OR 研究の最前線

数理経済学と離散最適化の新たな出会い

室田　一雄, 田村　明久

1.　はじめに

数理経済学やゲーム理論と離散最適化との出会いは決して少なくはない．ゲーム理論で凸ゲームのコアとよばれているものと，離散最適化で基多面体とよばれているものは，実は同じものである．本稿では，数理経済学と離散最適化との新たな出会いについて紹介しよう．この出会いは，不可分財 (非分割材ともいい，自動車や家のようにその量が整数値で表現される財) をもつ経済均衡モデルへの “離散凸関数” の導入である．離散最適化の立場からは，“離散凸解析” という新しい枠組みの数理経済学への新たな応用である．離散双対性という道具を用いることで，競争均衡における不可分財と価格の関係について見通しを良くしている．また，競争均衡の計算も離散最適化アルゴリズムにより効率的に行なえる．この両分野の出会いをさらに深めたのは，数理経済学における粗代替性と離散最適化におけるマトロイド性が等価であることの発見である．まずは，数理経済学と離散最適化における関連分野の歴史を振り返ってみよう．

数理経済学の分野では，不可分財をもつモデルや競争均衡の存在に関する研究が多くなされてきた．Henry (1970) はすべての不可分財が同一財であるモデルを研究した．Shapley・Shubik (1972), Shapley・Scarf (1974), 金子 (1982), Quinzii (1984), Gale (1984) は，それぞれの経済主体が一つの財を所有し，高々一つの財しか消費しないという経済モデルにおいて競争均衡の存在を示している．金子 (1982) や金子・山本 (1986) は，販売者は同種の不可分財を幾つか所有し，購入者は高々 1 つの不可分財を購入するという一般化割当市場において競争均衡の存在を明らかにした．近年になって，Bikhchandani・Mamer (1997), van der Laan・Talman・Yang (1997), Beviá・Quinzii・Silva (1999), Gul・Stacchetti (1999), Yang (2000) などが，効用関数の準線形性という仮定の下で，不可分財のモデルを扱っている．特に，Gul・Stacchetti では，効用関数の単調性と Kelso・Crawford (1982) による粗代替性の下で，交換経済での競争均衡の存在を導いている．同様に効用関数の準線形性の下で，Danilov・Koshevoy・室田 (2001) では離散凸解析の枠組みを用いたモデルが与えられた．この論文の特徴は，離散最適化ではその重要性が強く意識されている離散双対性と競争均衡の存在の関係を明確に打ち出したことである．

一方，離散最適化の分野では，マトロイドと劣モジュラ関数の理論が一つの柱となっている．マトロイドの概念は H. Whitney によって 1935 年に導入された．マトロイドの独立集合 (基の部分集合) とマトロイドの階数関数について，交換公理と劣モジュラ性の重要性が Whitney によりすでに認識されていた．1960 年代の終わりには，J. Edmonds によるポリマトロイド交わり定理という双対定理の発見を契機として，劣モジュラ (集合) 関数それ自体の研究が盛んになり，劣モジュラ関数と凸関数との類似性が漠然とした形で議論された．1980 年代はじめになり，集合関数の劣モジュラ性と凸性の関係が明確になった．藤重 (1984) は劣モジュラ関数と優モジュラ関数の Fenchel 型双対定理を，Frank (1982) は劣モジュラ関数と優モジュラ関数の離散分離定理を示した．これらはポリマトロイド交わり定理を書き換えた内容のものであるが，凸解析における基本定理との形式的類似性を示した意義は大きい．Lovász (1983) は，集合関数の劣モジュラ性とその線形拡張の凸性とが同値であるという基本的な事実を指摘した．これらの結果，

$$\text{劣モジュラ関数} \simeq \text{凸関数}$$
$$\text{劣モジュラ関数の双対性} \simeq \text{凸関数の双対性} + \text{整数性}$$

という図式が広く受け入れられた．1990 年代に入ってか

むろた　かずお　京都大学数理解析研究所
〒606-8502 京都市左京区北白川追分町
東京大学大学院情報理工学系研究科（併任）
〒113-8656 文京区本郷 7-3-1
たむら　あきひさ　京都大学数理解析研究所
〒606-8502 京都市左京区北白川追分町

ら, A. Dress と W. Wenzel により, 貪欲算法の観点から付値マトロイドの概念が導入された. 付値マトロイドの概念は, マトロイドの交換公理に着目してこれを一般化したものである.

離散凸解析の枠組みは, 1980 年代の「劣モジュラ関数 $\simeq$ 凸関数」の議論を背景としながら, 付値マトロイド理論の進展を直接の契機として, 1996 年頃に室田により提案されたパラダイムであり, その名称は [6] で提唱された. 離散凸解析では, 交換公理に基づく M 凸関数と劣モジュラ性に基づく L 凸関数の概念が中心的役割をなし, これらは互いに共役な関係にある.

[7] では, この M 凸関数と L 凸関数の共役性から競争均衡における財と価格の共役性を導いた. 数理経済学と離散最適化のこの出会いはこれに留まらず, さらなる進展をみせた. それは, 集合関数において M 凸性のバリエーションである M$^\natural$ 凸性[1]と粗代替性が等価であるという藤重・Yang [4] の発見である. この発見をうけて, [1] と [9] は, それぞれ整数格子点上の M 凸関数へと議論を拡張した.

競争均衡の存在だけでなく, アルゴリズムの計算量という観点からも, 離散最適化は数理経済学に貢献できるのではないかと思われる.

競争均衡の典型的な計算法は不動点アルゴリズムを用いたものである. 金子・山本 (1986) においては, 不動点アルゴリズムを用いて住宅市場の競争均衡が数値的に求められている. しかし, 不可分財を扱うモデルに対して, 不動点アルゴリズムでは整数値の解が簡単には求まらない. Kelso・Crawford (1982) は, 工場と労働者という 2 グループからなる多対 1 マッチングモデルに対するアルゴリズムを提案している. このアルゴリズムは有限終了は保証されているものの効率的ではない.

離散凸解析では, ネットワークフロー問題の代表格である最小費用流問題が, 目的関数が M 凸性をもつ M 凸劣モジュラ流問題へと拡張されている. [10] では, この M 凸劣モジュラ流問題を用いて, [2, 7] でのモデルの競争均衡が多項式時間で計算できることを示している.

2. 数理経済学における M$^\natural$ 凹性

数理経済学において, 通常は効用関数が凹関数であるという仮定をおく. 不可分財を扱うときには, "離散凹関数" を考えるのが自然であろう. ここでの "離散" とは, 整数格子点 $\mathbf{Z}^K$ 上で定義されていることを意味する[2]. 本節では, 離散凸解析で扱われる M$^\natural$ 凹関数が数理経済学の観点からも良い性質をもっていることを紹介する.

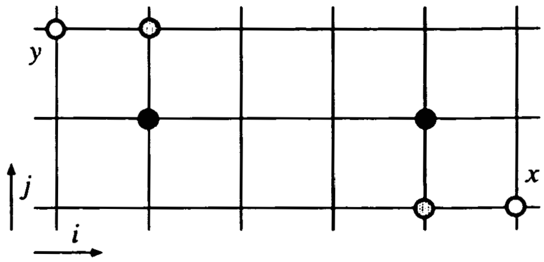

図 1: 交換公理 (−M$^\natural$-EXC).

まずは, M$^\natural$ 凹関数の概念について簡単に説明しよう. 詳しい性質やその出典については [7] を参照されたい. 一般の凹関数 f は, 任意の 2 点 x と y から互いが直線的に同じ距離だけ近付いた 2 点 x' と y' に対して

$$f(x) + f(y) \leq f(x') + f(y')$$

という不等式が成立することで特徴付けられる. この性質の意図するところを整数格子点上の世界で表現した性質により M$^\natural$ 凹関数が定義される. ただし, 整数格子点上では 2 点は一般に直線的には近付けない. そこで, 「二つあるいは一つの成分を増減することで近付いた 2 点における関数値の和が, 元の点の関数値の和よりも小さくならないようにできる」として, この意図をくみとる. 例えば, 図 1の二つの白丸の点 x と y の i 成分 $x(i)$ と $y(i)$ について大小関係 $x(i) > y(i)$ が成立している. i に関して, この 2 点を格子上で近付ける方法として, i 成分だけの増減で近付けるもの (網掛けの 2 点) と, 他の j 成分の増減も考慮したもの (黒丸の 2 点) を考える. これらの近付き方のどれかで関数値の和が減少しないようにできるという性質により, M$^\natural$ 凹性を定義する. 厳密には, 次のように定義する. 有限集合 K に対して $\mathbf{Z}^K$ 上の関数 $U : \mathbf{Z}^K \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が **M$^\natural$ 凹関数**であるとは, U が次の交換公理 (−M$^\natural$-EXC) を満たすことである.

(−M$^\natural$-EXC) 任意の $x, y \in \mathrm{dom}\, U$ と $i \in \mathrm{supp}^+(x-y)$ に対して, ある $j \in \mathrm{supp}^-(x-y) \cup \{0\}$ が存在して,

$$U(x) + U(y) \leq U(x - \chi_i + \chi_j) + U(y + \chi_i - \chi_j).$$

ただし, U の実効定義域 $\mathrm{dom}\, U$ およびベクトル $z = (z(i) : i \in K)$ の正の台 $\mathrm{supp}^+(z)$ と負の台 $\mathrm{supp}^-(z)$ をそれぞれ次のように定義する.

$$\mathrm{dom}\, U = \{x \in \mathbf{Z}^K \mid U(x) \neq -\infty\},$$
$$\mathrm{supp}^+(z) = \{i \in K \mid z(i) > 0\},$$
$$\mathrm{supp}^-(z) = \{i \in K \mid z(i) < 0\}.$$

---

[1] M$^\natural$ はエムナチュラルと読む.
[2] $\mathbf{Z}$ は整数全体の集合を表し, $\mathbf{Z}^K$ は成分の添字集合が K である $|K|$ 次元整数ベクトル全体の集合を表す.

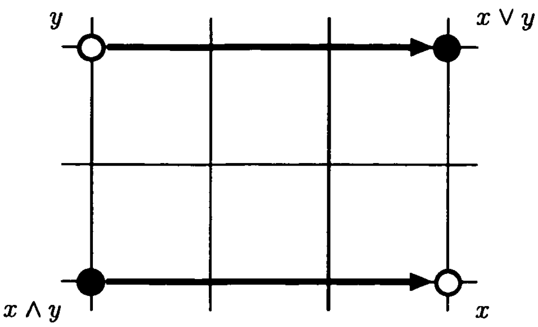

図 2: 劣モジュラ性.

また, $i \subseteq K$ に対して, χ_i を $\chi_i(i)=1$, $\chi_i(j)=0\ (j \neq i)$ で定まる単位ベクトルとし, χ_0 はゼロベクトルとする.

M$^\natural$ 凹関数は整数格子点上で定義された関数であるが, これを実数点上でも関数値が定義されるように拡張したときに, 通常の意味での凹関数が得られることが知られている. このような関数を**凹拡張可能**という. これは, "離散凹関数" とよぶためには最低限必要な性質であろう.

ここからは, 効用関数が満たすであろう性質について考える. ある初期保有量から一定量だけ増分したとき, 一般に効用の増分は初期保有量が増えるほど小さくなる. これは, 経験的にも受け入れられる事実であろう. この性質は**限界効用逓減性**とよばれるが, 離散の場合にはこの性質は劣モジュラ性と等価となる ([11] 参照). 関数 U が劣モジュラであるとは, 任意の $x, y \in \mathrm{dom}\, U$ に対して

$$U(x) - U(x \wedge y) \geq U(x \vee y) - U(y)$$

を満たすことである. ここで, ベクトル $x \vee y$ と $x \wedge y$ は

$$\begin{array}{l} (x \vee y)(i) = \max\{x(i), y(i)\} \\ (x \wedge y)(i) = \min\{x(i), y(i)\} \end{array} \qquad (i \in K)$$

と定義される (図2参照). 劣モジュラ性は, 図 2の矢印の示す点の変化に対する関数値の変化の大小を意味している. $(x \wedge y) \leq y$ かつ $x - (x \wedge y) = (x \vee y) - y$ であるから, 劣モジュラ性はまさに離散版の限界効用逓減性である. M$^\natural$ 凹関数は劣モジュラ性をもつことが知られている.

次に, M$^\natural$ 凹関数から離れて, 価格の変更に対する効用最大化の消費行動の変化に話しを移そう. 記述を短くするために, 関数 $U: \mathbf{Z}^K \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, ベクトル $p \in \mathbf{R}^K$ に対して,

$$\begin{array}{l} U[-p](x) = U(x) - \langle p, x \rangle, \\ \langle p, y \rangle = \sum_{i \in K} p(i) y(i) \quad (y \in \mathbf{Z}^K), \\ \arg\max U = \{x \in \mathbf{Z}^K \mid U(x) \geq U(y)\ (\forall y \in \mathbf{Z}^K)\} \end{array}$$

という表記を用いる. p を財集合 K に対する価格ベクトル, U を消費者の効用関数とみなしたとき, 関数 $U[-p]$ は, 財の購入費という資産の減少まで考慮した総合的な効用を表すと考えられる. この総合的な効用を最大化する消費量の全体が, $\arg\max U[-p]$ である. すなわち,

$$\arg\max U[-p] = \text{価格}\ p\ \text{に対する最適消費量全体}$$

と以下では読み替えて頂きたい.

まずは, どんな関数も満たす性質を紹介する. ベクトル $p, q \in \mathbf{R}^K$ に対して,

$$x \in \arg\max U[-p], \quad y \in \arg\max U[-q]$$

とする. $U[-p](x) \geq U[-p](y)$, $U[-q](y) \geq U[-q](x)$ であるから

$$\begin{aligned} \langle q-p, x-y \rangle &= (U[-p](x) - U[-p](y)) \\ &\quad + (U[-q](y) - U[-q](x)) \geq 0 \end{aligned}$$

となる. 特に, $q = p + \alpha\chi_i\ (i \in K,\ \alpha > 0)$ とすると $y(i) \leq x(i)$ を得る. これは, 財 i だけの価格が上昇したときに財 i の消費量が増えることはないという直観的にも直ちに理解できる事実を意味している. この主張では i 以外の財については触れていないが, 次の粗代替性は, 他の財の変化について考慮した性質である.

粗代替性は, 元来は $\{0,1\}$- 超立方体上の関数 (集合関数) に対して Kelso・Crawford (1982) によって定義されたものだが, これを整数格子点上の関数に対して書き換えた (−M$^\natural$-GS$_\mathrm{W}$) とそのバリエーションを二つ紹介する.

(−M$^\natural$-GS$_\mathrm{W}$) 価格ベクトル $p \in \mathbf{R}^K$ に対する最適消費量 $x \in \mathbf{Z}^K$ について, 価格が $q \geq p$ へと上昇したとき, 条件 $q(i) = p(i) \Rightarrow y(i) \geq x(i)$ を満たす最適消費量 $y \in \mathbf{Z}^K$ が存在する.

価格が上昇したとき, 消費者は価格が据え置かれた財を以前と同数以上欲するというのが, 条件 (−M$^\natural$-GS$_\mathrm{W}$) の意味である. 例えば, 輸入車の価格が上昇すれば, 価格の高い財は安い財に代替されるという理由で, 国産車の消費量は増加する. このとき, 国産車は輸入車の粗代替財であるという. また, 輸入車の価格上昇に伴い, 消費量が減少する財 (例えば輸入車特有の付属品など) は, 輸入車の粗補完財であるという. 粗代替性は, 市場が粗代替財から構成されていることを意味している.

(−M$^\natural$-GS) 価格ベクトル p に対する最適消費量 x について, 価格が $q - q_0\mathbf{1}$ に変化したとき, 次の条件を満たす最適消費量 y が存在する:

$$\begin{array}{rcl} q(i) = p(i) & \Longrightarrow & y(i) \geq x(i), \\ q_0 = 0 & \Longrightarrow & \sum_{i \in K} y(i) \leq \sum_{i \in K} x(i). \end{array}$$

ただし, $q \geq p$, $q_0 \geq 0$ であり, $\mathbf{1}$ はすべての要素が1であるベクトルとする.

価格が上昇したとき ($q \geq p$ かつ $q_0 = 0$), 価格据え置きの財は同数以上, かつ財の総数は増加しないことを消費者が欲することを, ($-$M$^\natural$-GS) は主張している. さらに, すべての価格が一定値低下したとき ($q = p$ かつ $q_0 > 0$), 消費者がどの財も価格変更前と比べて同数以上欲することも主張している. ($-$M$^\natural$-GS) は, ある種の価格低下まで考慮している点で ($-$M$^\natural$-GS$_{\mathrm{W}}$) より強い条件である.

($-$M$^\natural$-SWGS) 価格ベクトル p に対する最適消費量 x と $i \in K$ について次の少なくとも一方が成り立つ:

(a) 財 i のみの価格上昇に対して常に x は最適消費量である,

(b) 次の条件を満たす $\alpha \geq 0$ と価格 $p + \alpha\chi_i$ に対する最適消費量 y が存在する:

$$y(i) = x(i) - 1, \quad y(j) \geq x(j) \ (j \neq i).$$

一つの財 i の価格が上昇したときに, 現在の消費量が最適であり続けるか, あるいは財 i の適当な価格上昇に伴って i の消費量をちょうど一つ減らし, 他の財の消費量は減少しない最適消費量が存在することを, ($-$M$^\natural$-SWGS) は意味している. ($-$M$^\natural$-SWGS) は [1] で導入された.

Gul・Stacchetti [5] は, 単改良性とよばれる集合関数に対する性質を提案し, それが粗代替性と等価であることを示した. 単改良性とそのバリエーションを紹介する.

($-$M$^\natural$-SI$_{\mathrm{W}}$) $x \in \mathrm{dom}\, U$ が価格ベクトル p に対する最適消費量でないならば, ある $i, j \in \{0\} \cup K$ が存在して $U[-p](x) < U[-p](x - \chi_i + \chi_j)$.

($-$M$^\natural$-SI) $-\infty < U[-p](x) < U[-p](y)$ ならば,

$$U[-p](x) < \max_{i \in S^+} \max_{j \in S^-} U[-p](x - \chi_i + \chi_j),$$

$$S^+ = \mathrm{supp}^+(x-y) \cup \{0\}, S^- = \mathrm{supp}^-(x-y) \cup \{0\}.$$

条件 ($-$M$^\natural$-SI$_{\mathrm{W}}$) は, 非最適な任意の消費量 x を (i) 一つの財を除く, (ii) 一つの財を加える, あるいは (iii) この両方を行なうことで真に改善できること意味する. さらに, 条件 ($-$M$^\natural$-SI) は ($-$M$^\natural$-SI$_{\mathrm{W}}$) よりも強い条件で, 消費者は任意の消費量 x をより良い任意の消費量 y に近付けられることを主張している.

集合関数に対しては, ($-$M$^\natural$-GS$_{\mathrm{W}}$) と ($-$M$^\natural$-SI$_{\mathrm{W}}$) は, それぞれ粗代替性と単改良性に対応している. 集合関数に対する粗代替性と単改良性の等価性は Gul・Stacchetti により示され, さらに集合関数に対する単改良性と M$^\natural$ 凹性の等価性は, 藤重・Yang [4] によって最初に示された. 一般の M$^\natural$ 凹関数は上記5つの条件を満たすが, 逆にこれらの条件を用いて特徴付けることもできる.

定理 1 ([9]) 関数 $U : \mathbf{Z}^K \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ の実効定義域 $\mathrm{dom}\, U$ が有界であるとき, 次の主張は等価である.

(a) U は M$^\natural$ 凹関数である.

(b) U は ($-$M$^\natural$-GS) を満たし凹拡張可能である.

(c) U は ($-$M$^\natural$-SI) を満たす. ■

定理 2 ([1]) 関数 $U : \mathbf{Z}^K \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ の実効定義域 $\mathrm{dom}\, U$ が有界であるとき, 次の主張は等価である.

(a) U は M$^\natural$ 凹関数である.

(b) U は ($-$M$^\natural$-SWGS) を満たし凹拡張可能である. ■

集合関数については, 上記で紹介した条件はすべて等価となり, 藤重・Yang の主張を補足している.

定理 3 集合関数に対して, ($-$M$^\natural$-EXC), ($-$M$^\natural$-SI), ($-$M$^\natural$-SI$_{\mathrm{W}}$), ($-$M$^\natural$-GS$_{\mathrm{W}}$), ($-$M$^\natural$-GS), ($-$M$^\natural$-SWGS) は等価な性質である.

3. モデル

本稿で扱う経済均衡モデルを説明しよう. 経済主体としては生産者と消費者が区別されているとし, 生産者の集合を L, 消費者の集合を H と表す (L, H ともに有限集合とする). 財としては, 複数個の不可分財と貨幣を考える. ここで, 不可分財とは自動車や家のようにその量が整数値で表現される財であり, 貨幣は幾らでも分割できる財とする. 不可分財の集合を K と表し, これも有限集合とする. 生産者 $l \in L$ の供給量を整数ベクトルを用いて $y_l = (y_l(k) : k \in K) \in \mathbf{Z}^K$ と表現し, 消費者 $h \in H$ の需要量も $x_h = (x_h(k) : k \in K) \in \mathbf{Z}^K$ と表現する. 生産者 l の消費する財 i については $y_l(i)$ は負の値を取り, 生産する財 j については $y_l(j)$ は正の値を取るとする. 逆に, 消費者 h の消費する財 i については $x_h(i)$ は正の値を取り, 労働のような供給する財 j については $x_h(j)$ は負の値を取るとする. 生産者と消費者は, 与えられた価格ベクトル $p = (p(k) : k \in K) \in \mathbf{R}^K$ の下で, それぞれ独立に自分の利益や満足度を最大にするように行動して財の生産量や消費量を決める.

生産者 $l \in L$ は, 不可分財を $y \in \mathbf{Z}^K$ だけ生産するための費用関数 $C_l : \mathbf{Z}^K \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ によって記述される. 関数値 $+\infty$ は実行不可能な生産量を意味し, 実行可能領域を陽に用いない記述法を採用している (消費者の効用関数でも同様の記述法を用いる). 価格ベクトル $p \in \mathbf{R}^K$ が与えられたとき, 生産者 $l \in L$ は, 利潤 $\langle p, y \rangle - C_l(y)$ を最大化するように生産量 $y_l \in \mathbf{Z}^K$ を定める. $\langle p, y \rangle$ は価格ベクトル p に対する生産量 y の販売価格を意味する. 生産者 $l \in L$ の供給関数 $S_l : \mathbf{R}^K \to 2^{\mathbf{Z}^K}$, 利潤関数 $\pi_l : \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}$ は

$$\begin{aligned} S_l(p) &= \arg\max_{y \in \mathbf{Z}^K} \{\langle p, y \rangle - C_l(y)\} \quad (p \in \mathbf{R}^K) \\ \pi_l(p) &= \max_{y \in \mathbf{Z}^K} \{\langle p, y \rangle - C_l(y)\} \quad (p \in \mathbf{R}^K) \end{aligned}$$

と定義する. このとき, $y_l \in S_l(p)$ が成立している. ここで, $S_l(p) = \emptyset$ の可能性もあり, その場合には供給量 y_l は定義されないと解釈する. 供給関数 S_l を供給対応とよぶこともある. また, 集合 $S_l(p) \subseteq \mathbf{Z}^K$ を生産者 $l \in L$ の**供給集合**とよび, 各生産者は与えられた価格に対して供給集合に含まれるように生産量を決定する.

消費者 $h \in H$ は, 初期段階で不可分財と貨幣を保有しているとし, その保有量を $(x_h^\circ, m_h^\circ) \in \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R}$ と表す. 本モデルでは生産者の利潤は消費者に分配されるとする. 生産者 $l \in L$ の利潤 $\pi_l(p)$ は, 一定の分配率 θ_{lh} で消費者 $h \in H$ に分配される. ここで, θ_{lh} はすべての $l \in L$ と $h \in H$ に対して非負であり, $\sum_{h \in H} \theta_{lh} = 1$ が任意の $l \in L$ について成り立つ. よって消費者 h の所得は, 関数 $\beta_h : \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}$

$$\beta_h(p) = \langle p, x_h^\circ \rangle + m_h^\circ + \sum_{l \in L} \theta_{lh} \pi_l(p) \quad (p \in \mathbf{R}^K)$$

により表現される. 財 $(x_h, m_h) \in \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R}$ に対する消費者 $h \in H$ の満足度は効用関数 $\tilde{U}_h : \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ によって表現されるものとし, さらに, ここでは効用関数の準線形性

$$\tilde{U}_h(x, m) = U_h(x) + m \quad ((x, m) \in \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R})$$

を仮定する. $U_h : \mathbf{Z}^K \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は財の価値の貨幣への換算を意味する. 以降は, U_h を**効用関数**とよぶことにする. どの消費者も無限の財を消費することは望まないであろうから, U_h の実効定義域は有界であると仮定しても不自然ではない. ここではさらに, 各消費者 h の初期保有量における貨幣の量 m_h° が十分に大きいと仮定する. 消費者 h は予算制約の下で自らの効用を最大化するように財の消費量 $(x_h, m_h) \in \mathbf{Z}^K \times \mathbf{R}$ を決定する. よって, 消費者 h の行動は最適化問題

$$\begin{aligned} &\text{最 大 化} \quad U_h(x) + m \\ &\text{制約条件} \quad \langle p, x \rangle + m \leq \beta_h(p), \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

として定式化できるが, $\mathrm{dom}\, U_h$ が有界で m_h° が十分大きいという仮定の下では, $m = \beta_h(p) - \langle p, x \rangle$ と置くことにより, 上記の問題は制約なしの最適化問題

$$\text{最大化} \quad U_h(x) - \langle p, x \rangle$$

に帰着できる. すなわち, 消費者 $h \in H$ の需要関数 $D_h : \mathbf{R}^K \to 2^{\mathbf{Z}^K}$ は

$$D_h(p) = \arg\max_{x \in \mathbf{Z}^K} \{U_h(x) - \langle p, x \rangle\} \quad (p \in \mathbf{R}^K)$$

と定義され, $x_h \in D_h(p)$ かつ $m_h = \beta_h(p) - \langle p, x_h \rangle$ である. 需要関数 D_h を需要対応とよぶこともある. また, 集合 $D_h(p) \subseteq \mathbf{Z}^K$ を消費者 $h \in H$ の**需要集合**とよぶ. 各消費者は, 初期保有量と与えられた価格ベクトルに対して, 需要集合に含まれるように消費量を決定する.

消費量 $x_h \in \mathbf{Z}^K$, 生産量 $y_l \in \mathbf{Z}^K$, 価格ベクトル $p \in \mathbf{R}^K$ から成る組 $((x_h \mid h \in H), (y_l \mid l \in L), p)$ が, 条件

$$x_h \in D_h(p) \qquad (h \in H), \tag{1}$$

$$y_l \in S_l(p) \qquad (l \in L), \tag{2}$$

$$\sum_{h \in H} x_h = \sum_{h \in H} x_h^\circ + \sum_{l \in L} y_l, \tag{3}$$

$$p \geq 0 \tag{4}$$

を満たすとき, **競争均衡**あるいは**均衡**とよばれ, そのときの価格ベクトルは**均衡価格ベクトル**とよばれる. すなわち, それぞれの経済主体は望むことを実現し, 需給バランスが成り立ち, 均衡価格ベクトルは非負となる.

本モデルは Arrow-Debreu 型モデルとよばれるもので, 費用関数と効用関数がそれぞれ $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数[3] と $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数となる場合が次節での主題である.

4. 競争均衡の存在性

前節の不可分財をもつ経済モデルが競争均衡をもつための十分条件について紹介する. 関数 $U : \mathbf{Z}^K \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は, すべての $x, y \in \mathrm{dom}\, U$ に対して, $x \leq y \Rightarrow U(x) \leq U(y)$ を満たすとき**単調非減少**とよばれる. Gul・Stacchetti [5] は, 効用関数が粗代替性と単調非減少性をもつ交換経済 ($L = \emptyset$ の場合) における競争均衡の存在を示した. 定理 3から, 次の定理 4はこの結果の拡張となる. 定理 4と 5は, [2] の結果より導き出せるが, [7] において陽に述べられている.

[3] f が $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数とは, $-f$ が ($-\mathrm{M}^\natural$-EXC) を満たすことである.

定理 4 **([2, 7])** 交換経済において，各効用関数 U_h が単調非減少な $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数ならば，任意の初期総保有量 $x^\circ \in \sum_{h\in H} \mathrm{dom}\, U_h$ に対して，競争均衡 $((x_h \mid h{\in}H), p)$ が存在する． ■

定理 5 **([2, 7])** 各費用関数 C_l が $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数で各効用関数 U_h が $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数であるとする．このとき，すべての財を分割可能とした連続モデルにおいて，与えられた初期総保有量に対する競争均衡が存在するならば，不可分財から成る競争均衡 $((x_h \mid h{\in}H), (y_l \mid l{\in}L), p)$ も存在する．ここで，連続モデルにおける費用関数は C_l の凸拡張であり，効用関数は U_h の凹拡張であるとする． ■

競争均衡は一意に定まるとは限らないが，定理 5の仮定の下では，競争均衡全体も良い性質をもつ．例えば，任意の競争均衡の生産量・消費量と別の競争均衡の均衡価格ベクトルの組は再び競争均衡となる．まさに，線形計画問題とその双対問題のそれぞれの最適解に対する双対性と同様のことが成立している．これは M 凸関数と L 凸関数の双対性に起因し，均衡価格ベクトル全体は $\mathbf{L}^\natural$ 凸多面体とよばれる良い性質をもつものとなる．なお，凸多面体 $P \subseteq \mathbf{R}^K$ が **$\mathbf{L}^\natural$ 凸多面体** [3, 8] であるとは，

$$p,\, q \in P \;\Rightarrow\; (p - \alpha \mathbf{1}) \vee q,\; p \wedge (q + \alpha \mathbf{1}) \in P \qquad (0 \leq \forall \alpha \in \mathbf{R})$$

を満たすことである．

定理 6 **([7])** 各費用関数 C_l が $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数で各効用関数 U_h が $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数であるとし，初期総保有量 x° に対して競争均衡が存在すると仮定する．均衡価格ベクトル全体からなる集合 $P^*(x^\circ)$ は $\mathbf{L}^\natural$ 凸多面体となる．$\mathbf{L}^\natural$ 凸多面体は束構造をもつため，最小均衡価格ベクトルが存在し，$P^*(x^\circ)$ が有界ならば最大均衡価格ベクトルも存在する． ■

5. 均衡の計算

各費用関数 C_l が $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数で各効用関数 U_h が $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数である 3 節のモデルにおいて，競争均衡の存在判定は，定理 5より，連続化したモデルに競争均衡が存在するかを，不動点アルゴリズムなどの非線形アルゴリズムを用いて調べれば良い．しかし，本来は離散的な問題であるので離散的なアルゴリズムで解けることが望まれる．幸いなことに，この問題については最小費用流問題を一般化した M 凸劣モジュラ流問題と最短路問題を用いることで，競争均衡における生産量や消費量および最小均衡価格ベクトルや最大均衡価格ベクトルも求めることができる．さらに，費用関数や効用関数の実効定義域が有界であるという妥当な仮定の下で，経済主体の数 $|H| + |L|$，財の種類数 $|K|$ および実効定義域のサイズの対数に関する多項式時間で競争均衡が求まる．詳しくは [7, 10] を参照されたい．

参考文献

[1] V. Danilov, G. Koshevoy and C. Lang: Gross substitution, discrete convexity, and submodularity, *Discrete Applied Mathematics*, to appear.

[2] V. Danilov, G. Koshevoy and K. Murota: Discrete convexity and equilibria in economies with indivisible goods and money, *Mathematical Social Sciences*, **41** (2001) 251–273.

[3] S. Fujishige and K. Murota: Notes on L-/M-convex functions and the separation theorems, *Mathematical Programming*, **88** (2000) 129–146.

[4] S. Fujishige and Z. Yang: A note on Kelso and Crawford's gross substitutes condition, preprint, (2000).

[5] F. Gul and E. Stacchetti: Walrasian equilibrium with gross substitutes, *Journal of Economic Theory*, **87** (1999) 95–124.

[6] K. Murota: Discrete convex analysis, *Mathematical Programming*, **83** (1998) 313–371.

[7] 室田一雄: 離散凸解析 (共立出版, 2001).

[8] K. Murota and A. Shioura: Extension of M-convexity and L-convexity to polyhedral convex functions, *Advances in Applied Mathematics*, **25** (2000) 352–427.

[9] K. Murota and A. Tamura: New characterizations of M-convex functions and their applications to economic equilibrium models with indivisibilities, *Discrete Applied Mathematics*, to appear.

[10] K. Murota and A. Tamura: Computation of conpetitive equilibria of indivisible commodities via M-convex submodular flow problem, RIMS Preprint 1316, Kyoto University, (2001).

[11] D. M. Topkis: Supermodularity and Complementarity, (Princeton University Press, 1998).