論文・研究レポート

双対問題表現によるポートフォリオ最適化モデル

枇々木　規雄

1.　はじめに

複数の投資対象の中から投資家にとって最も好ましいように、どの投資対象にどれだけ投資をしたらよいかという問題をポートフォリオ最適化問題という。ポートフォリオ最適化モデルは個別株式や個別債券などの投資対象数が非常に多い問題に使われることが多い。しかし、本論文では、対象資産数は少ないが、モンテカルロ･シミュレーションで非常に多くのシナリオを生成する問題を対象にする。例えば、資産配分問題やALM(Asset and Liability Management：資産負債管理)、一般的な市場リスク管理、信用リスク管理の問題などはこのようなタイプの問題である(詳細は、4節で説明する)。

ポートフォリオ最適化問題は、リターン(期待収益率)とリスクの2パラメータ・アプローチにより、取り扱うことができるが、最も広く使われているのはリスク尺度を分散(標準偏差)と考える平均・分散モデルである。平均・分散モデルは、資産(証券)の収益率の分布が正規分布に従っている場合、もしくは投資家の効用関数が2次効用関数である場合にリスク回避的な投資家の合理的な行動を完全に記述できるモデルとなっている。資産(証券)の収益率の分布が正規分布に従っていない場合には、収益率分布の形状を仮定しないリスク尺度でモデルを記述する必要がある。このタイプで、しかも線形計画問題として記述可能なリスク尺度には、1次下方部分積率やCVaR(条件付バリューアットリスク)などがある。

一般的に、リスクを分散とせずにポートフォリオ最適化問題を記述すると、「ポートフォリオの期待収益率 $\bar{r}_p$ が要求期待収益率 r_E 以上のもとで、ポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ の収益率 $R(\boldsymbol{x})$ のリスク $g[R(\boldsymbol{x})]$ を最小化する」問題として, 定式化することができる。

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & g[R(\boldsymbol{x})] & (1)\\
\text{subject to} \quad & \bar{r}_p \geq r_E & (2)\\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & (3)\\
& x_j \geq 0,\ (j=1,\ldots,n) & (4)\\
& \boldsymbol{x} \in X & (5)
\end{aligned}
$$

ここで、

n：資産(証券)数

x_j：資産(証券) j の投資比率; $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$

r_E：投資家の要求期待収益率

$\bar{r}_j$：資産(証券) j の期待収益率

$\bar{r}_p$：ポートフォリオの期待収益率；$\bar{r}_p = \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j x_j$

である。(5)式の X は上限制約式など、(2)〜(4)式以外で $\boldsymbol{x}$ を制約する実行可能空間を表す。

この問題は、一般にヒストリカル・データ[1]やシナリオ・データなどの離散データを使って解かれることが多い。事象 t における資産(証券) j の収益率を r_{jt} とすると、事象 t でのポートフォリオの収益率 r_t は

$$r_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j \tag{6}$$

である。事象数(シナリオ数)を T とし、簡単のため、事象 t の発生確率を $\frac{1}{T}$ とする。資産(証券) j の期待収益率 $\bar{r}_j$ は(7)式によって計算することができる。

$$\bar{r}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{jt} \tag{7}$$

2パラメータ・アプローチによるポートフォリオ最適化問題に対する定式化は、目的関数の違い(リスク尺度の違い)によって具体的な定式化は異なるが、以降

ひびき　のりお
慶應義塾大学 理工学部管理工学科
〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1
受付 01.7.2　採択 02.1.11

[1]収益率の時系列データが定常かつ、i.i.d.(独立で同一の確率分布)に従うと仮定する。その場合、データ期間数が事象数となる。

では2本の区分直線を組み合わせた区分線形リスク尺度に限定して議論を進める。このタイプの代表的なリスク尺度およびそのリスク関数 $g[R(\boldsymbol{x})]$ を示す。

- 1次下方部分積率[2]

$$LPM_1(R;r_G) \equiv E\left[|R-r_G|_-\right] \tag{8}$$

- β-CVaR [3]

$$CVaR(R;\beta) \equiv \alpha_\beta + \frac{1}{1-\beta}E\left[|R+\alpha_\beta|_-\right] \tag{9}$$

- 絶対偏差

$$AD(R) \equiv E\Big[|R-\bar{r}_p|\Big] \tag{10}$$

ポートフォリオ選択問題の定式化は $\boldsymbol{x}$ を制約する一般的な実行可能空間とリスク関数部分を除くと、決定変数が n 個、非負制約を除く制約式が2本である。リスク関数部分はそのままでは通常の線形関数として記述できないので、定式化に工夫が必要である。2本の区分直線を組み合わせた区分線形リスク尺度の場合、工夫をしたときに増加する決定変数と制約式の数はリスク尺度によって異なるが、ともにほぼ事象数 T である。

線形計画問題の解法には単体法と内点法がある。単体法の反復回数は最適解に到達するまでに生成される実行可能多面体の頂点の個数に一致し、計算効率もそれに比例するが、経験的に、実行可能多面体を記述する制約式の数倍程度と言われている。そのため、決定変数の数が制約式の本数に比べて少ない場合には、双対問題に書き直して問題を解いた方が一般的に計算時間の上で有利となる。しかし、ポートフォリオ選択モデルは通常、$n \geq 2$ である(個別株式を対象とするポートフォリオ最適化問題では n は 1,000 を越える)ので、前述の定式化で問題を解く方が一般的に有利となる[4]。一方、内点法は実行可能多面体の内部を通って最適解に近づくことで、単体法が抱える実行可能多面体の境界の組み合わせ的複雑さを回避し、問題を高速に解く方法である。現時点で、理論的にも実用的にも最強な内点法である主双対内点法は主問題と双対問題を組み合わせた主双対問題を用いて計算する。したがって、双対問題に書き直して問題を解いても計算時間の上ではほとんど変わらないと考えてよい。

ここで、東証第1部上場銘柄を対象とし、1次下方部分積率をリスク尺度にしたときの計算時間を表1に示し、このことを具体的に確認する。

表 1: 株式ポートフォリオ最適化問題の計算時間

株式数	データ期間数	内点法		単体法	
		主問題	双対問題	主問題	双対問題
1,173	36	6.92秒	6.21秒	1.04秒	1.65秒
1,172	60	12.03秒	14.78秒	0.93秒	2.30秒
1,156	96	25.49秒	25.49秒	2.47秒	3.95秒

※ Pentium 1500 MHz, メモリ: 512MB
ソフトウェア：NUOPT Ver.4.0(数理システム社)

一方、本論文で取り扱う問題のタイプでは、個別株式を対象とするポートフォリオ最適化問題に比べて、n は小さいが、シナリオ数 T を非常に大きくすることによって、将来の様々な不確実性を記述する必要がある。例えば、債券のデフォルト確率を考慮する場合、シナリオ数が少なくては、そのことをきちんと記述できない。しかし、この場合でも決定変数と制約式の本数の大小関係はほとんど変わらないであろう。したがって、このタイプの問題であっても、単体法では前述の定式化で問題を解く方が有利であるし、内点法でも効果は期待できないと一般的に考えるであろう。

ところが、2本の区分直線を組み合わせた区分線形リスク尺度の場合には、双対問題に書き換えることによって、決定変数の有界制約式が増加し、実質的に計算時間に影響を与える制約式の本数を劇的に減少させることができる[5]。計算時間は用いる計算(実装)アルゴリズムによって異なるため、すべてのソフトウェアについて言えるわけではない。しかし、下記のように決定変数に対する有界制約条件を明示的に記述する線形計画問題の表記法に基づいて実装を行っているのであれば、これらのことは成り立つ[6]

$$\textbf{Minimize} \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \tag{11}$$

$$\textbf{subject to} \quad \underline{\boldsymbol{b}} \leq A\boldsymbol{x} \leq \bar{\boldsymbol{b}} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u} \tag{13}$$

ここで、$\boldsymbol{x}$ は決定変数ベクトル、$\boldsymbol{c}$ は目的関数の係数ベクトル、A は制約式の係数行列、$\underline{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{b}}$ は制約式の下限ベクトルおよび上限ベクトルである。下限と上限が同じ場合には等式となる。また、$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{u}$ は決定変数の下限ベクトルおよび上限ベクトルを表す。

[2] r_G は目標収益率を表す。
[3] β は確率水準、α_β はバリュー・アット・リスクを表す。
[4] より正確に言うと、n が小さくて一般制約式の本数が多い場合には決定変数の数よりも多くなる可能性があるが、T の大きさに比べて、その差は小さいと考えて良いだろう。
[5] 前述したように、単体法では制約式の本数が計算時間に影響を及ぼすので、大きな効果を期待できる。内点法においてもある程度高速化することが予想できる。
[6] 計算処理速度上有利であるため、一般的な汎用数理計画ソフトウェアはこれらの表記法に基づき実装を行っている。

本研究では、ポートフォリオ最適化モデルの定式化を双対問題に書き直し、汎用数理計画法ソフトウェアを用いた数値実験により計算速度が向上することを具体的に示す。本研究で対象と考える資産配分問題やALM、一般的な市場リスク管理、信用リスク管理の問題の場合、2本の区分直線を組み合わせた区分線形リスク尺度を用いることが有用な場合が多く、双対問題に書き換えてから計算した方が計算処理時間において有利となることが十分に期待できる。

本論文の構成は以下の通りである。2 節では、1次下方部分積率をリスク尺度として用いた場合の定式化を示し、双対問題を記述する。また、リスクを各資産ごとに配分する方法を示し、それが双対問題を利用しても導けることを示す。3 節では、このモデルに対する数値実験の計算時間を示す。4 節では、本研究で提案した定式化の方法が計算上有利になると考えられる適用分野 (問題) について説明する。最後に、5 節で結論と今後の課題を述べる。

2. モデルの定式化とリスク配分

2.1 定式化

下方部分積率をリスク尺度として用いる場合の最適化問題 (主問題) を示し、その双対問題を示す。

下方部分積率は目標収益率 r_G を下回る大きさの k 乗の期待値のことであり、次のように記述できる。

$$LPM_k \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|r_t - r_G|_-^k \qquad (14)$$

ここで、k はリスク選好の度合いを表すパラメータを表す。1次下方部分積率は $k=1$ のときのリスク尺度であり、それを用いたポートフォリオ最適化モデル (MLPMモデル) を記述する。ここでは投資比率 x に対する一般制約式として最もよく設定されるであろう上限制約式を含めて具体的に定式化する。

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_t \qquad (15)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j + d_t \geq r_G,\ (t=1,\ldots,T) \qquad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j x_j \geq r_E \qquad (17)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \qquad (18)$$

$$0 \leq x_j \leq U_j,\ (j=1,\ldots,n) \qquad (19)$$

$$d_t \geq 0,\ (t=1,\ldots,T)$$

ここで、U_j は資産 j の上限比率を表す。決定変数の数は $n+T$ 個、非負制約と上限制約を除く制約式の本数は $T+2$ 本である。(16)〜(18) 式、(19) 式の上限制約式に対する双対変数をそれぞれ $\theta_t, \omega, \lambda, \gamma_j$ とすると双対問題は以下のように記述できる。

$$\text{Maximize} \quad r_G\left(\sum_{t=1}^{T}\theta_t\right) + r_E\omega + \lambda - \sum_{j=1}^{n} U_j\gamma_j \qquad (20)$$

subject to

$$\sum_{t=1}^{T} r_{jt}\theta_t + \bar{r}_j\omega + \lambda - \gamma_j \leq 0,\ (j=1,\ldots,n) \qquad (21)$$

$$0 \leq \theta_t \leq \frac{1}{T},\ (t=1,\ldots,T) \qquad (22)$$

$$\omega \geq 0$$

$$\lambda\ :\ \text{free}$$

(21) 式および (22) 式の双対変数はそれぞれ、$x_j, (j=1,\ldots,n)$, $d_t, (t=1,\ldots,T)$ となる。主問題において一般制約式が増加しても、双対問題における制約式の数は、(22) 式の上限制約式を除くと、資産数に限定される。

2.2 リスク配分

資産 j の最適投資比率を x_j^*、事象 t における最適ポートフォリオの収益率を r_t^* とする。$r_t^* < r_G$ を満たす t の集合を S_1 とすると、1次下方部分積率は (23) 式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} LPM_1 &\equiv \frac{1}{T}\sum_{t\in S_1}(r_G - r_t^*) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t\in S_1}(r_G - r_{jt})\right\}x_j^* \end{aligned} \qquad (23)$$

したがって、リスク尺度として、1次下方部分積率を用いるとき、資産 j へのリスク配分量は、

$$\left\{\frac{1}{T}\sum_{t\in S_1}(r_G - r_{jt})\right\}x_j^*$$

と計算できる。ここでは、双対問題から (23) 式を導き、双対問題との関係について考察する。双対問題の最適解を $\theta_t^*, \omega^*, \lambda^*, \gamma_j^*$ とし、(21), (22) 式の双対解をそれぞれ x_j^*, d_t^* とする。相補スラック条件より、

$$\left(\sum_{t=1}^{T} r_{jt}\theta_t^* + \bar{r}_j\omega^* + \lambda^* - \gamma_j^*\right)x_j^* = 0,\ (j=1,\ldots,n) \qquad (24)$$

が成り立つ。(24) 式を n 本すべて加えると、

$$\sum_{t=1}^{T} r_t^* \theta_t^* + \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j x_j^* \right) \omega^* + \lambda^* - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^* x_j^* = 0 \quad (25)$$

となる。もし、$x_j = U_j$ ならば、$\gamma_j^* > 0$、$x_j < U_j$ ならば、$\gamma_j^* = 0$ なので、

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \gamma_j^* = \sum_{j=1}^{n} U_j \gamma_j^*$$

である。また、$\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j x_j^* = r_E$ なので[7]、

$$-\sum_{t=1}^{T} r_t^* \theta_t^* = r_E \omega^* + \lambda^* - \sum_{j=1}^{n} U_j \gamma_j^*$$

となる。したがって、

$$LPM_1^* = \sum_{t=1}^{T} (r_G - r_t^*) \theta_t^* \quad (26)$$

を得る。ここで、シナリオの集合を $S_1 = \{t | r_t^* < r_G\}$, $S_2 = \{t | r_t^* = r_G\}$, $S_3 = \{t | r_t^* > r_G\}$ の3つに分けると、θ_t^* の値は(22)式より、$\theta_t^* = \frac{1}{T} (t \in S_1)$, $\theta_t^* \geq 0 (t \in S_2)$, $\theta_t^* = 0 (t \in S_3)$ となる。したがって、(23)式を導くことができる。

3. 数値実験

2 節で示したモデルに対する計算時間を比較する。(19)式の上限制約を含まない場合と含む場合の両方の結果を示す。また、紙面の都合上、定式化は省略するが、CVaR を用いた場合の結果も示す。

3.1 設定条件

数値実験に用いた計算機は Pentium III 1500MHz (メモリ 512MB)、汎用数理計画法ソフトウェアは NUOPT(バージョン 4.4) [8] である。計算時間は、資産数(n)、シナリオ数(T) の違いによる問題の規模だけでなく、ソフトウェア(実装方法)の違い、解法アルゴリズム(内点法、単体法)の違い、最適化パラメータ(スケーリングの有無、最適性条件の残差の設定値など) [9]の違いによっても異なる。本数値実験では、以下の組み合わせについて計算時間を調べる。

- 資産数：3種類(10個, 20個, 35個)
- シナリオ数：10種類
  (1,000 ～ 10,000；1,000個刻み)
- 解法アルゴリズム：2種類 (内点法, 単体法)

パラメータの設定条件は、以下の通りである。

- 要求期待収益率：$r_E = 1.1\%$
- 目標収益率：$r_G = 0.5\%$
- 上限制約式を設定する場合：$U_j = \frac{3}{n}$

3.2 結果と考察

(1) MLPMモデル: 上限制約を含まない場合

計算時間(単位は秒)を図1および図2に示す。上図は内点法、下図は単体法に対する計算結果である。はじめに、内点法に対する結果を見る。図1を見ると、資産数が増加するに従って計算時間は増加するが、双対問題は主問題に比べて、計算時間は2～3倍高速化している。このことは、図2を見るとよく分かる。一方、単体法の結果を比較すると、予想通り、双対問題は主問題に比べて極めて高速化される。10資産の場合には最大で約30倍、20資産の場合最大で約20倍、35資産の場合最大で約15倍高速化される。単体法においては双対問題に書き換えることによって(資産数が少ないほど)、有利な定式化になることが分かる。

(2) MLPMモデル: 上限制約を含む場合

図3を見てみよう。シナリオ数によってばらつきはあるものの、上限制約を含まない場合と同様に双対問題に書き換えることによって高速化されている。主問題の制約式が増加した (つまり、一般制約が様々に設定された)場合に、双対問題に書き直したとしても、制約式の数は資産数に限定されるので、同様の効果が期待できると予想される[10]。

(3) リスク尺度として、CVaR を用いる場合

リスク尺度として、1次下方部分積率の代わりにCVaRを用いる場合の結果を図4と図5に示す。計算倍率は異なるものの、1次下方部分積率を用いた場合と同様に計算時間を短縮することができる。

ところで、実務で使われる問題の規模は取り扱う問題によって様々である。本研究で行った数値実験の規模は最大で資産数は35資産、10,000シナリオである。いろいろな規模の問題に対応した結果を示すために、3種類の資産数と10種類のシナリオ数で実験を

[7]ここでは暗黙のうちにr_E が最小分散ポートフォリオの期待収益率よりも大きい値を設定するとしている。

[8]NUOPT は(株)数理システム社の製品である。本実験は当初、バージョン4.0 を用いて行われたが、本研究で取り扱う問題に対し、計算速度などの点で一部不具合が見られた。しかし、著者の指摘により、バージョン4.4 以降では修正され、求解も高速化されている。4.0 での結果については、枇々木[4]を参照されたい。

[9]最適化パラメータは、NUOPT のデフォルト値を用いた。

[10]すべての場合について調べ、有効性を示すことは難しい。まずは問題を双対問題に書き直して、効果が確認できれば双対問題で解けばよいと考えている。

行った。本研究の主な問題の対象は資産配分問題やALM、一般的な市場リスク管理、信用リスク管理の問題などである。例えば、Rockafellar and Uryasev[6]の論文では、3資産で20,000シナリオ、11資産で1,000シナリオの例が分析されている。また、資産配分問題では5資産程度(国内株式、国内債券、海外株式、海外債券、現金)[11]、国際分散投資では、外貨数× 3資産(株式、債券、現金)[12]、信用リスク問題であれば、債券および貸付が対象なので、格付数や期間数に依存する。

4. 様々な投資決定問題への適用

ポートフォリオ最適化モデルを双対問題形式で記述した方が有利になるタイプの投資決定問題には様々な問題がある。これは、資産収益率を確率微分方程式(確率差分方程式)や時系列モデル式などで記述し、モンテカルロ・シミュレーションによってサンプル・パスを発生させることが多く、資産数に比べて多くのシナリオ数を必要とするタイプの問題である。本論文で対象とするタイプの問題をいくつか説明する。

(1) 最適資産配分問題

投資対象を資産区分(アセット・クラス)に限定した問題、すなわち、複数の資産にどのように投資をしたらよいかという問題を最適資産配分問題という。資産投資を行う場合、最初に株式や債券という資産区分の組み合わせ比率を決め、次にそれぞれの資産の中で個別銘柄の組み合わせを決める2段階の投資決定方式がとられることが多い。この第1段階目のことを資産配分(アセット・アロケーション)と呼ぶ。資産配分問題では対象とする資産カテゴリーは、現金、株式、債券、不動産などであり、それぞれのインデックスの収益率が用いられる。

(2) 市場リスク管理問題

市場リスクを管理するための方法としては、市場の変動にさらされている資産のリスク量を把握する(評価する)方法が発展している。現在保有している(もしくは保有しようとしている)資産ポートフォリオの価値の変動を調べたい場合、将来の資産価格変動のシミュレーションを行い、そのリターンやリスクなどを調べることができる。具体的には、資産(ポートフォリオ)の価値変化を確率事象とみなし、それらの様々な組み合わせを表すサンプル試行によって、資産価値(内生変数)に対する経験分布を作成し、資産価値のリスク評価を行う。

一方、投資家の要求するリスク特性を持つようなポートフォリオに組み替えることによって、リスク制御を行うこともできる。モデルを用いることによって、最適な資産ポートフォリオを組んだときの資産価値の経験分布を生成することができるので、「最適なポートフォリオ」に対して、モンテカルロ・シミュレーションによるリスク評価を直接行うことができる。

資産として、伝統的な資産だけでなく、オプションをはじめとする派生証券のような複雑なペイオフを持つ証券を含む場合、複数資産の変動の相互関係を記述するためには、多くのサンプル・パスを発生させる必要がある。ポートフォリオの収益率分布として、正規分布を想定できないため、下方部分積率やCVaRのような下方リスクタイプのリスク尺度を用いることが多い。

(3) 信用リスク管理問題

信用リスクは債券や貸出のデフォルトだけでなく、信用変動による価値(価格)の変動にも関連する。このような状態における価値を評価するために、モンテカルロ・シミュレーションがよく用いられる。具体的には異なる格付けを持つ複数の債券の時間的な推移を同時に考慮し、複数の債券や貸出のポートフォリオの価値変化を表すサンプル試行によって、それらの経験分布を作成し、資産価値のリスク評価を行うことになる。

そして、市場リスク管理と同様の方法でリスク制御を行うことができる。また、市場リスクと信用リスクを同時に管理するモデルも可能である。一方、信用リスクだけでなく、期限前償還リスクも含む債券ポートフォリオ管理のための最適化モデルも構築できる。特に、信用リスクを考慮したポートフォリオの収益率分布は正規分布を想定できないため、下方部分積率やCVaRのような下方リスクタイプのリスク尺度を用いる必要がある。

[11] Harlow[2]では株式と債券の2資産で60シナリオ、竹原[8]では株式、転換社債、債券、貸付金、安全資産、米国株式(ヘッジ付き、ヘッジなし)、米国債券(ヘッジ付き、ヘッジなし)の9資産で40シナリオの問題を取り扱っている。

[12] Black and Litterman[1]では、7カ国(ドイツ、フランス、日本、イギリス、米国、カナダ、オーストラリア)で、計21資産の問題を取り扱っている。

5. 結論と今後の課題

本研究では、2本の区分直線を組み合わせた区分線形リスク尺度の場合のポートフォリオ最適化モデルについて議論した。問題が資産配分問題やALM、一般的な市場リスク管理、信用リスク管理の問題の場合には、計算処理速度の観点から双対問題に書き直して問題を解くことを提案した。1次の下方部分積率を用いたモデルに対する定式化を示し、数値実験によって主問題と双対問題に対する計算時間を比較した。特に単体法では主問題形式に比べて双対問題形式の定式化は有利になることを示した。

今回示した数値実験では1種類のデータの組み合わせしか用いていないが、他の場合でも同様の結果が期待できるだろう。乱数のシードを変えたときや各種パラメータ(要求期待収益率、目標収益率、確率水準)を変化させたときの計算結果を示すことによって、より安定的な比較結果を示すことができると思われるが、今後の課題としたい。

謝辞

本数値実験を行うのに際し、ご協力いただきました(株)数理システム社の田辺隆人氏に感謝いたします。

参考文献

[1] F. Black and R. Litterman, Global Portofolio Optimization, *Financial Analysis Journal*, (September-October 1992), pp.28–43.

[2] W.V. Harlow, Asset Allocation in a Downside-Risk Framework, *Financial Analysis Journal*, (September-October 1991), pp.28–40.

[3] 枇々木規雄, 金融工学と最適化, 朝倉書店, 2001.

[4] 枇々木規雄, 双対問題表現によるポートフォリオ最適化モデル, 慶應義塾大学理工学部管理工学科テクニカルレポート,No.01-001(2001).

[5] 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博, 内点法, 朝倉書店, 2001.

[6] R.T. Rockafellar and S. Uryasev, Optimization of conditional value-at-risk, *Journal of Risk*, Vol.2, No.3(2000), pp.1–21.

[7] 反町洋一 編, 線形計画法の実際, 産業図書, 1992.

[8] 竹原均, ポートフォリオの最適化, 朝倉書店, 1997.

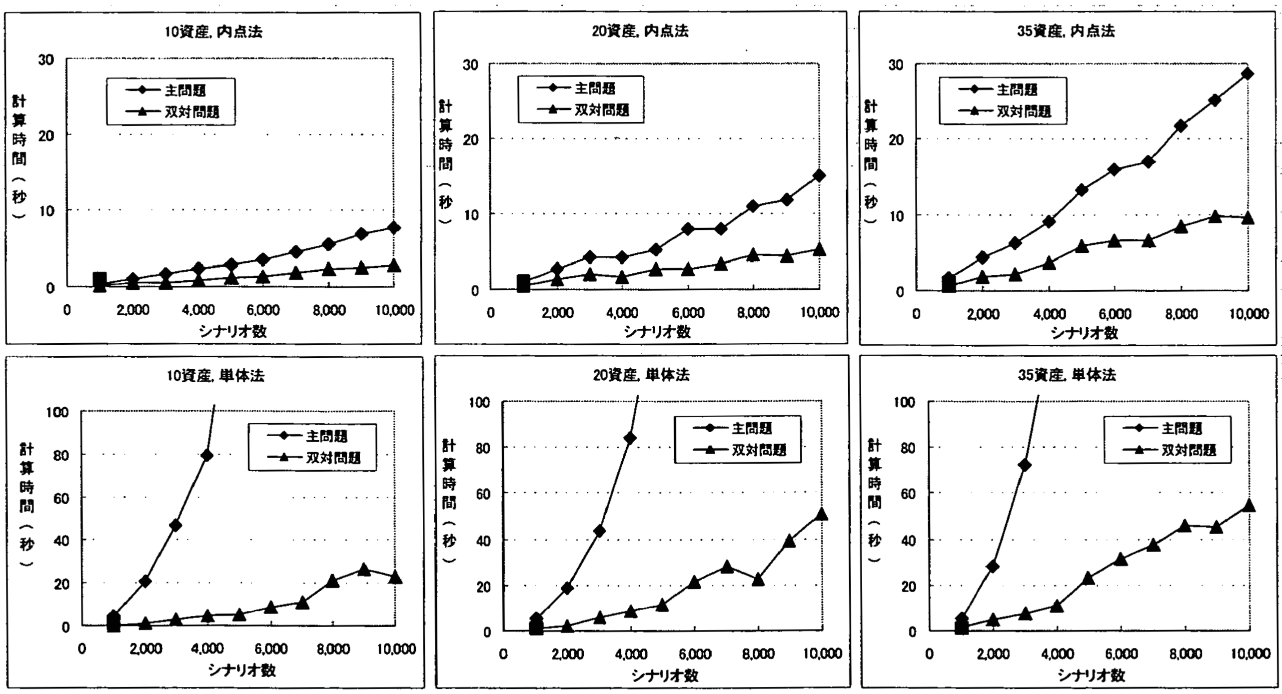

図 1: MLPMモデル：計算時間の比較(上限制約なし; 左:10資産, 中:20資産, 右:35資産)

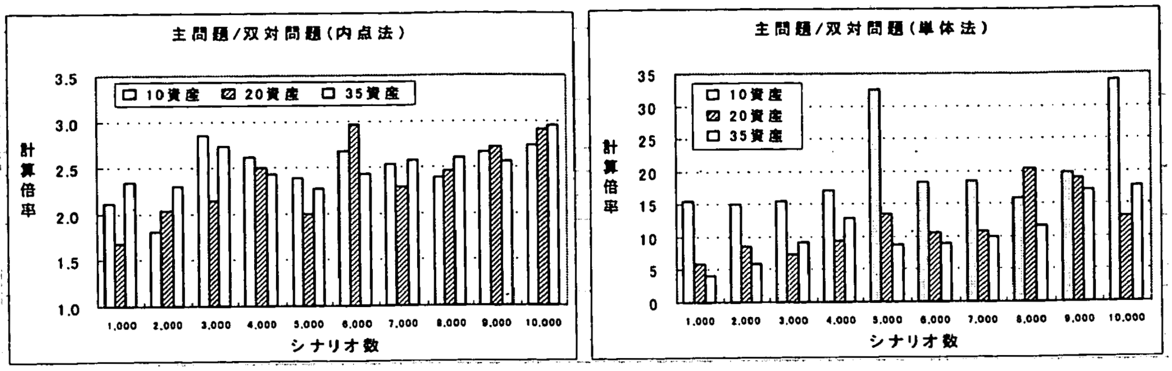

図 2: MLPM モデル：計算倍率の比較(上限制約なし)

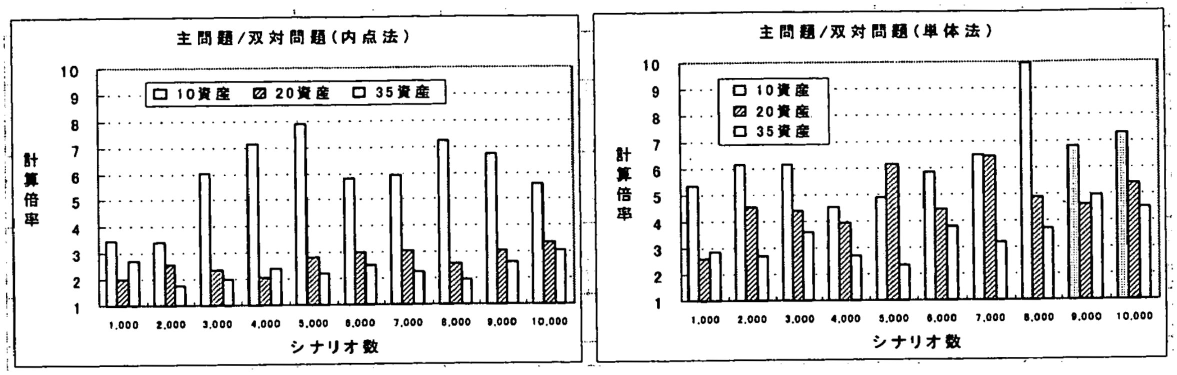

図 3: MLPM モデル：計算倍率の比較(上限制約あり)

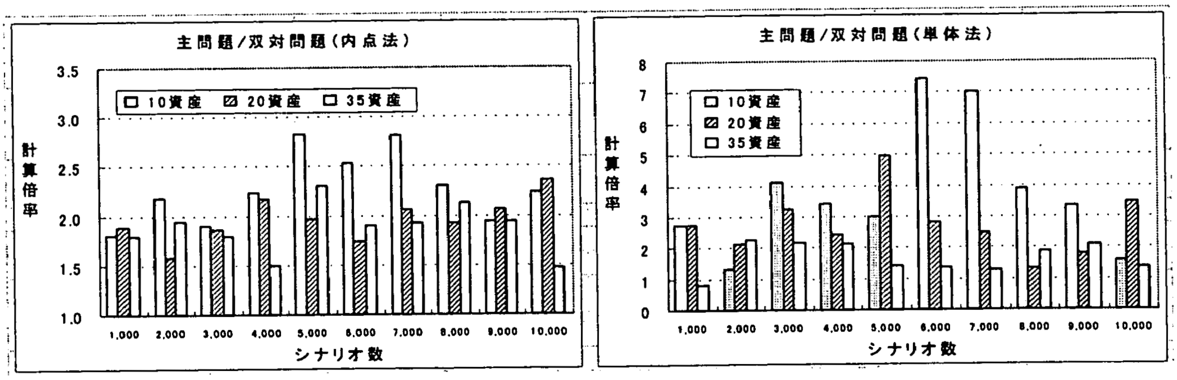

図 4: MCVaR モデル：計算倍率の比較(上限制約なし)

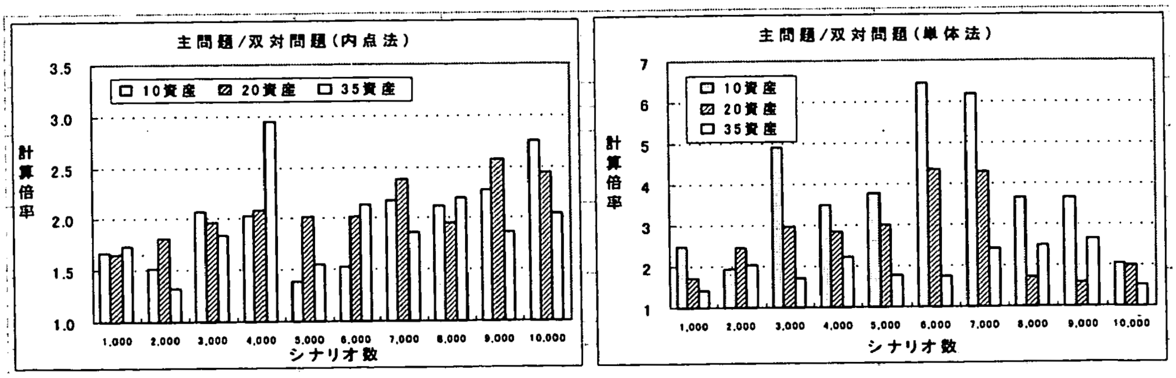

図 5: MCVaR モデル：計算倍率の比較(上限制約あり)