# 収集・配送輸送システムにおける階層構造の最適化に関する研究

渡部　大輔
筑波大学大学院社会工学研究科都市・環境システム専攻　現所属・(株)サイテック・ジャパン)
指導教官　鈴木　勉 講師

## 1. はじめに

近年，トラック輸送での共同集配システムや航空路線網での Hub and Spokes システムのように，輸送する品目や輸送を担う手段の特性によって，様々な階層構造を持った輸送システムが構築されている．しかし，これまでの輸送システム最適化の研究において，階層構造を解析的に考察した研究は少ない．

そこで，本論文では，施設数と階層数が連続量であり，輸送費用に規模の経済性が存在する場合について，上位階層へ収集（あるいは下位階層へ配送）されていく階層的輸送システムをモデル化する．そして，費用が最小という意味での最適な輸送階層数と階層別施設数を求め，規模の経済性を表すパラメータと需要密度の増加による影響について考察する．

## 2. 連続的階層輸送モデルの概要

最下階層の施設（需要）$n_0$ 個が一様に分布しており，最寄りの最上階層施設 $n_M$ 個へ運ぶ輸送需要が一様に発生する．階層間のサービスは，排他的（successively exclusive）であるとする．各輸送需要は，図1のような収集輸送が繰り返され，$M$ 回の輸送を経て最上階層に到着する．その途中に必ず経由する第 $m$ 階層施設 $n_m$ 個 $(1\leq m\leq M)$ が均等に配置されている．階層数と施設数は本来自然数であるが，十分大きいと仮定して連続量として考える．なお，配送の場合も，これと全く逆の輸送過程となるので，同様の定式化となる．

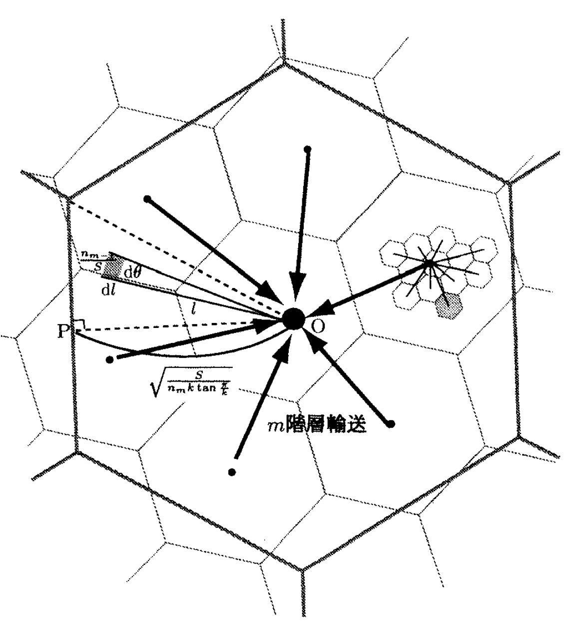


図1　二次元都市での $m$ 階層での収集輸送の概要 $(k=6)$

輸送費用は，主に輸送量 $q$ と輸送距離 $l$ によって決定され，比例係数 $K$ を用いると，

$$C_t=Kq^{\alpha}l^{\beta}\quad(0\leq\alpha\leq1,\ 0<\beta\leq1) \tag{1}$$

と表されるとする．輸送費用に対する規模の経済性を表すパラメータとして，輸送量弾力性 $\alpha$，輸送距離弾力性 $\beta$ を用いる．

## 3. 輸送費用最小化による最適輸送システムの導出

紙面の都合上，主要な結果である二次元領域での施設費用を考慮しない場合のみについて取り上げる．

面積 $S$ の正 $k$ 角形都市において，第 $m$ 階層の $n_m$ 個の施設に向かって図1のような収集輸送をする状況を考える．領域の端点までの長さ $x=\sqrt{\dfrac{S}{n_m k\tan\pi/k}}\dfrac{1}{\cos\theta}$ に渡り，微小領域に存在する $\dfrac{n_{m-1}}{S}\mathrm{d}l\ l\mathrm{d}\theta$ 個の施設から第 $m$ 階層の領域の中心に向かって，輸送量 $\dfrac{n_0}{n_{m-1}}$ を輸送距離 $l$ だけ輸送する．規模の経済性を考慮し，階層数 $m$ と関係ない項を比例係数 $K_k$ を用いて表すと，第 $m$ 階層での輸送費用は，

$$c_t^k=n_m\,2k\int_0^{\frac{\pi}{k}}\int_0^{x}\frac{n_{m-1}}{S}\left(\frac{n_0}{n_{m-1}}\right)^{\alpha}l^{\beta}l\mathrm{d}l\mathrm{d}\theta$$
$$=K_k\frac{{n_{m-1}}^{1-\alpha}}{{n_m}^{\beta/2}} \tag{2}$$

となる．総輸送費用 $C_t$ は式(2)を第 $M$ 階層まで足し上げたものであるので，目的関数は，

$$\text{Minimize}\quad C_t=K\sum_{m=1}^{M}\frac{{n_{m-1}}^{1-\alpha}}{{n_m}^{\beta/2}} \tag{3}$$

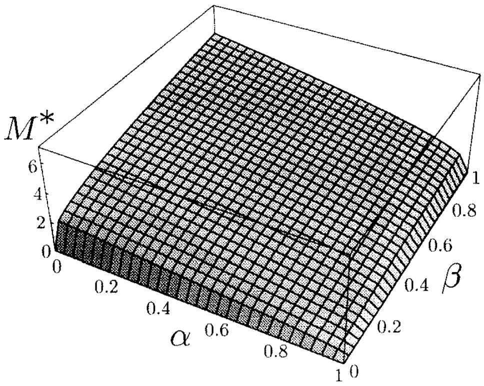


図2　二次元都市での $\alpha$，$\beta$ による最適階層数 $M^*$

と表現することができる．

式(3)で $1-\alpha \neq \beta/2$ を仮定して，施設数 $n_m$ について最小となる必要条件 $\frac{\partial C_t}{\partial n_m}=0, \frac{\partial^2 C_t}{\partial {n_m}^2}>0$ から，

$$\frac{n_m}{n_{m+1}}=\left(\frac{\beta/2}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta/2}}\left(\frac{n_{m-1}}{n_m}\right)^{\frac{1-\alpha}{\beta/2}}$$

が得られる．これを式(3)に代入し，階層数 $M$ について最小となる必要条件 $\frac{\partial C_t^\dagger}{\partial M}=0, \frac{\partial^2 C_t^\dagger}{\partial M^2}>0$ を解くことにより，最適な階層数 $M^*$ は，

$$M^*=\frac{1-\alpha-\beta/2}{\log\frac{1-\alpha}{\beta/2}}\log\frac{n_0}{n_M} \tag{4}$$

となり，最適な第 $m$ 階層施設数 $n_m^*$ は，

$$n_m^*=n_0\left(\frac{1-\alpha}{\beta/2}\right)^{-\frac{m}{1-\alpha-\beta/2}} \tag{5}$$

と求まる．なお，上の2式は極限値をとることによって，$1-\alpha=\beta/2$ の場合でも成り立つ．

本章で得られた知見は以下の通りである．

・式(4)：図2（$n_0=1000$，$n_M=1$）のように，輸送量による規模の経済性が利くほど輸送階層数は増加し，輸送距離による規模の経済性が利くほど輸送階層数は減少する．また，階層数は，最上階層1施設当たりの需要の対数に比例する程度にしか増加しない．

・式(5)：階層数の増加に伴い，途中階層の施設数はその対数軸に対して線形関係を保つように増加する．

なお，施設費用を考慮した場合についても，同様な知見が得られ，施設費用が増加するほど最適階層数が少なくなることが確認された．

## 4．現実の輸送における階層構造の考察

輸送需要 $n_0$ として，一日平均取扱総数を用いる．トラックの輸送費用は，「一般路線貨物自動車運送事業運賃料金」(1989年) から小型 (1t以下) と大型 (10t以下) として，以下のように推定した．

・大型：$\alpha=0.814$，$\beta=0.729$ ($R^2=0.987$)

・小型：$\alpha=0.953$，$\beta=0.504$ ($R^2=0.992$)

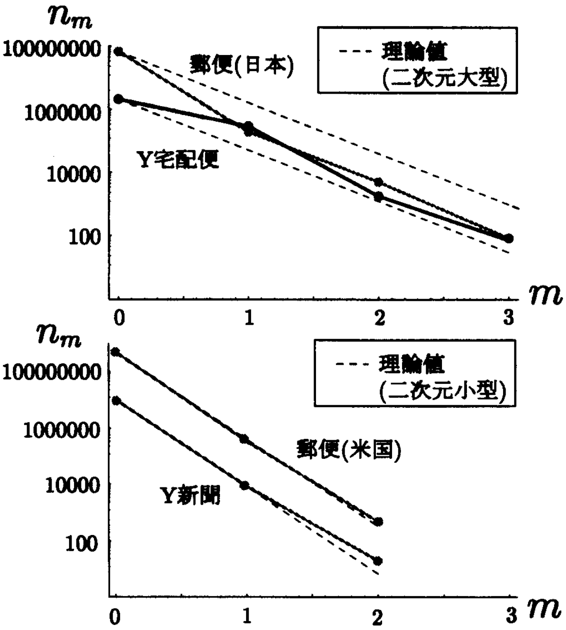


図3　各輸送システムの第 $m$ 階層施設数

図3では，現状値（実線）と式(5)に $n_0, \alpha, \beta$ を代入した理論値（点線）について，各輸送システムの第 $m$ 階層施設数 $n_m$ を対数軸に図示したものである．上図の3階層輸送（郵便（日本）とY宅配便）は二次元大型の推定値で近似でき，理論値との比較では郵便は施設過少，宅配便は施設過多であると言える．下図の2階層輸送（郵便（米国）とY新聞）は二次元小型で近似でき，施設数が非常に近い値であると分かる．

## 5．まとめ

本研究では，輸送費用に規模の経済性が存在することに着目して，最適な階層構造が生じることを示した．そして，最適な輸送システムでの階層数とその施設数について，明確な解析解と知見を得ることができた．特に，施設数の式(5)は，$\alpha$，$\beta$ を推計することで輸送品目の特性を考慮した施設数の多寡を議論することができ，また河川や樹木の形態則から得られた経験式とも類似性が見られることも興味深い．

### 参考文献


[1] Daganzo, C. F.: *Logistics Systems Analysis*, Springer, 1999.

[2] 家田仁：Hub-Spokes/Point-to-Point や集約型/直行型輸送など階層的輸送システムの均質無限平面上における定式化と解法，土木計画学研究・論文集，**14**，773-782，1997.