ORメモランダム

# 干支（えと）まんだら

牧野　都治

## まえがき

OR学会の活動の一環として「高校生のためのOR」研究部会があり，おもしろい活動をしておられたとうかがっていたが，本誌の1997年12月号の特集記事などを通して，なるほどと納得することができた．そこで私も，高校生にわかるような，条件つき確率にまつわる2つの短いはなしを書いてみた．

## 1．干支あわせ

ミレニアム元年とさわがれた昨年は干支でいうと辛巳（かのとみ）の年．巳年は金運がよいと期待していた向きも少なくなかったようであるが，結果はたいへん不調に終わった．それでは，今年はというと，壬午(みずのえうま)．希望をのせて一気に駈け上ってもらいたいものである．ところでこの十干十二支．字をキッチリ書けそうにないので，事典を開いてみると，

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (木) | (火) | (土) | (金) | (水) |
| 十干 ； | 甲乙 | 丙丁 | 戊己 | 庚辛 | 壬癸 |

十二支；子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥

とある．十干の方は（甲乙)，(丙丁)，(戊己)，…のように，2つ1組にして木(き)，火(ひ)，土（つち)，金（かね)，水（みず）の順にならべ，各組の最初を兄(え)，後を弟(と)とよんでいる．干支は，そこに，十二支を組み合わせるので，甲子はきのえね，その翌年は乙丑（きのとうし)．さらにその翌年は丙寅（ひのえとら）となる．ちなみに，今年と同じ壬午は何年に1度めぐってくるかというと，むかしの小学生ならば，10と12の最小公倍数を計算して，60年ごとにやってくるということを知っていた．そこで，ひょいと思った．無作為（でたらめ）に取り出したある歴史上の人物の生まれ年が壬午である確率はいくらかという問題である．もちろん解は1/60である．しかし，これを次のように考えたらどうか．その人物が十干の壬の年に生まれている確率は1/10で，十二支の午の年に生まれている確率は1/12なので，壬午の年に生まれた確率は

$(1/10)\times(1/12)=1/120.$

これは明らかに誤りである．「どうしてなのかなあ…」と興味を持ってくれる生徒はいないだろうか．一そういう生徒がいたとして，そんな疑問に答えてみよう．初めに，十干の壬に着目したとすると，たとえば壬午の次に壬がくるのは，それから10年後で壬辰となり，それから10年後は壬寅となる．それでわかるように，壬と結びつく十二支は子寅辰午申戌だけである．よって，上の問題の正解は1/60ということになるのであるが，これでは先程の「どうしてなのかなあ」という問いかけに，十分には答えていない．それには，次のように答えるのがひとつの方法であろう．いま，無作為に選んだ“ある年”が十干の甲の年であるという事象を$A_1$，乙であれば$A_2,\cdots$，癸であれば$A_{10}$で表わすことにする．また，その年が十二支の子であるという事象を$B_1$，丑であれば$B_2,\cdots$，亥であれば$B_{12}$で表わすことにする．このような$A_i, B_j$を用いると，無作為に注目した“ある年”が壬午である確率は，$P(A_9\cap B_7)$によって表わされるので，求める答えは

$$P(A_9\cap B_7)=P(A_9)\cdot P_{A_9}(B_7)$$
$$=(1/10)\times(1/6)=1/60$$

になる．ところで，この問題でいおうとしているのは，上式の条件つき確率$P_{A_9}(B_7)$を，単に$P(B_7)$としてはいけないという注意を喚起することにほかならない．

しかし，十干十二支は古いというのであれば，2種類のカードの組み合わせで，次のような問題にしてもよい．

［問題1］　下図のように，A行．B行にいずれも同じ大きさのいくつもの枠があり，それぞれに1枚ずつカードが入っている．A行の枠には，左から順に

まきの　とじ
〒270-0021 松戸市小金原4-35-15

$A_1, A_2, \cdots, A_{10}$
と書いたカードが入っており，その後にまた，$A_1, A_2, \cdots$の枠が続いている．

同様に，B行の枠には，左から順に

$B_1, B_2 \cdots, B_{12}, B_1, B_2, \cdots$
と書いたカードが入っている．A行とB行の左端はそろっており，各行の枠は隣との間にすき間がない．

| A 行 | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | … | $A_{10}$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B 行 | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | … | $B_{10}$ | $B_{11}$ | $B_{12}$ | $B_1$ | $B_2$ | … |

いま，$(A_1, B_1)$から始めて，A行から1個，B行から1個のカードを取り出し，単位時間に1組ずつ
$(A_1, B_1), (A_2, B_2), \cdots, (A_{10}, B_{10}), (A_1, B_{11}), (A_2, B_{12}), (A_3, B_1), (A_4, B_2), \cdots$
のように，対を作っていく．

長い時間がたった後で，ストップをかけたとき，特定の対$(A_i, B_j)$で終わる確率はいくらか．

このようにすると，こんどは大学入試（数学B）の易しいレベルの問題になる．この問題の解は前述の十干十二支の問題と同じであるが，i+jが偶数のとき1/60，奇数のときには0になると答えるべきであろう．

## 2. 三の酉

十二支は子年とか丑年というように，年だけについてではなく，子の月とか子の日，子の刻などにも用いられてきた．毎年11月になると，“お酉（とり）さま”という行事が話題になる．11月の最初の酉の日を一の酉，その次を二の酉というが，もし11月中にその次の酉の日があれば，それを三の酉という．酉の日は12日ごとにまわってくるので，三の酉があるためには，11月1日から6日までの間に一の酉がこなくてはならない．したがって，無作為に取り出した“ある年”に三の酉がある確率は1/2であるといってよい．ところが昨年（平成13年）は11月に三の酉があったが，今年も三の酉がある．このように2年続いて三の酉があるというのは，珍しいことかもしれない．そこで，「無作為に取り出した“ある年”が三の酉まであり，その翌年も三の酉がある確率はいくらか」という問題を考えてみた．これを解くには次のようにしたらよい．まず，“ある年”の翌年が平年であった場合について考えてみる．この場合“ある年”の一の酉が11月1日であったとき，2日であったとき，…，5日，6日であったときに応じて，たとえば372日後にあたる，翌年の11月8日，9日，…，12日，13日が酉の日になるが，この13日というのは二の酉であって，その年の一の酉が11月1日になる．つまり，“ある年”の一の酉が11月1日～12日の中の11月6日であったときだけ，翌年も（一の酉が11月1日になり）三の酉がある．それで，翌年が平年の場合，“ある年”とその翌年が2年続きで，三の酉をもつ確率は1/12になる．それでは，翌年が閏年の場合はどうかと調べてみると，その年には三の酉はないことがわかる．閏年は4年に1度まわってくる．したがって，無作為に取り出した“ある年”が三の酉まであり，翌年も三の酉がある確率は

$$(1/12)\times(3/4)+0\times(1/4)=1/16$$

になる．それで，これはちょっと珍しいことといってよいかもしれない．ただし，単に2年続きで三の酉があることが珍しいかどうかというのであれば，“ある年”とその前年が三の酉をもつ場合も考えるのが適当であろう．これを考慮すると，2年続きで三の酉がある確率を計算するのに次のようにしたらよい．まず，“ある年”とその前年がいずれも三の酉をもつ事象をCで表わすことにすると，P(C)=1/16．次に，“ある年”とその翌年がいずれも三の酉をもつ事象をDで表わすことにすると，P(D)=1/16．

ここで，事象Dは“ある年”の一の酉が11月6日である事象のことであり，事象Cは一の酉が11月1日である事象のことであるから，CとDとはたがいに排反である．したがって，2年続きで三の酉のある確率は

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)=1/8.$$

この値からみると，2年続きで三の酉というのは，とりわけ珍しいこととも言えない．それはそれとして，酉の日の問題ではピンとこないという生徒向けには，

［問題2］ 無作為に取り出した“ある年”が，その前年または翌年と2年続きで，11月に第5金曜日をもつ確率はいくらか．ただし，4年に1度閏年がまわってくることを考慮して計算せよ．

などとしてみたらいかがであろうか．こういう形で扱うならば，これも高校数学Bの問題といってよいと思う．