ファジィ組合せ最適化

石井　博昭

1.　はじめに

我々がファジィ組合せ最適化を研究し始めた動機はChanas et al.によるファジィ容量の概念[1, 2]であった．彼らはファジィ概念の存在下で，最大フロー最小カットの定理が拡張できることを鮮やかに示したのである．我々はこれがファジィ組合せ最適化の始まりであると思っている．最近の社会情勢での個々人の価値の多様化，社会状況の不確実，不確定性の下で意思決定する際には，多様な情報の下で最適化が必要になってくる．このような情報をうまく利用しなければならない状況では，ますますORの役割が重要になり，ファジィ理論とORのマッチングが行われなければならない．本来，ファジィ理論は制御よりもORこそ相性がよい筈であるが，これまではあまり意識されてこなかった．しかし，組合せ最適化ではわずかな環境の変化に対しても最適解が変わる可能性が高く，データの精度，基準の融通性，環境変化に対応した最適化を考えることはとりわけ重要である．本稿では，まず組合せ最適化モデルの中で特に重要となるファジィ概念を紹介した後，これらを用いたファジィ組合せ最適化モデルについて幾つか取り上げ，最後にこれからの展望について述べたい．

2.　組合せ最適化におけるファジイ概念

2.1　ファジィ数

まずORとファジィとのマッチングとして，最も重要な概念であるファジィ数について述べる．

ファジィ数とは実数をファジィ化した概念化であり，「40名程度」などのおおよその数や推定された値，さらには人数に少しぐらい融通が利く状況などで用いられる．例えば，入学定員などは成績が良い学生が多ければ，募集人員より少し余分にとることもある一方，

いしい　ひろあき
大阪大学 大学院工学研究科
〒565-0871 吹田市山田丘2-1

レベルが低ければ，少なくしか取らない場合もある．このようなデータの曖昧性を表すファジィ概念はORなどの数理的意思決定には非常に有用であり，これからどんどんモデル化に使われると思われる．ファジィ数はその中でも最も用いられるべきファジィ概念であり，数学的には以下のように定義される．

定義1（ファジィ数）

実直線上で定義された正規かつ凸ファジィ集合で，メンバシップ関数が区分的に連続なものをファジィ数という．■

ただし，正規性はメンバシップ値の上限が1であることをいい，ファジィ集合Aが凸であるとは，メンバシップ関数が準凸関数であることをいう．R^1上に拡張原理というもの（通常の集合間の数学的関係をファジィ集合に拡張した概念）を適用して，2項演算$*$を2つのファジィ数M, Nの2項演算$\circledast$に拡張することができ，そのメンバシップ関数は

$$\mu_{M\circledast N}(z)=\sup_{z=x*y}\min(\mu_M(x), \mu_N(y))$$

となる．特に，2項演算として$+, -, \times, \div$を考えれば，2つのファジィ数M, Nの和，差，積，商が与えられる．しかし，各々のファジィ数のメンバシップ関数が複雑になると，これらを実際に求めることは非常に困難である．そこで，ファジィ数の演算を計算機を用いて効率よく行うために，DuboisとPrade[3]は***L-R*ファジィ数**（L-R fuzzy number）を導入した．

定義2（*L-R*ファジィ数）

次のようなメンバシップ関数に制限されるファジィ数MをL-Rファジィ数と呼ぶ．

$$\mu_M(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & (x\leqq m, \alpha>0) \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & (x\geqq m, \beta>0) \end{cases}$$

■

ただし，L, Rは条件(1) $L(x)=L(-x)$, $R(x)=R(-x)$，(2) $L(0)=R(0)=1$，(3) $L(x), R(x)$は$[0, \infty)$で非増加，を満たすよう定義される**型関数**（shape

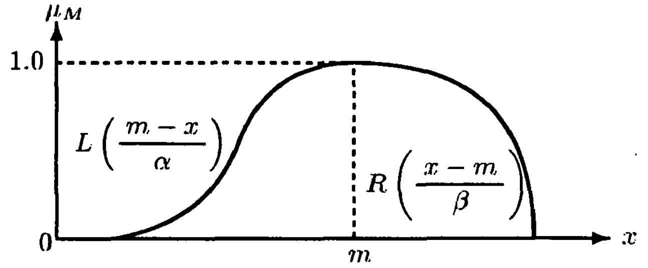

図1　L-R ファジィ数

function）である．また，m は**平均**（mean）と呼ばれ，パラメータ α, β はメンバシップ関数の横方向への**拡がり**(spread)を表す．これらによって L-R ファジィ数は

$$M=(m, \alpha, \beta)_{LR} \tag{1}$$

と表すことができる．(1)の L-R ファジィ数 M は，例えば図1で示されるメンバシップ関数によって制限される．L-R ファジィ数の基本演算に関して，加法，減法に対する次のような公式が Dubois と Prade[3] によって示された．

加法

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \oplus (n, \gamma, \delta)_{LR}=(m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR}$$

減法

$$(m, \alpha, \beta)_{LR} \ominus (n, \gamma, \delta)_{RL}=(m-n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR}$$

これらは拡張原理からも明らかである．また型関数 $L(\cdot)$ が $R(\cdot)$ と同じでメンバシップ関数が偶関数であるとき，特に L ファジィ数といい，$(m, \alpha)_L$ で示される．Lファジィ数に対しては，Furukawa[5]により，Dubois と Prade によって与えられたファジィマックス順序に関して，次のような性質が成り立つことが示されている．

定理1（ファジィマックス順序）[5]

L ファジィ数 $A=(m, \alpha)_L, B=(n, \beta)_L$ に対して

$$A \leq B \Leftrightarrow n-m \geq t_0|\alpha-\beta|$$

が成り立つ．t_0 は $\inf_{t>0}\{t|L(t)=0\}$ である．■

ここで，$A \leq B$ は A よりも B がファジィマックス順序の意味で大きいことを表す．

2.2　可能性測度

可能性測度とは，ある事象が起こる可能性の度合いを測る尺度であり，Zadeh[30]によって次のように定義が与えられた．

定義3（可能性測度）

次の(1)～(3)の性質を満たす集合関数 Π を**可能性測度**（possibility measure）と呼ぶ．

(1) $\Pi: {}^\forall A \subseteq X \to [0, 1]$

(2) $\Pi(\phi)=0, \Pi(X)=1$

(3) $\Pi(A \cup B)=\max(\Pi(A), \Pi(B))({}^\forall A, B \subseteq X)$

■

確率測度の場合と同様，対象とする集合の各要素 x が制限される可能性分布関数 $\pi(x)$ を基に考えられ，分布関数が正規性を満たすとき，「A である可能性の度合い」は

$$\Pi(A)=\sup_{x \in A} \pi(x) \quad ({}^\forall A \subseteq X)$$

で定義される．特に対象となる集合がファジィ集合の場合，Π は

$$\Pi(A)=\sup_x \min(\pi(x), \mu_A(x))$$

で定義される．

2.3　ファジィランダム変数

ファジィランダム変数とは，「ある確率でおおよそいくら」というようなファジィ性とランダム性を同時に含む情報を表すのに有用な概念であり，直感的に言えば確率変数の実現値がファジィ集合となっている変数のことである．この概念は，Kwakernaak[20]によって最初に導入され，その後，Puri と Ralescu [23]によって理論的土台の構築がなされた．数学的には次のように定義される．

定義4（ファジィランダム変数）

Ω を全事象空間，Λ をファジィ集合の族とし，B_Ω, B_Λ をそれぞれの σ 集合体，P を確率測度とする．(Ω, B_Ω, P), (Λ, B_Λ) をそれぞれ確率空間，可測空間とするとき，Ω から Λ への可測写像 X をファジィランダム変数という．■

幅広い応用をもつ Kaufmann と Gupta[12]によって導入されたハイブリット数もファジィランダム変数の一種である．

2.4　ファジィ容量

ネットワークフローの問題において，アーク (i, j) を流れるフローの量 $f(i, j)$ に対する満足度をメンバシップ関数で表すことを考えると，だいたい～以下であればよい場合には図2に示されるような形になる．また，上限のみならず下限もある程度考慮したいときは図3に示されるような台形型メンバシップ関数が利用される．目的を通常の最大流問題の制約の下で，

$$\min[\min\{\mu_{ij}(f(i, j))|arc(i, j) \in A\}, \mu_G(v)] \tag{2}$$

を最大にするフローを求めることとするとき，この問題は，総流量 v に対する満足度 μ_G とアークの容量制約に対する帰属度 μ_{ij} の最小値を同時に最大化する2目的関数になっている．上の式(2)を $\mu_D(f_v)$ とおくと，

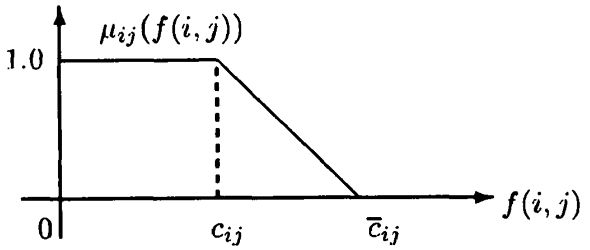

図2　ファジィ容量

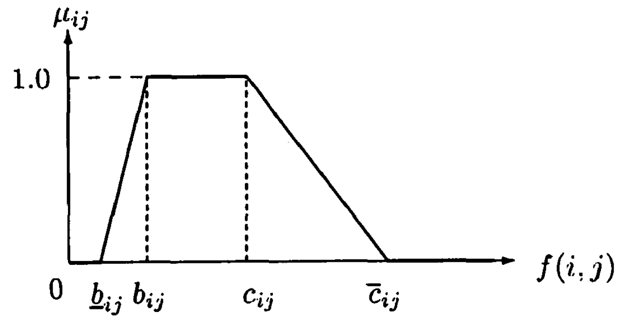

図3　下限制約つきファジィ容量

$\max_f \mu_D(f_v)=\mu_D(\hat{f}_v)$ を与える $\hat{f}_v$ のことを極大フローと呼び，極大フローの中で最大の流量 v を与えるフローのことを最適フロー f_v^* と定義する．このとき，最大流-最小切断定理のファジィ版がChanas等によって与えられた．これはクリスプな最大流問題に対する最大流-最小切断定理[4]を含む拡張になっている．この証明およびその解法については，文献[1]を参照されたい．

定理2（最大流-最小切断定理のファジィ版）

f_v^* をソース s からシンク t への最適フローとするとき，次の条件を満たす切断 $(X,\bar{X})$ が存在する．

・$(i,j)\in(X,\bar{X}) \Rightarrow \mu_{ij}(f(i,j))=\mu_D(f_v^*)$

・$i\in\bar{X}, j\in X \Rightarrow f(i,j)=0$

■

2.5　ファジィ納期

スケジューリング問題において，各仕事が完了すべき時刻を納期と呼ぶ．この納期がフレキシブルすなわち，完了時間に対して満足度がメンバシップ関数によって与えられる場合を考える[9]．

$$\mu_{D_i}(x)=\begin{cases} 1 & (0\leqq x<d_i) \\ \dfrac{e_i-x}{e_i-d_i} & (d_i\leqq x<e_i) \\ 0 & (e_i\leqq x) \end{cases}$$

ファジィ納期は大学でのレポートの提出期限のようなもので，少しぐらい遅れてもよいが評価が下がる場合に対応する．通常の納期では d_i までは1で，それ以上では0という形のメンバシップ関数をもつファジィ納期と考えることができる．また，ファジィ納期を拡張し，仕事の完了時間ばかりでなく開始時間についても満足度を考えたファジィ概念として，**ファジィ実行可能時間**も考えられている．

2.6　ファジィ処理時間

通常仕事の処理時間はいつも一定ではなく，少し変動がある．このような場合，大体の処理時間を推定しファジィ数で表すことができる．これをファジィ処理時間といい，例えば，L-R ファジィ数を用いて $P_i=(m_i,\alpha,\beta)_{LR}$ と表すことができる．

2.7　ファジィ先行関係

いくつかの仕事があるとき，ある仕事を済ませないと次の仕事に入れないということがよくある．こういう制約を先行関係という．通常のスケジューリング問題では，仕事間に先行関係があるかないかは明確であり，先の仕事が完了しないと次の仕事に入れないと仮定している．しかし，実際の製造現場をみると，部品の調達状況，費用，もしくはどの顧客に対する納品を優先するか，などの要因により先行関係があるかないかのどちらかに限定できないような状況がある．また，時には，前の作業が完全に終らなくても次の作業に入れることもある．このような曖昧な先行関係をファジィ先行関係という．

先行関係は2つの仕事 J_i, J_j の間に，J_i が J_j に先行するとき，$J_i<J_j$ と表し，この先行関係を $\mu_{ij}=1, \mu_{ji}=0$ によって表す．ファジィ先行関係では，μ_{ij}, μ_{ji} を0と1の間の数値で表す．ただし，先行関係では，2つの仕事が独立で「先行関係がない」ということは，どちらを先に処理してもよい，ということを意味するので，$\mu_{ij}=1, \mu_{ji}=1$ と約束する．

3.　ファジィ組合せ最適化モデル

ここでは，スケジューリング，ネットワーク，ナップサック問題のファジィ版として幾つかの代表的なモデルを述べる．紙面の都合で基礎的なスケジューリング理論，ネットワーク理論は割愛させて，いきなりファジィモデルに入ることを御許し頂きたい．

3.1　ファジィスケジューリング

現実のスケジューリング問題においては，データが不確定あるいは条件がフレキシブルな場合が多く，例えば，各仕事の処理時間や仕事間の先行関係があいまいな状況で，納期に対する遅れ具合をどの程度に抑えるか，つまり遅れに対する満足度をスケジューリング

の基準とするような問題がある．本節では，このような状況を考慮したスケジューリングモデルを紹介する．

3.1.1 ファジィ納期を考慮したスケジューリング問題

処理時間は通常の確定的な時間で，ファジィ納期に関する満足度の最小値が最も大きくなるようなスケジュールを求める[9]．仕事 i の完了時間 C_i に対してその満足度が $\mu_{D_i}(C_i)$ で与えられ，全仕事間での最小値を t とすれば，

$$\mu_{D_i}(C_i) \geqq t \Leftrightarrow C_i \leqq d_i + \theta_i(1-t)$$

がすべての i について成立する．ここで $\theta_i = e_i - d_i$ とおいた．この不等式は完了時間が $d_i + \theta_i(1-t)$ 以内であればよいことを示しているので，この値を通常納期と考えEDDルール（納期の早い順に仕事をスケジュールする）[11]を適用すれば最適スケジュールは求まるが，e_i と t の値によってEDDルールに基づくスケジュールは変化する．ただし，t の値域 $[0,1]$ は，対応するスケジュールが不変であるような幾つかの区間に分割することができ，それらを

$$[0, t_1), [t_1, t_2), \cdots, [t_l, t_{l+1}), \cdots, [t_m, 1]$$

とする．この通常納期が遅くなるにつれて満足度は減少するので，ある値 t_{l+1} に対応する $d_i + \theta_i(1-t)$ を納期としてすべての仕事を完了することはできないが，$[t_l, t_{l+1})$ 内の値に対してなら完了できる l が存在する筈である．この区間での納期順に処理するスケジュールが最適スケジュールとなる．

3.1.2 ファジィ先行関係を考慮した2目的モデル

最大納期ずれの最小化と先行関係の尊重という2目的スケジューリング問題を考える．ここで，先行関係については，各仕事間に定めたファジィ先行関係から求めた満足度の最小値で測ることにする．また，最大納期ずれ $L_j = C_i - d_i$ は各仕事の納期ずれ $C_i - d_i$（d_i は通常の納期）の最大値のことで通常 L_{max} で示され，$L_{max} = \max_{1 \leqq i \leqq n} L_i$ で定義される．まず通常の先行関係を考慮したスケジュール問題について解法を説明する．

仕事 J_i が先行する仕事の集合を $T_i = \{J_k | J_i < J_k, k \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$ で示す．ただし，記号 $<$ はこの記号の前の仕事が後の仕事に先行して処理されなければならないことを示す．Lawler and Moore[21]に従って次のように修正納期 d_i' を計算する．

$$d_i' = \min\{d_i, \min\{d_j | J_j \in T_i\}\}, i = 1, 2, \cdots, n$$

d_i' の非減少順にもとの先行関係を考慮しながら，仕事を処理すれば，最適スケジュールが得られる．

仕事 J_j と J_i について，前節で述べたクリスプな関係も含めたファジィ先行関係を導入し，メンバシップ関数のグレード μ_{ij} で表す．$\mu_{ij}=1, \mu_{ji}=\alpha (0<\alpha<1)$ の場合はファジィ先行関係があることを示し，ここでは μ_{ij} と μ_{ji} のいずれかは必ず1，すなわちどちらかは他方より通常の意味で先行するものと仮定する．

今，仕事 J_i を仕事 J_j に先行して処理したときの満足度は μ_{ij} であると定める．スケジュール π に対して第 k 番目に処理する仕事を $\pi(k)$ で示し，このスケジュールの最大納期ずれを L_{max}^{π}，ファジィ先行関係の満足度の最小値を μ_{min}^{π} で示す．また，スケジュールベクトル $v^{\pi} = (L_{max}^{\pi}, \mu_{min}^{\pi})$ を考え，非劣スケジュールを以下のように定義する．

定義5（非劣スケジュール）

スケジュールベクトル $v^{\pi_1} = (v_1^{\pi_1}, v_2^{\pi_1}), v^{\pi_2} = (v_1^{\pi_2}, v_2^{\pi_2})$ について次の関係が成り立つとき，2つのスケジュール π_1, π_2 に関して，π_1 が π_2 に優越するという．

$$v_1^{\pi_1} \leqq v_1^{\pi_2}, v_2^{\pi_1} \geqq v_2^{\pi_2}, v^{\pi_1} \neq v^{\pi_2}$$

もし，π に優越するスケジュールが存在しないならば，π を**非劣スケジュール**という．

■

一般に2目的以上のスケジューリング問題ではすべての目的関数を最適化するスケジュールは存在しないので，非劣スケジュールを求めることになる．この問題はファジィ先行関係の満足度を順に1から下げながら非劣スケジュールを求める手法で解くことができる．まず，μ_{ij} を降べきの順に並べ，この結果を

$$\mu^0 \equiv 1 > \mu^1 > \mu^2 > \cdots > \mu^k \geqq 0$$

とする．ここで k は異なった μ_{ij} の数である．次に，点集合 N を仕事 J_i に対応する点の集まり，枝集合 A を $J_i < J_j$ に対応する (J_i, J_j) からなる枝の集まりとする先行関係グラフ $PG = [N; A]$ を定義し，先行グラフの列 $PG^l, l=1,2,\cdots,k$ を以下のように作る．

$$A^0 \equiv \{(J_i, J_j) | \mu_{ij} = \mu^0, \mu_{ji} \neq \mu^0\},$$

$$\bar{A}^l \equiv \{(J_i, J_j) | \mu_{ij} = \mu^0, \mu_{ji} = \mu^l\}$$

$$A^l = A^{l-1} - \bar{A}^l, PG^l = [N; A^l], l = 1, 2, \cdots, k.$$

非劣スケジュールを求めるアルゴリズムについて簡単に述べると，まず，先行関係グラフ $PG^0 = [N; A^0]$ に基づく先行関係のもとで，最大納期ずれ最小化問題を解き，その最適値と先行関係の満足度を要素とするスケジュールベクトルを保存する．次に $l = 1, 2, \cdots, k$ と順次，先行関係 PG^l に基づく先行関係の下で同様のことを行い，求められたスケジュールベクトルが，前に求められたものに優越されていれば，取り除くと

いう操作を行うことによって，非劣スケジュールを求めることができる．このアルゴリズムの詳細等は文献[7]を参照されたい．

このほか，ファジィ実行可能時間をもつモデル[18]，資源制約がフレキシブルなモデル[19]，メモリー容量がフレキシブルなモデル，等々様々なモデルが考えられている．

3.2 ファジィナップサック問題

本節では，ナップサック問題で詰める品物の価値がファジィランダム変数である場合を考える．

$$\left.\begin{array}{ll}\max & \boldsymbol{cx} \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqq b,\ x_j \in I_j,\ j=1,\cdots,n\end{array}\right\} \quad (3)$$

ただし，$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_n)$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^t$ であり，I_j は非負整数の有限集合とする．ここで，c_j は次のメンバシップ関数によって特性づけられるファジィランダム変数 $C_j(\omega)$ とする．

$$\mu_{C_j(\omega)}(c_j)=\begin{cases} L\left(\dfrac{d_j(\omega)-c_j}{\alpha_j}\right) & (c_j \leqq d_j(\omega)) \\ R\left(\dfrac{c_j-d_j(\omega)}{\beta_j}\right) & (c_j \geqq d_j(\omega)) \end{cases}$$

$d_j(\omega)$ は平均 m_j，分散 σ_j^2 の正規分布に従う確率変数であるとし，α_j, β_j はそれぞれ左右の広がりを表すパラメータとする．

それぞれの $c_j, j=1,\cdots,n$ は L-R ファジィ数において中心が確率変数となっているファジィランダム変数である．したがって，前節で述べた L-R ファジィ数の演算を用いて計算すると，目的関数を表すファジィランダム変数 $Y(\omega)$ は次のようになる．

$$Y(\omega)=\left(\sum_{j=1}^{n} d_j(\omega)x_j,\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,\ \sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j\right)_{LR} \quad (4)$$

目的関数に対して，“だいたい f_1 以上である”というファジィ目標を設定し，メンバシップ関数 μ_G で特性づけられるファジィ集合で表す．目的関数値の可能性分布 $\mu_{Y(\omega)}$ の下でだいたい f_1 以上である可能性の度合いは次の式で与えられる．

$$\Pi_{Y(\omega)}(G)=\sup_{y} \min\{\mu_{Y(\omega)}(y),\ \mu_G(y)\}$$

ここで，$\mu_{Y(\omega)}$ は，(4)で表されるファジィランダム変数を特性付けるメンバシップ関数である．問題(3)に対して次の問題を考える．

$$\left.\begin{array}{ll}\max & h \\ \text{s.t.} & Pr(\Pi_{Y(\omega)}(G) \geqq h) \geqq \theta,\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqq b, \\ & x_j \in I_j,\ j=1,2,\cdots,n\end{array}\right\} \quad (5)$$

この問題は，ファジィ目標 G が達成される可能性の度合いが h 以上であることが常に満たされる必要はなく，ある確率 θ 以上で満たされればよいとする意思決定モデルに基づいている．ここで，θ は意思決定者によって与えられる確率レベルで $\theta>1/2$ とする．制約式において $\Pi_{Y(\omega)}(G) \geqq h$ は次のように変形される．

$$\sup_{y} \min\{\mu_{Y(\omega)}(y),\ \mu_G(y)\} \geqq h$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\{d_j(\omega)+R^*(h)\beta_j\}x_j \geqq \mu_G^*(h) \quad (6)$$

ここで $R^*(h)$ と $\mu_G^*(h)$ は擬逆関数であり次のように表される．

$$R^*(h)=\begin{cases} \sup\{t \mid R(t)>h,\ t \geqq 0\} & (0<h \leqq 1) \\ \infty & (h=0) \end{cases}$$

$$\mu_G^*(h)=\inf\{t \mid \mu_G(t) \geqq h\}(0 \leqq h \leqq 1)$$

式(6)および正規分布の性質を用いると，問題(5)は次の等価な確定問題へと変換することができる．

$$\left.\begin{array}{ll}\max & h \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n}\{m_j+R^*(h)\beta_j\}x_j \\ & \qquad -K_\theta\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2} \geqq \mu_G^*(h), \\ & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqq b,\ x_j \in I_j,\ j=1,2,\cdots,n\end{array}\right\} \quad (7)$$

ここで，K_θ は分布関数の θ 分位点を表し，$\theta>1/2$ の仮定により正の値となる．問題(7)を解くために，$q=R^*(h)$ として次の部分問題を導入する．

$$\left.\begin{array}{ll}\max & \sum_{j=1}^{n}\{m_j+q\beta_j\}x_j-K_\theta\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2} \\ \text{s.t} & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqq b,\ x_j \in I_j,\ j=1,2,\cdots,n\end{array}\right\} \quad (8)$$

部分問題(8)の最適解を $\boldsymbol{x}(q)$，最適値を Z_q とする．また，h^* を(7)の最適値とし，$q^*=R^*(h^*)$ とすると次の定理が成り立つ．

定理3

$\boldsymbol{x}(q)=\boldsymbol{x}^*$ となるための必要十分条件は $Z_q=-\mu_G^*(R(q))$ が成り立つことである． ■

部分問題(8)を効率的に解くためにさらに次の補助問題を導入する．

$$\left.\begin{array}{ll}\max & \sum_{j=1}^{n}\gamma\{m_j+q\beta_j\}x_j-\dfrac{1}{2}K_\theta\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2 \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqq b,\ x_j \in I_j,\ j=1,2,\cdots,n\end{array}\right\} \quad (9)$$

この問題の解は，q と γ をパラメータとする動的計画法を繰り返し解くことにより求めることができる．途中の式変形や定理の証明およびアルゴリズムの詳細は文献[13]を参照されたい．

3.3 ファジィネットワークモデル

3.3.1 ファジィ輸送問題

通常ヒッチコック輸送問題では，複数個の供給地から複数の需要地へ物資を輸送コストが最小となるように送る計画を求める．その際，各供給地からの供給量と各需要地の需要量は共に決まっており，この問題が実行可能解をもつには総供給量が総需要量以上でなければならない．そうでない場合は従来のモデルでは解かなかったが，現実にはある供給地では「少しだけ無理をすれば，供給量を a_i より増やすことが可能」だったり，ある需要所では「受け取る量はだいたい b_j 以上欲しいが，少し少なくても我慢する」などのような状況がある．このような状況を反映して次の図4，5のようなメンバシップ関数で与えられるファジィ供給量，ファジィ需要量を考える．これらのファジィ要素は供給ノード s_i，需要ノード t_j ごとに定められ，供給量 $(X_{s_i}=\sum_{t_j\in T}f(s_i, t_j), i=1, \cdots, m)$，需要量 $(X_{t_j}=\sum_{s_i\in S}f(s_i, t_j), j=1, \cdots, n)$ に対する意思決定者の「満足度」をメンバシップ値 $\mu_{s_i}(X_{s_i}), \mu_{t_j}(X_{t_j})$ が示すことになるので，$\underline{a}_i$ や $\bar{a}_i$($\underline{b}_j$ や $\bar{b}_j$) の値を調整することによって，現実的な供給量（需要量）が表せる．ただし，任意の実行可能解の目的関数値が0にならないようにするため，$\sum_{s_i\in S}\bar{a}_i>\sum_{t_j\in T}\underline{b}_j$ としなければならない．すなわち次の問題を考える．

$$\max \quad \min\{\mu_{s_i}(X_{s_i}), \mu_{t_j}(X_{t_j})|s_i\in S, t_j\in T\}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{s_i\in S}\sum_{t_j\in T}c_{ij}f(s_i, t_j)\leqq\bar{C}$$

$$f(s_i, t_j)\geqq 0, s_i\in S, t_j\in T$$

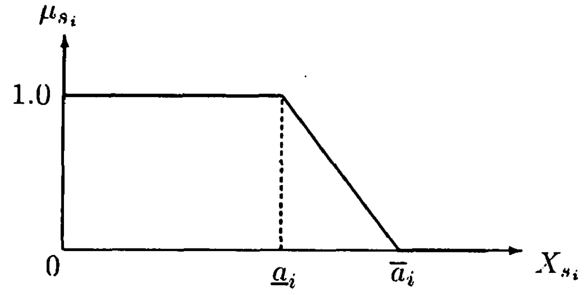

図4　ファジィ供給量

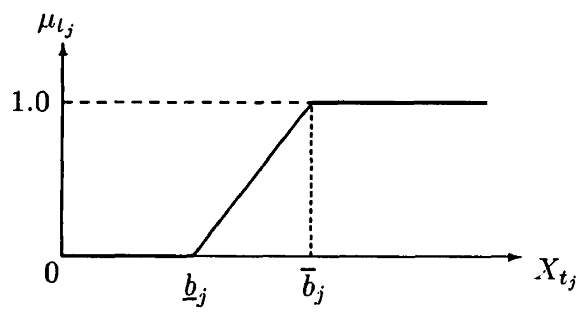

図5　ファジィ需要量

この問題の目的は，総輸送コストの上限 $\bar{C}$ を超えない範囲で，供給・需要双方のメンバシップの最小値を最大にする輸送方法を考えることになる．詳しくは文献[8]を見られたい．また，多田ら[26, 28]により整数制約をつけたファジィ輸送問題も考えられている．

3.3.2 ファジィネットワーク上の最適化

ネットワークにおいて，点やアークに存在の度合いとしての存在可能性が付随している場合ファジィネットワークという．アークの長さがファジィ数である場合，ファジィマックス順序を用いたファジィ最短路問題[5]や最短で最小存在可能性を最大にする経路を求める2目的の問題[25]などが考えられている．

3.3.3 その他のファジィネットワークモデル

ファジィスパニングツリー問題[10, 14, 15]やファジィシェアリング問題[29]など沢山考えられている．

4. おわりに

紙面の都合上，我々が精力的に研究してきたファジィ割当問題とファジィ人員配置問題については触れることができなかった．これらは現実問題に即適応できそうなモデルであるので，是非文献[16,17,27]等を参照されたい．

本稿では，あいまいさを考慮に入れた組合せ最適化について，いくつかの問題およびモデルを述べてきたが，実際にモデル化を行う場合，どのような要因をファジィ概念化するか，またどの条件をフレキシブルにすれば現実により則したものになるかを考えることが重要である．また，それに適したファジィ概念も考える必要がある．これから有望なもので新しいものとして，ランダムファジィ変数がある．この変数はある可能性で，ある確率分布に従うというもので，例えばポートフォリオ問題において，ある可能性で景気変動があり，株価が確率変動するというような状況を表現するのに適していると思われる．最後にこれから勉強や研究されるあるいは応用していただくために我々の本[6, 22, 24]を挙げておく．ファジィOR，特にファジィ組合せ最適化の研究に皆さんが参加されることを望んでいます．

参考文献

[1] S. Chanas and W. Kolodziejczyk: Maximum flow in a network with fuzzy arc capacities, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 8, pp. 165-173 (1982).

[2] S. Chanas and W. Kolodziejczyk : Integer flows in a network with fuzzy capacity constraint, Networks, Vol. 16, pp. 17-31 (1986).

[3] D. Dubois and H. Prade : Operations on fuzzy numbers, International Journal of Systems Science, Vol. 9, pp. 613-626 (1978).

[4] L. R. Ford, D. R. Fulkerson : Maximal flow through a network, Canadian Journal of Mathematics, Vol. 8, pp. 399-404 (1956).

[5] N. Furukawa : A parametric total order on fuzzy numbers and a fuzzy shortest route problem, Optimization, Vol. 10, pp. 367-377 (1994).

[6] 石井博昭, 坂和正敏, 岩本誠一編 : ファジィ OR, 朝倉書店 (2001).

[7] H. Ishii and M. Tada : Single machine scheduling problem with fuzzy precedence relation, European Journal of Operational Research, Vol. 87, pp. 284-288 (1995).

[8] 石井博昭, 多田実, 西田俊夫 : ファジィ輸送問題, 日本ファジィ学会誌, Vol. 2, pp. 79-84 (1990).

[9] H. Ishii, M. Tada and T. Masuda : Two scheduling problems with fuzzy duedates, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 46, pp. 339-347 (1992).

[10] 伊藤健, 石井博昭 : 必然性測度に基づくファジィ・スパニングツリ問題の一解法, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 39, pp. 247-256 (1996).

[11] J. R. Jackson : Scheduling a production line to minimize maximum tardiness. Management Research Project, Research Report 43, University of Calfornia, Los Angeles CA. (1955).

[12] A. Kaufman, and M. M. Gupta : Introduction to Fuzzy Arithmetic : Theory and Applications, Van Nostrand Reinhold Company (1985).

[13] 片桐英樹 : 不確実・不確定状況下での数理的意思決定の基礎的研究, 大阪大学学位論文 (2000).

[14] H. Katagiri and H. Ishii : Chance constrained bottleneck sapnning tree problem with fuzzy random edge costs, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 43, pp. 128-137 (2000).

[15] 片桐英樹, 石井博昭, 坂和正敏 : 可能性および必然性に基づくファジィ極大木問題, 日本ファジィ学会誌, Vol. 12, pp. 797-805 (2000).

[16] 今野勤, 石井博昭 : ファジィ人員配分問題, 日本ファジィ学会誌, Vol. 7, pp. 624-629 (1995).

[17] 今野勤, 石井博昭 : ファジィ人員配分問題, 日本ファジィ学会誌, Vol. 7, pp. 630-636 (1995).

[18] T. Konno and H. Ishii : Two machine scheduling problem with fuzzy allowable time constraint, Jopurnal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 41, pp. 487-491 (1998).

[19] T. Konno and H. Ishii : An Open shop scheduling problem with fuzzy allowable time and fuzzy resource constraint, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 109, pp. 141-147 (2000).

[20] H. Kwakernaak : Fuzzy random variable- I. Definitions and theorems, Information Sciences, Vol. 15, pp. 1-29 (1978).

[21] E. L. Lawler and J. M. Moore : A functional equation and its application to resource allocation and sequencing problems, Management Science, Vol. 16, pp. 78-84 (1969).

[22] 中島信之, 竹田英二, 石井博昭 : ファジィ理論入門 (社会科学の数理), 裳華房 (1994).

[23] M. L. Puri and D. A. Ralescu : Fuzzy random variables, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 114, pp. 409-422 (1986).

[24] 坂和正敏, 石井博昭, 西崎一郎 : ソフト最適化, 朝倉書店 (1995).

[25] 島田文彦 : ファジィネットワーク上の最適化問題, 大阪大学学位論文 (2001).

[26] M. Tada and H. Ishii : An integer fuzzy transportation problem, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 31, pp. 71-87 (1996)

[27] 多田実, 石井博昭 : 2目的ファジィ割り当て問題, 日本ファジィ学会誌, Vol. 10, pp. 867-875 (1998).

[28] M. Tada, H. Ishii and T. Nishida : Fuzzy transportation problem with integral flow, Mathematica Japonica, Vol. 35, pp. 335-341 (1990).

[29] M. Tada, H. Ishii, T. Nishida and T. Masuda : Fuzzy sharing problem, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 33, pp. 303-313 (1989).

[30] L. A. Zadeh : Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1 pp. 3-28 (1978).