利他的効用関数による協力的秩序形成の可能性
—進化ゲーム理論的アプローチ—

武藤 正義
(東京工業大学大学院社会理工学研究科価値システム専攻 現所属・同大学院社会理工学研究科価値システム専攻博士後期課程)
指導教官 武藤滋夫 教授

1. 利他性・利得・効用

1回限りの囚人のジレンマ（以下，単にPDで表す）の協力解の実現は通常不可能と考えられているが，本論文では現実妥当的な，程度をもった利他性を考慮することにより，PDでの協力解実現の可能性をさぐる．利他性をアプリオリに仮定するので問題の焦点は，協力に要求される最低の利他性である．

利他性を明確に定義するために，主体にとっての利得を，利得と効用に二層化する．**利得**とは，金銭・時間・数量・法的な権利などの客観的な評価である．一方**効用**は，自分の利得だけでなく相手の利得を考量することにより定まる主観的な満足感である．その考量の程度により効用は主体によって異なる．この考量の程度を**利他性**と定義する．以上を定式化しよう．x_i を自分 i の利得，x_{-i} を相手の利得，$q_i(0\leq q_i\leq 1)$ を自分 i の利他性としたとき，自分 i の効用 u_i を，$\boxed{u_i(q_i, x_i, x_{-i})=(1-q_i)x_i+q_i x_{-i}}$ によって与える[1]．

2. モデル

利得レベルにおいてPDであるような状況でも，利他性を考慮した効用レベルではPDではない可能性があり，その人の利他性によって状況をどう把握しているかが異なる．このことを数理的にみてみよう．PDの利得を表1のように与える．ここで主体1，2は協力 C，非協力 D という行動の選択肢をもつ．利得は，$S<P<R<T$ かつ $S+T<2R$ をみたす．次に効用レベルでは，ゲームの利得構造（効用構造）は表2のようになる．ここで q_1, q_2 はそれぞれ主体1，2の利他性を表す．表2において主体1の立場にたって考えよう．q_1 の添え字を落として q とすると，

$$\boxed{R>(1-q)T+qS \Longleftrightarrow q>\frac{T-R}{T-S}(=:\ q_c\ とする)}$$

[1] このような効用の表現は，Griesinger & Livingston[1]，数土[2]にみられるように一般的である．

表1 PDの利得の構造

1＼2	C	D
C	R, R	S, T
D	T, S	P, P

表2 PDの効用の構造

1＼2	C	D
C	$R,\ R$	$(1-q_1)S+q_1T,\ (1-q_2)T+q_2S$
D	$(1-q_1)T+q_1S,\ (1-q_2)S+q_2T$	$P,\ P$

より $q>q_c$ なる主体は相手が C でくるなら C をとり，

$$\boxed{(1-q)S+qT>P \Longleftrightarrow q>\frac{P-S}{T-S}(=:\ q_d\ とする)}$$

より $q>q_d$ なる主体は相手が D でくるなら D をとる[2]．分子の $T-R$ と $P-S$ の大小により $q_c<q_d$ と $q_c>q_d$ の2つの場合が考えられるが，本要約では $q_c<q_d$ の場合のみを考える．このとき，q_c, q_d を閾値として，主体は選好の異なる次の3つのタイプに分かれる．

「利己」タイプ $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $0\leq q\leq q_c$

「中間」タイプ $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $q_c<q<q_d$

「聖人」タイプ $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $q_d\leq q\leq 1$

「利己」は D，「聖人」は C が支配戦略であるが，「中間」は相手が C であれば C を，D であれば D をとることが最適である．—さて，「利己」と「聖人」は常に支配戦略をもっているから意思決定することができるが，**相手の利他性がわからない**（相手のタイプがわからない）ことから「中間」は意思決定することができない．しかしここで「主体は近い過去のゲームのデータから相手の行動を確率的に予想する」と仮定すれば，「中間」の意思決定の問題は解決する（限定合理性）．この仮定を導入し，様々な利他性をもった

[2] $S<P<R<T$ により，$0<q_c<1, 0<q_d<1$ である．

主体が相互にマッチングしているような集団を考えることにより，次のような仮定群からなる進化ゲーム理論的なモデルを立てる．**仮定1**『主体は利他性 $q\in[0,1]$ をもつ．ただし q は，ゲームの相手によって変化せず，時間的に変化せず，主体によって異なる.』**仮定2**『主体は，利他性 q を除いて等質とし，自己の期待効用を最大化するように行動する.』**仮定3**『集団の主体数は十分大きいとする．よってその濃度は連続濃度で近似できる.』**仮定4**『集団の各主体は，区間 $[q_c, q_d]$ で連続，(q_c, q_d) で $s(q)>0$ である密度関数 $s:[0,1]\to \boldsymbol{R}$ に従って分布している.』**仮定5**『各主体は，各期において他の主体とランダムマッチングの状態にある.』**仮定6**『各々のマッチングにおいて，主体は利得における PD ゲームを行う.』**仮定7**『各主体は各期において，協力 C か非協力 D のうち，1つのみをとり続ける.』各期において，ある主体はつねに協力者であり，またある主体はつねに非協力者であり，また主体数は十分大きいので自分自身の行動を無視できるから，**各主体は同一の協力率を観測する**ことになる．そこで t 期における協力率を y_t とおく．このとき，**仮定8**『各主体は，t 期の協力率を，観測データとしての $t-1$ 期の協力率 y_{t-1} に等しいと予想する(限定合理性).』

以上の仮定から，本モデルの主旨は，囚人のジレンマの利得関数 g，利他性の分布の密度関数 s，協力率の初期値 y_0 を所与の変数として展開されるダイナミクス $Dn(g,s,y_0)=(y_t)_{t=0,1,2,\cdots}$ を記述し，数列 $(y_t)_{t=0,1,2,\cdots}$ の極限 y_∞ を明らかにすることにある．

3. 動学過程と分析結果

$(q_c<q_d)$ に注意する．表2から主体1の効用のみをとりだし，q_1 を q とおきかえて考えよう．$t-1$ 期の協力率 y_{t-1} に対して，利他性 q をもつ主体が t 期において C, D をとったときの期待効用を，$Eu_q(C, y_{t-1})$, $Eu_q(D, y_{t-1})$ とするとき[3]，t 期において主体が C をとるための条件は，$\boxed{Eu_q(C,y_{t-1})>Eu_q(D,y_{t-1})}$ $\boxed{\Longleftrightarrow q>(q_c-q_d)y_{t-1}+q_d(:=q_t \text{ とおく})}$ である[4]．よって t 期において $q>q_t$ をみたす利他性 q をもつ主体は，行動 C をとるので，t 期の協力率は $\boxed{y_t=\int_{q_t}^{1}s(q)dq}$ とかけ，この式において t を $t-1$ におきかえたものを上の q_t の定義式に代入して計算すれば，$t\geq 2$ における漸化式（差分方程式）：

$$\boxed{q_t=q_c+(q_d-q_c)\int_0^{q_{t-1}}s(q)dq} \tag{1}$$

を得る．これは，$q_c\leq q_t\leq q_d$ をみたす数列 $(q_t)_{t=1,2\cdots}$ を生成する漸化式である．(1)の右辺を $f(q_{t-1})$ とおくと，$\boxed{f(x):=q_c+(q_d-q_c)\int_0^x s(q)dq}$ であり，漸化式(1)は，$q_t=f(q_{t-1})$ と表せる．数列 (q_t) が収束するとすれば，f は連続なので不動点方程式☆ $\boxed{x=f(x)}$ の解（q^* とする）のどれかに収束する．

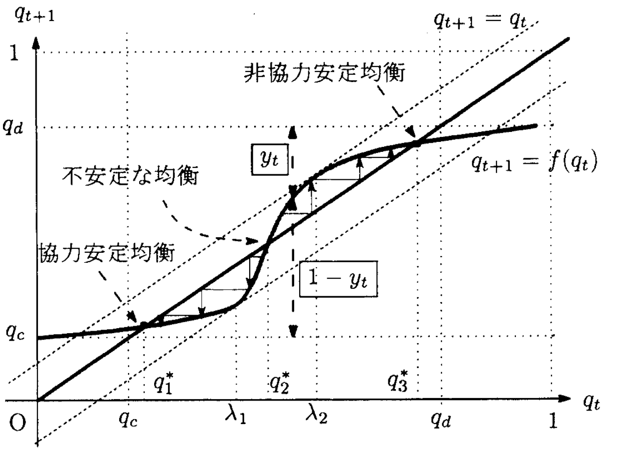

図1

図1のグラフは，利他性が似かよっている集団の場合 $\left(s(q)\not<\dfrac{1}{q_d-q_c}\right)$ である[5]．λ_1, λ_2 は，$f'(x)=1$ となる点（即ち $s(x)=\dfrac{1}{q_d-q_c}$ となる点）である．このグラフから，数列 (q_t) は，初項 q_1 が $q_1<q_2^*$ を満たすならば q_1^*(協力安定均衡）に収束し，$q_2^*<q_1$ を満たすならば q_3^*（非協力安定均衡）に収束することがわかる．利他性が同質的なこの場合には，**聖人タイプなしでもかなり協力的な社会秩序が形成されうる**のである．

参考文献

[1] Griesinger, D.W. and Livingstone Jr., J.W.: Toward a model of interpersonal motivation in experimental games, *Behavioral Science*, 18, 173-188, (1973).

[2] 数土直紀：「権力と利他主義」，理論と方法 13(2)：169-182, (1999).

[3] $Eu_q(C,y_{t-1})=Ry_{t-1}+(1-y_{t-1})[S+q(T-S)]$, $Eu_q(D,y_{t-1})=y_{t-1}[T+q(S-T)]+(1+y_{t-1})P$

[4] q_t は t 期に協力 C をとるために要求される**最低の利他性**

[5] 一方，$s(q)<\dfrac{1}{q_d-q_c}$（利他性の分散が大きい）ならば，数列 (q_t) は☆の唯一解 q^* に収束する．