

$$C_i^b \leq C_i \leq C_i^a \quad \text{where}$$

$$C_i = \left(\sum_j P_j \max[0, S_j - K_i]\right) \Big/ r^n$$

$$\text{for} \quad i=1, \cdots, m \quad \text{(C；R3)}$$

（C；R2）は，オプション満期における株価をリスク中立確率で評価して現在価値に割引いた価格が，現在の株価に等しい（ビット・オファー内に収まる）ことを要求するものである．この条件を，本稿では，誤解を恐れずに原資産に関するリスク中立条件と呼ぶことにする．

（C；R3）は，リスク中立確率が市場で観測されるオプション価格と整合性が取れている条件である．この条件を，本稿では，オプションに関するリスク中立条件（無裁定条件）と呼ぶことにする．

Part(2)のまとめ

ここでは，Part(1)において得られたリスク中立確率を出発点にして，2項木上のリスク中立確率過程を後ろ向きに求める方法を示している．気温デリバティブの評価法の説明を明確にするためにも，一部重複するがこの部分で用いられている仮定を再掲する．

（仮定R1）原資産のリターンは2項プロセスに従う．

（仮定R2）2項木は再結合する．

（仮定R3）末端のノードの値は低いものから高いものへと並んでいる．

（仮定R4）金利は一定．

（仮定R5）同じ末端ノードにたどり着くすべてのパスは同じリスク中立確率を持つ．

議論を追いやすくするために，2ステップまでの2項木に絞ってリスク中立確率過程の導出メカニズムを

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

示す．これは，次に示す(A)状態の推移に関する構成（図5参照），(B)リスク中立推移確率に関する構成（図6参照），(C)原資産に関するリスク中立条件に関する構成，の三つの部分から成る．

(A) 2項木の末端の各状態におけるリターンは既知であり，R_0, R_1, R_2 である．

(B) 2項木の末端の各状態におけるリスク中立確率 P_0, P_1, P_2 は，Part (1)から既に求められている．

(C) 以下の等式には，原資産に関するリスク中立条件であり外生的に与えられたものは入っていない．

$$p=(r-d)/(u-d)$$
$$p[d]=(r[d]-d[d])/(u[d]-d[d])$$
$$p[u]=r[u]-d[u])/(u[u]-d[u])$$

リスク中立確率過程の導出は，六つの既知データ R_0, R_1, R_2, P_0, P_1, P_2 から12個の未知数 $d, u, r, p, d[d], u[d], r[d], p[d], d[u], u[u], r[u], p[u]$ を求めることになり，仮定R1～R3だけでは一意に決まらない．よって，仮定R4，R5が付加されたのである．

5.2 マルコフ連鎖型モデルに基づく気温デリバティブの評価法

マルコフ連鎖型モデルに基づく気温デリバティブの評価法を前節で示したRubinsteinの方法と対比させて示す．大前提として，オプションの評価は，グループ内を素早く動くマルコフ連鎖自体の推移確率行列にはエンピリカルなものを利用し，グループ間をゆっくりと動くマルコフ連鎖の推移確率行列に関してはリスク回避度修正済み推移確率行列（あえてリスク中立とは呼ばないことにする）を用いる．以下では，気温デリバティブの満期までの期間を3分割した図7に示すような場合を取り上げる．第1期間は現在位置している気温グループ（図7ではG2）であるから，この3分割は，Rubinsteinの方法におけるステップ数が2の場合に対応している．図7の $H_2^{(0)}, H_3^{(1)}, H_2^{(1)}, H_1^{(1)}, H_3^{(2)}, H_2^{(2)}, H_1^{(2)}$ は，各期間の各グループにおける累積HDDとその確率の七つの組を記号で表したものである（括弧内は期間を，サフィックスはグループを表す）．実際の評価には，$H_i^{(j)}$ としてこの七つの組を用いるのであるが，以下ではグループ間のリスク回避度修正済み推移確率行列の概念とRubinsteinの評価法との対比を見やすくするように，$H_i^{(j)}$ があたかも確定値であるような記述をとり，また，市場価格が既知である気温デリバティブに関しても第3期間のみにおける累積HDDのコールオプション（ヨーロピアンオプションとの対応のため）を考える．マルコフ連鎖型評価モデルにおいて，Rubinstein評価法の仮定R1～R3，2項木の末端における状態 S_j，エンピリカルな上方へのジャンプ確率 p^E，上方へのリスク中立

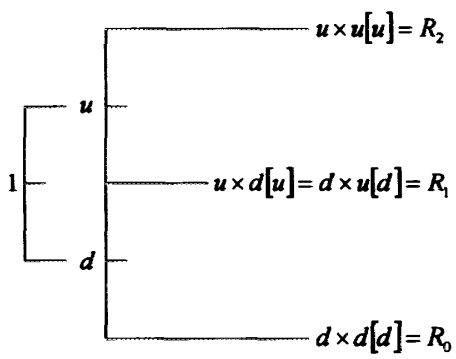

図5　2ステップ2項木における状態推移とリターン

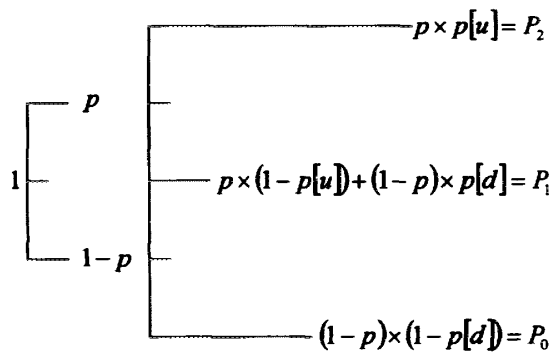

図6　2ステップ2項木における推移確率と状態確率

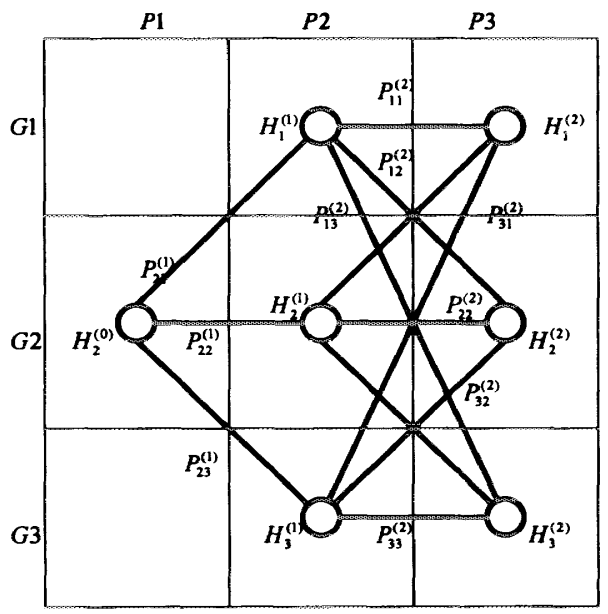

図7　気温デリバティブ評価の模式図
（ここで，$G1$～$G3$，$P1$～$P3$ はそれぞれ気温のグループ，満期までの期間分割を示す

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

なジャンプ確率 p' および2項木の末端におけるリスク中立確率 P'_j に対応するものは次の通り．

（仮定M1）原資産は，マルコフ連鎖型モデルに従う．

（仮定M2）初めに指定した状態空間のみを取り得る．

（仮定M3）末端のノードの値は低いものから高いものへと並んでいる．

S_j の対応：$H_j^{(2)}$

$$p^E \text{ の対応：} \begin{pmatrix} p_{11}^{E(k)} & p_{12}^{E(k)} & p_{13}^{E(k)} \\ p_{21}^{E(k)} & p_{22}^{E(k)} & p_{23}^{E(k)} \\ p_{31}^{E(k)} & p_{32}^{E(k)} & p_{33}^{E(k)} \end{pmatrix}, k=1,2$$

ここで，括弧内の k は期間 k から $k+1$ への推移であることを示し，サフィックスは，どのグループからどのグループへの推移であるかを示す．

$$p' \text{ の対応：} \begin{pmatrix} p_{11}'^{(k)} & p_{12}'^{(k)} & p_{13}'^{(k)} \\ p_{21}'^{(k)} & p_{22}'^{(k)} & p_{23}'^{(k)} \\ p_{31}'^{(k)} & p_{32}'^{(k)} & p_{33}'^{(k)} \end{pmatrix}, k=1,2$$

ここで，括弧内の k は期間 k からへ $k+1$ の推移であることを示し，サフィックスは，どのグループからどのグループへの推移であるかを示す．

P_j^E の対応：図7に合わせて出発時点をG2としたケースを示す．

$$\begin{pmatrix} p_{21}^{E(1)}p_{11}^{E(2)}+p_{22}^{E(1)}p_{21}^{E(2)}+p_{23}^{E(1)}p_{31}^{E(2)}, \\ p_{21}^{E(1)}p_{12}^{E(2)}+p_{22}^{E(1)}p_{22}^{E(2)}+p_{23}^{E(1)}p_{32}^{E(2)}, \\ p_{21}^{E(1)}p_{13}^{E(2)}+p_{22}^{E(1)}p_{23}^{E(2)}+p_{23}^{E(1)}p_{33}^{E(2)} \end{pmatrix}$$

P'_j の対応：P_j^E と同様に，図7に合わせて出発時点をG2としたケースを示す．

$$\begin{pmatrix} p_{21}'^{(1)}p_{11}'^{(2)}+p_{22}'^{(1)}p_{21}'^{(2)}+p_{23}'^{(1)}p_{31}'^{(2)}, \\ p_{21}'^{(1)}p_{12}'^{(2)}+p_{22}'^{(1)}p_{22}'^{(2)}+p_{23}'^{(1)}p_{32}'^{(2)}, \\ p_{21}'^{(1)}p_{13}'^{(2)}+p_{22}'^{(1)}p_{23}'^{(2)}+p_{23}'^{(1)}p_{33}'^{(2)} \end{pmatrix}$$

上記の対応を踏まえたうえで，Rubinstein評価法に従って，マルコフ連鎖型モデルに基づく評価法において先の二次計画法を記述するとするなら，どのようになるかを取り敢えず形式的に書き下してみる．

二次計画法

$$\min_{P_j} \sum_{j=1,2,3} (P_j - P'_j)^2 \quad \text{subject to}$$

$$\sum_j P_j = 1 \quad \text{and} \quad P_j \geq 0 \quad \text{for} \quad j=1,2,3$$

(C；M1)

$$H^b \leq H \leq H^a \quad \text{where} \quad H = \left(\sum_j P_j H_j^{(2)}\right) \Big/ r^2$$

(C；M2)

$$C_i^2 \leq C_i \leq C_i^a \quad \text{where}$$

$$C_i = \left(\sum_j P_j \max[0, H_j^{(2)} - K_i]\right) \Big/ r^2$$

$$\text{for} \quad i=1,\cdots,m \quad \text{(C；M3)}$$

（C；M1），（C；M3）は，それぞれ（C；R1），（C；R3）の類似であり，かつ，実質的な意味をもつ．目的関数もRubinstein評価法の類似ではあるが，末端の状態のリスク中立確率が一種類のリスク中立な上方へのジャンプ確率 p' で記述されるRubinstein評価法とは異なり，数多くのリスク修正ジャンプ確率が含まれている．（C；M2）は，原資産に関するリスク中立条件（C；R2）の類似ではあるが，気温デリバティブの原資産である気温自体が市場で売買されるものでないため実質的な意味を持たなくなっており，制約条件から取り除かれることになる．原資産におけるリスク中立条件（C；R2）は，リスク中立確率過程を導出する際にも利用される制約条件(C)に本質的に同じである．よって，Rubinstein評価法のように満期でのリスク中立確率を求めたうえで，(C)を付加条件として用いて後ろ向き再帰法を用いて，気温パスのリスク中立確率過程を導出することはできない．

このため，エンピリカルな推移確率行列の各推移確率に一定確率 γ を調整した（この場合はリスク中立推移確率行列の自由度は1であり，調整量が状態に依存するような一般化を行うとこの自由度は大きくなる）自由度が低いリスク回避度修正済み推移確率行列を導入したうえで，数少ない市場で取引されている派生証券価格から（C：M1），（C：M3）を用いてリスク回避度修正済み推移確率行列を推定して，市場で取引されていない派生証券を評価することになる．一度リスク回避度修正済み推移確率行列の推定が終われば，気温パスのリスク回避度修正済み確率過程はそれから直ちに従うため，観測された派生証券価格と整合性がとれる形で，他の派生証券の評価が可能になるのである．上記の考察を踏まえた気温デリバティブにおける無裁定条件に関することをまとめておく．

気温デリバティブにおける無裁定条件とは

気温デリバティブの評価においては，通常のデリバティブ評価法で利用される無裁定条件(C)が実質的に欠落するわけであるから，先に述べた一定確率 γ をどのように導入してエンピリカルな推移確率行列を修正するべきかの正しい答えがないことになる．これは繰り返しになるが，気温デリバティブにおいては，ダイナミカルに気温自体を売買してデルタヘッジすることができないためである．よって気温デリバティブにお

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ける実際的な無裁定条件は（C；M3）とみなすのが妥当であると思われる．つまり，市場で取引されている相互の派生証券自体の価格が整合性を満たしているか（派生証券を用いたスタティック・ヘッジングに関して無裁定であるか）がポイントである．具体的に述べると，気温デリバティブBと気温デリバティブCを組み合わせたエコノミーと同じエコノミーを持つ気温デリバティブAにおいて，プレミアムA＝プレミアムB＋プレミアムCが成り立つことが気温デリバティブの無裁定条件であると現段階では考えている．

5.3 数値例

ここでは，節2.3で述べたように，気温プロセスとして節4で示した期間2分割モデルを取り上げて説明する．リスク回避度修正済み推移確率行列の例を示したうえで，1月400プットオプション（商品例においては取引日の記載はないが，ここでは2001年1月1日としておく）が28百万円で取引されたという情報だけに基づき，他の行使価格に関するの同種の気温デリバティブのプレミアム分析を行う．節2.3で問題提起した気温デリバティブのポートフォリオのプレミアム分析も行う．

リスク回避度修正済み推移確率行列

気温プロセスを記述するモデルが期間2分割であるから，グループ間推移確率行列は次に示すようなものである．

$$\begin{array}{c} G1 \\ G2 \\ G3 \end{array}\begin{pmatrix} 0.72 & 0.28 & 0 \\ 0.59 & 0.36 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G3の行が0であるのは，1月1日における気温が過去40年間G3になかったことを意味し，この状態からのジャンプに関しては考察する必要がないため便宜上，推移確率は0とおく．また，1月1日から1月16日へのジャンプもなかったため，G1からG3への推移確率も0となっている．マルコフ連鎖型の気温パスもモデルにおいては，この推移確率行列がエンピリカルな確率測度に対応している．

一つのパラメータによるリスク回避度の表現例

リスク回避度をγとし，プット側のリスク回避度修正済み推移確率行列を

$$\begin{array}{c} G1 \\ G2 \\ G3 \end{array}\begin{pmatrix} 0.72-\gamma & 0.28+\gamma & 0 \\ 0.59-2\gamma & 0.36+\gamma & 0.05+\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．ただし，修正後の各成分も非負とする（コール側では符号が変わる）．ここでは，元々確率のない所には修正を行わず，推移確率の修正幅は状態および推移幅によらず一定としている（グループ内推移確率行列は，変換しないものとする）．また，各状態へのジャンプ確率の和は1となるように第一列目のジャンプ確率を設定しておく．よって，節5.2で与えた（C：M1）はこの時点で満たされている．ここでのγは，節3で示したBrody, Syroka and Zervos（2001）のアプローチにおけるδのリスクプレミアム部分に相当するものと考えることができる．このように，リスク回避度修正済み推移確率行列を定義すれば，取引が行われた1月400プットオプション価格からγが求まり，他の行使価格に関するの同種の気温デリバティブのプレミアムが一意に定まる．

実際に，節5.2で与えた（C：M3）に対応する条件となる1月400プットオプションが28百万円であることを用いて，一次方程式を解くと（非負条件があるので線形計画問題を解くと述べた方が正しいが）$\gamma=0.15$となる．気温パスをモデル化した評価法では，当然のことながら評価日の1月1日に気温がどの状態にあるかによってプレミアムは異なる．これに対し，節2.2の気温パスをモデル化しない評価法では1月1日の気温の状態に依存しない．ここでは，両者のプレミアム比較を容易にするために，気温パスをモデル化した評価法を適用する際には，1月1日の各気温から出発したとして求められるプレミアムを1月1日における各気温の確率（節2.2と同じ過去40年から求めた1月1日における気温の状態確率）を用いて加重平均したものを利用した．

リスク回避度修正済み推移確率行列を用いたものと，標準偏差の一定比率によるものとを表3に比較した．プレミアムはすべてリスク回避度修正済み推移確率行列を用いた場合の方が大きく出るが，行使価格が380の場合に両者の差が最も大きくなった．節2.3における問題提起の一つは，このように400プットオプションが28百万円で実際に取引されたとき，標準偏差の一定比率を用いて他の行使価格のプレミアムを評価すると，割安に評価してしまうことに現れる．

他の問題提起として，通常400プットオプションを購入している会社が400コールオプションも同時に購入したいとの申し入れがあった場合の評価を取り上げた．オプション引受者は，リスク回避的であるが，実際の気温は「低い・高い」のどちらかしか取り得ないので，同時に両サイドにリスク回避的となる事象は起こり得ない．よって，両方のオプションに標準偏差の

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

表3

Premium					
Strike	400	390	380	370	360
標準偏差の一定比率法	28	22.27	18.06	14.29	11.34
リスク回避度修正推移確率行列法	28	22.92	18.92	15.01	11.65

注：400プットの価格を28にする一定比率0.51を使用.

表4

Premium				
Strike	400-400	390-410	380-420	370-430
標準偏差の一定比率法	48.78	36.76	26.43	16.73
リスク回避度修正推移確率行列法	36.69	28.94	22.37	15.89

注：共にマルコフ型モデルにより累積HDDを発生.

表5

Premium					
Strike	400	390	380	370	360
最大値	28	23.59	20.17	16.85	13.93
最小値	28	20.84	15.29	9.79	5.30

一定比率を上乗せすると，オプション購入者にとって極めて不利になる．この場合，400コールオプションを先に推定したリスク回避度修正済み推移確率行列で評価すれば，適切に評価できる．また，ストラドルだけでなくストラングルのように行使価格の異なる組み合わせに関しても対応できる．表4には，プットオプションとコールオプションの合計のプレミアムが二つの評価法でどのように異なるかを示した．ストライクが400に近いものに関しては，標準偏差の一定比率法を用いた場合にかなり割高に評価していることがわかる．

多数のパラメータによるリスク回避度の表現例

1変数によるリスク回避度表現の自然な拡張は，推移確率の修正幅を状態および推移幅に依存可能にすることであり，を用いて次のように定義される．ただし，修正後の各成分も非負とする．

$$\begin{array}{c} G1 \\ G2 \\ G3 \end{array}\begin{pmatrix} 0.72-\gamma_1 & 0.28+\gamma_1 & 0 \\ 0.59-(\gamma_2+\gamma_3) & 0.36+\gamma_2 & 0.05+\gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このような自由度の高いリスク回避度修正済み推移確率行列を定義した場合には，1月400プットオプション価格からだけでは，他の行使価格に関するの同種の気温デリバティブのプレミアムは定まらない．しかしながら，それらの最大値と最小値は，次の線形計画問題を解くことによって得られる．

線形計画問題　最大値（最小値）

$$\max_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(\min_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} P(\mathrm{Strike}=X, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \mathrm{HDDdist})\text{；目的関数}$$

$$P(\mathrm{Strike}=400, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \mathrm{HDDdist})=28 \quad \text{；制約条件}$$

$$\gamma_1\geq 0, \gamma_2\geq 0, \gamma_3\geq 0\text{；非負条件}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}\geq \mathbf{0}$$

ここで，Pは，リスク回避度係数$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$，行使価格$K$に依存して決まる気温デリバティブ価格である．具体的には，リスク回避度修正済み推移確率行列を用いて第3でのべたアルゴリズムに基づき期待累積HDDを求めて，行使価格に依存する期待ペイオフを無リスク金利で割引いた値である．制約式は，市場価格がわかっているオプションについて目的関数で与えた評価法に基づいた価格が市場価格に一致する条件である．価格の行使価格を$\tilde{\mathbf{Q}}\geq\mathbf{0}$は，リスク回避度修正済み推移確率行列の各要素が非負を表現する．上記の線形計画法を解いて，プレミアムの最大値・最小値を表5にまとめた．表5は，ある意味において，表3で示した400プットオプションのプレミアムに関する信頼区間として捉えることができる．つまり，柔軟にリスク回避度を設定した場合でも，400プットオプション価格が観測された場合に，他の行使価格のオプションプレミアムは表5の範囲から外れないからである．最小値は，今後競争が激化した場合にも，理論的に値引きが許容される限度の参考値として利用可能であり，

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

また最大値は，これ以上高いプレミアムを提示すると取引関係が険悪化する限度として実務上利用可能と考えられる．もちろん，実際の適用に際しては，いくつか他のリスク回避度表現に関しても最大値，最小値を求めて，リスク回避度表現の与え方に関するロバストネスを確認しておく必要がある．

Remark：期間3分割のケースでは，1パラメータリスク回避度表現を採用した場合，グループ間の推移確率行列が二つできるから，二次方程式を解く（非負条件があるから，正しくは非線形最適化問題を解く）ことになる．多パラメータリスク回避度表現を採用した場合や期間分割が3分割以上であれば，本節での分析は何れも非線形最適化問題を解くことに帰着される．

6. まとめと今後の課題

本論文では，天候デリバティブのなかで特に需要が多い気温デリバティブを取り上げ，プレミアムの相対価値分析を容易に行うことのできる評価法を提案し，気温変化に関する実データを用いたうえで数値例を示しながらいくつかプレミアムの分析を行った．気温パスのモデル化としてはマルコフ型モデルを採用し，比較的粗い気温パスのグルーピングを行っても正規分布でフィットした累積HDD分布と遜色ない程度の分布が得られた．しかしながら，最適となる気温パスグルーピングの見つけ方やマルコフ型モデルが実際どの程度まで現実の気温変化を捉えるかに関する分析までには至らなかった．プレミアムの評価では，リスク回避度修正済み推移確率行列を導入してプレミアム間の相対価値分析が容易に行える方法を提案した．しかしながら，金融資産に関する評価において用いられている無裁定条件が利用できないためにリスク回避度修正済み推移確率行列を一意に与えることはできなかった．金融資産に関する派生証券評価法を特殊例として含むような論理を構築したうえでの改良は，今後の課題としたい．また，本論文で提案した手法が実務上どの程度有効であるかに関しては，今後の天候デリバティブの発展過程で実務家の判断を仰がねばならないが，天候デリバティブの公開された評価法が少ないなか，実務家に評価法に関する一つのアイデアと議論を喚起するきっかけを提示できたとすれば，本論文の目的は達成されたと考える．

謝辞　貴重なご意見を頂きました2人のレフリーに感謝いたします．

参考文献

[1] 土方薫編,「天候デリバティブ」, シグマベイスキャピタル, 2000.

[2] 森村英典, 高橋幸雄,「マルコフ解析」, 日科技連, 1979.

[3] Geoffery, C., "Introduction to Weather Derivatives", Weather Derivatives Group, Aquila Energy, 1999.

[4] G. George Yin and Qing Zhang, Continuous-Time Markov Chains and Applications, Springer-Verlag New York, Inc., 1998.

[5] Jackwerth J.C. and M. Rubinstein, "Recovering probability distributions from option prices", Journal of Finance, 51: 1611-1631, 1996.

[6] Joanna Syroka, Dorje C. Brody and Mihail Zervos, "Dynamical pricing of weather derivatives", submitted to Quantitative Finance.

[7] Melanie Cao and Jason Wei, "Equilibrium valuation of weather derivatives", 2000.

[8] M. Rubinstein, "Implied binomial trees", Journal of Finance, 49: 771-818, 1994.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．