

格付け変動を利用した債券ポートフォリオの最適化

木島 正明, 小守林 克哉, 阿久津 なぎさ

1. はじめに

信用リスクとは、企業の倒産による債務不履行リスクや、発行体の信用力が変化することによる証券価格変動リスクのことを指す。近年、金融機関に対するリスク管理の重要性が高まる中で、金融機関各社は保有する資産ポートフォリオのうち融資や社債など、信用リスクを含む資産のリスク管理体制を強化している。

一般に信用リスクを評価するための手法は、次の2つに大別される。

- (1) Structural approach (構造モデル)
- (2) Reduced-form approach (誘導モデル)

(1)は、企業の資産は資本と負債で構成され、資産が目減りして負債額を下回ったときにデフォルトが発生すると考えるモデルである。このカテゴリーの代表的なモデルに Merton (1974) や Black and Cox (1976) がある。一方、(2)はデフォルトや回収率を外生的に与えるモデルで、このアプローチの代表例が、Jarrow and Turnbull (1995) と Duffie and Singleton (1999) である。これらのモデルの詳細については木島・小守林 (1999) を参照して頂きたい。

信用リスク管理の中でも、特にポートフォリオのように複数の企業に対する信用リスクを扱う場合の重要な点として、企業の信用力変化の相関関係をいかに表現するかという問題が挙げられる。これは例えば同じ業種に属する企業や、グループ企業など、複数の企業の信用力が相関を持って変化するような現象であり、このような現象は社債や融資のポートフォリオ管理には大きな影響を与えるため、そのモデル化は重要な意味をもつ。

本報告ではこのような企業間の信用力変化を取り込

きじま まさあき

京都大学大学院 経済学研究科

〒606-8501 京都市左京区吉田本町

こもりばやし かつや, あくつ なぎさ

興銀第一フィナンシャルテクノロジー(株)

〒100-0004 千代田区大手町 1-5-1

んだ社債ポートフォリオの最適化モデルを紹介する。以降では、まず第2章でモデルの中心となるマルコフ連鎖モデルの概念を整理し、価格評価の方法や企業間の信用力相関を考慮したモデルについて紹介する。第3章では、社債ポートフォリオの最適化モデルについて、シミュレーションを交えてその内容を示す。

2. マルコフ連鎖モデル

格付けは企業の信用力を表す指標と考えられるため、その変動をモデル化することで、社債価格の分析をしようとする手法が Jarrow, Lando and Turnbull (1995) によるマルコフ連鎖モデル (以降, JLT モデルと呼ぶ) である。以下にその考え方をまとめる。

2.1 モデルの概略

離散的な状態空間 $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, K+1\}$ をもつマルコフ連鎖を $\{X_t\}$ とし、状態1が最高の格付け、状態2が2番目の格付に対応し、状態 K が最低の格付け、状態 $K+1$ がデフォルト (倒産などの吸収状態) を表すとする。

さらに、時点も離散的 ($t=1, 2, \dots$) であると考えて、時点 t から時点 $t+1$ の間に状態 i から状態 j ($i, j \in \mathcal{N}$) へ推移する確率を次のように定義する。

$$q_{ij}(t, t+1) = P\{X_{t+1}=j | X_t=i\} \quad (1)$$

JLT モデルでは、観測される格付けの推移確率は斉時的、すなわち時間によらず $q_{ij}(t, t+1) = q_{ij}$ であると考え、このとき q_{ij} を要素とする推移確率行列 Q は、

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1K} & q_{1,K+1} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2K} & q_{2,K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{K1} & q_{K2} & \cdots & q_{KK} & q_{K,K+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

のように表現され、この行列の第 (i, j) 要素は、ある時点において格付け i であった企業が1期後に格付け j となる確率を表している。

(2)式は、現実の格付け推移確率を表現したものであ

る。しかし、社債などの価格評価を行う場合には、現実に観測される格付けの推移確率を、価格を評価するためにリスク調整する必要がある。ここで、注意すべき点として、現実に観測される格付け推移 $\{X_t\}$ が斉時的マルコフ連鎖に従うとしても、リスク調整された推移確率も斉時的であるとは限らないということである。この点に注意すると、リスク中立推移確率 $\tilde{q}_{ij}(t, t+1)$ は、一般に次式で与えられる。

$$\tilde{q}_{ij}(t, t+1) = \pi_{ij}(t) q_{ij} \quad (3)$$

JLT モデルでは、

$$\pi_{ij}(t) = \pi_i(t) \quad (4)$$

と仮定して、リスク調整後の推移確率を次のように定義する。

$$\tilde{q}_{ij}(t, t+1) = \begin{cases} \pi_i(t) q_{ij}, & i \neq j \\ 1 - \pi_i(t)(1 - q_{ii}), & i = j \end{cases} \quad (5)$$

(5)式より一期間の推移確率 $\tilde{q}_{ij}(t, t+1)$ が求められ、これを (i, j) 要素とする行列 $\tilde{Q}(t, t+1)$ を用いて、

$$\tilde{Q}(t, T) = \tilde{Q}(t, t+1) \tilde{Q}(t+1, t+2) \cdots \tilde{Q}(T-1, T) \quad (6)$$

を計算し、これから T 期間の推移確率 $\tilde{q}_{ij}(t, T)$ を求めることができる。

2.2 リスク調整係数の推定

Jarrow and Turnbull (1995) によると、割引社債価格 $v(t, T)$ はデフォルトリスクのない割引同債価格 $v_0(t, T)$ を用いて、次のように表現できる。

$$v(t, T) = v_0(t, T) [\delta + (1 - \delta) \tilde{P}_t\{\tau_j > T\}], \quad (7)$$

ただし、 τ は企業の倒産時点を表す確率変数、 δ は倒産時の回収率で確定的な定数であるとする。この式において、 $\tilde{P}_t\{\tau_j > T\}$ は企業が時点 T までデフォルトしない確率を表しているが、これは(6)式の $\tilde{q}_{ij}(t, T)$ を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_t\{\tau_j > T\} &= \sum_{k=1}^K \tilde{q}_{ik}(t, T) \\ &= 1 - \tilde{q}_{i, K+1}(t, T) \end{aligned} \quad (8)$$

したがって、現在の社債価格と(8)式の倒産確率が求められれば、(5)式と(6)式を用いて、リスク調整係数 $\pi_i(t), t=1, 2, \dots$ を逐次的に求めることができる。

2.3 修正 JLT モデル

前節では JLT モデルにおけるリスク調整係数の推定を述べたが、実際にこのモデルに従ってリスク調整係数を求めようとする問題が生じる場合がある。リスク調整係数 $\pi_i(t)$ は、観測確率からリスク中立確率への同値変換の条件および推移確率の非負条件より、次式を満たすことが必要である。

$$0 < \pi_i(t) \leq \frac{1}{1 - q_{ii}} \quad (9)$$

ところが、一般に高格付け企業の倒産確率は、ほとんど 0 に等しいため、社債価格より推計されたリスク調整係数 $\pi_i(t)$ が(9)式を満たさないということがしばしば発生する。

このような JLT モデルの欠点に対し、Kijima and Komoribayashi (1998) は次に示すような改良を提案した。彼らは、(4)式の代わりに、

$$\pi_{ij}(t) = l_i(t) \quad (10)$$

とおき、リスク調整後の推移確率を次のように定義した。

$$\tilde{q}_{ij}(t, t+1) = \begin{cases} l_i(t) q_{ij}, & \dots j \neq K+1 \\ 1 - l_i(t)(1 - q_{i, K+1}), & \dots j = K+1 \end{cases} \quad (11)$$

このようにすることで JLT モデルの欠点を克服し、現実の社債データより安定的にリスク調整係数を推定することが可能になる。

2.4 相関を考慮したマルコフ連鎖モデル

以上の議論は 1 つの企業の格付け推移をモデル化したものであるが、社債や融資ポートフォリオの管理を行う場合には、先に述べたような企業の信用力変化における相関を考慮しなくてはならない。

複数企業の相関を考慮したモデルに Lando (1998) の多次元マルコフ連鎖モデルがあるが、扱うパラメータ数が膨大になるため、計算が煩雑になるという欠点がある。また、CreditMetrics (1997) では企業資産価値モデルに依拠して格付けの相関を求めているが、企業の資産価値を明確に定義し、それを数理モデルで記述することは実務上困難である。そこで本報告では、比較的少ないパラメータで相関を表現できる Kijima, Komoribayashi and Suzuki (2001) のモデルを用いることにした。

n 個のマルコフ連鎖 $\{X_t^k\} (k=1, 2, \dots, n)$ を考えて、 $\{X_t^k\}$ は k 番目の企業の格付け推移を表すとする。Kijima, Komoribayashi and Suzuki (2001) では、 $\{X_t^k\}$ の変動を次のように仮定した。

$$X_{t+1}^k = \begin{cases} \xi(X_t^k + (-1)^{\delta_k} B_{t+1}^k Y_{t+1} \\ + Z_{t+1}^k) & \dots X_t^k \neq K+1 \\ X_t^k, & \dots X_t^k = K+1 \end{cases} \quad (12)$$

ここで δ_k は相関の正負に応じて 0 または 1 をとる定数、 B_t^k はパラメータ $a_k (0 \leq a_k \leq 1)$ をもつベルヌーイ確率変数列

$$P\{B_t^k = 1\} = 1 - P\{B_t^k = 0\} = a_k \quad (13)$$

Y_t は平均0で整数値をとる独立で同一分布に従う確率変数列、 Z_{t+1}^k は X_t^k に依存した増分

$$P\{Z_{t+1}^k = j - i | X_t^k = i\} = q_{ij}^k \quad (14)$$

さらに、 $\xi(x)$ は境界での振舞いを規定する関数

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq K \\ K+1, & x \geq K+1 \end{cases} \quad (15)$$

である。 k 番目の確率変数列 $\{B_t^k\}$ と $\{Z_t^k\}$ は $\{Y_t\}$ および他の確率過程とは独立であるとする。したがって、マルコフ連鎖 $\{X_t^k\}$ には、 k によらない共通ファクター $\{Y_t\}$ と各 k に対応する係数 B_t^k を通して相関が生じる。確率1で $B_t^k = 0$ ならば、マルコフ連鎖 $\{X_t^k\}$ は互いに独立である。

モデル(12)式は、以下のような意味合いをもつ。簡単化のために、 $X_t^k \neq K+1$ および $X_{t+1}^k \neq 1, K+1$ と仮定しよう。このとき、(12)式と(15)式から、マルコフ連鎖 $\{X_t^k\}$ の増分は、

$$X_{t+1}^k - X_t^k = (-1)^{\delta_k} B_{t+1}^k Y_{t+1} + Z_{t+1}^k \quad (16)$$

となる。これは企業 k における格付けの増分を、共通ファクター $\{Y_t\}$ で説明しているモデルであり、 Y_{t+1} はシステムティック・リスク、 Z_{t+1}^k は企業 k の個別リスクであると解釈できる。係数 $(-1)^{\delta_k} B_{t+1}^k$ はCAPMで言うところの β に相当し、この値によって銘柄間の相関の度合いが決定される。

3. 社債ポートフォリオの最適化

この章では、前章までに述べた手法を応用した社債ポートフォリオの最適化モデルについて紹介する。このモデルは、以下の3つのステップから構成される。

1. 将来の格付けシミュレーション
2. 将来の社債ポートフォリオの時価評価
3. ポートフォリオの最適化

各ステップの内容を説明する前に、本報告と Andersson et al. (2001) との相違について簡単に述べておく。Andersson et al. (2001) ではCreditMetrics (1997) を使って格付けの相関を求めているが、先に指摘した通り、そもそも企業の資産価値をモデル化することは難しい。また、将来の社債価格を現在のイールドカーブから計算しており、金利期間構造の変動を考慮していない。これは社債価格の変動を格付け変動だけで説明する、市場リスクを取り込んでいないモデルである (Kijima and Muromachi (2000) を参照)。これに対して、本報告では観測可能なデータだけを使用し、また期間構造の変動を考慮したモデルになって

いる。

3.1 格付け分布

表1は仮想的な社債銘柄とその属性である。このような銘柄を用いて、社債ポートフォリオの最適化を行うことを考える。なお、各銘柄の発行企業を銘柄番号に対応して、企業1、企業2のように表す。

まず1番目のステップとして、表1の銘柄の発行企業が将来どのような格付け分布になるかについて、シミュレーションを行う。このとき、先に述べた企業間の格付け変動の相関を考慮するために、(12)式のモデルを用いる。ここで問題となるのが共通ファクター Y_t とファクターに対する各銘柄の感応度 B_t^k の推定である。これには大きく分けて2つの方法が考えられる。

1. ヒストリカルな格付けの推移から、共通ファクターと係数を内生的に推計する方法。
2. マクロ経済指数などから、共通ファクターを外生的に与えて、各銘柄の係数を推計する方法。

今回の分析では、後者の方法を用いるものとして、 $\{Y_t\}$ の変動が次の最も単純なケースで表現されるものとする。

表1 社債銘柄とその属性

銘柄	格付	満期	利払い	係数
銘柄1	AA	10	0.0215	-0.78
銘柄2	A	10	0.0300	0.70
銘柄3	A	10	0.0245	-0.82
銘柄4	A	9	0.0340	-0.51
銘柄5	A	10	0.0221	-1.00
銘柄6	AA	10	0.0191	0.57
銘柄7	A	10	0.0310	-1.00
銘柄8	AA	10	0.0213	0.21
銘柄9	AA	10	0.0230	-0.76
銘柄10	A	10	0.0245	-0.21
銘柄11	AA	9	0.0188	0.02
銘柄12	A	10	0.0265	-0.16
銘柄13	A	9	0.0246	0.30
銘柄14	A	9	0.0265	-1.00
銘柄15	A	10	0.0255	-0.45
銘柄16	A	10	0.0350	0.11
銘柄17	A	10	0.0268	-0.10
銘柄18	A	9	0.0300	-0.44
銘柄19	BBB	10	0.0315	-0.25
銘柄20	A	10	0.0248	0.62

$$\begin{cases} P\{Y=1\}=P\{Y=-1\}=r \\ P\{Y=0\}=1-2r \end{cases} \quad (17)$$

さらに、(17)式において $r=25\%$ となるようなマクロファクターを選び、この共通ファクターに対する個別銘柄の係数が表1の最右列のように推計されたとする。(12)式のモデルに照らし合わせると、この係数が正の場合には $\delta_k=0$ 、負の場合には $\delta_k=1$ 、さらに係数の絶対値が α_k に対応する。

ここで、マルコフ連鎖 $\{X_t^i\}$ の推移確率が表2のように観測されたとする。この推移確率 p_{ij}^k を (i, j) 要素とする行列を P_k 、(10)式を要素とする行列を Q_k とする。Kijima, Komoribayashi and Suzuki (2001) によると、 P_k と Q_k には次の関係がある。

$$P_k = Q_k((1-\alpha_k)I + \alpha_k R) \quad (18)$$

ここで、 R_k は次式で定義される行列である。

$$R_k = \begin{pmatrix} 1-r & r & 0 & \cdots & 0 \\ r & 1-2r & r & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r & 1-r \end{pmatrix} \quad (19)$$

そこで、(18)式の両辺の行列ノルムの差が最も小さくなるように P_k を求めれば、シミュレーションに必要なすべての変数を決定することができる。

以上のようにパラメータが推定できれば、確率変数

表2 格付推移確率行列 (単位%)

	AAA	AA	A	BBB	BB
AAA	91.94	7.46	0.48	0.08	0.04
AA	0.64	91.79	6.76	0.60	0.06
A	0.07	2.27	91.68	5.12	0.56
BBB	0.04	0.27	5.56	87.87	4.83
BB	0.04	0.10	0.61	7.75	81.48
B	0.00	0.10	0.28	0.46	6.95
CCC	0.19	0.00	0.37	0.75	2.43
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

	B	CCC	D
AAA	0.00	0.00	0.00
AA	0.12	0.03	0.00
A	0.25	0.01	0.04
BBB	1.02	0.17	0.24
BB	7.90	1.11	1.01
B	82.80	3.96	5.45
CCC	12.13	60.44	23.69
D	0.00	0.00	100.00

B, Y, Z の乱数を発生させて(12)式のシミュレーションを行うことで、表1に示す銘柄の発行企業の将来の格付け分布を計算することができる。実際に300回のシミュレーションを実施し、表1に示す銘柄の発行企業のうち企業6と企業4について、5年後の格付け分布を発生させた結果を図1と図2に示す。

企業6の現在の格付けはAA、企業4の格付けはAであるため、図1と図2で示された5年後の格付けも、それぞれ現在の格付けを中心に分布していることが分かる。さらに、企業間の相関を見るために企業1と企業7、企業2と企業7について、5年後の格付けの同時分布をグラフにしたものを図3と図4に示す。企業1と企業7は、ファクター Y に対する係数が似通っているため、将来の格付け分布も図3に示すように正の相関を示し、実際に相関係数を計算すると0.86となる。一方、企業2と企業7はファクター係数の符号が逆であることから、将来の格付け分布は図4のような負の相関を示し、相関係数も-0.77となる。このようにモデル(12)式を用いることで、企業間の信用力変動に関する相関を考慮した上で、将来の格付け分布をシミュレーションすることが可能になる。

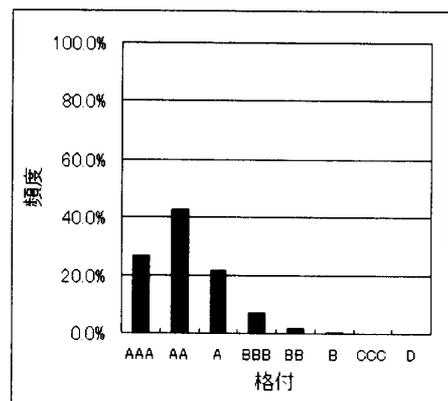


図1 企業6の格付け分布

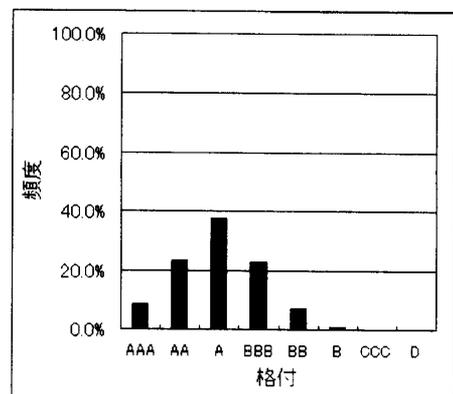


図2 企業4の格付け分布

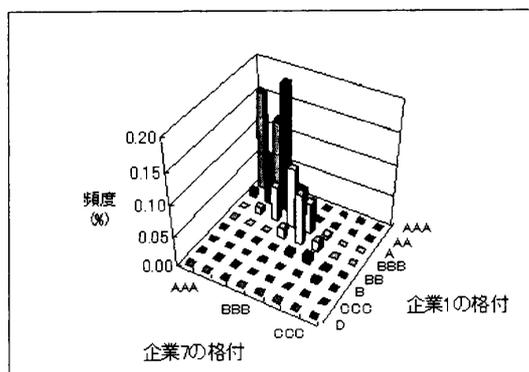


図3 企業1と企業7の格付け分布

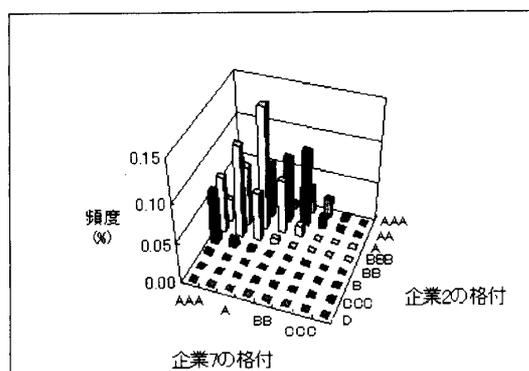


図4 企業2と企業7の格付け分布

3.2 時価評価

前節では、対象とする社債銘柄の発行企業の将来時点における格付けの分布を発生した。次のステップで行うべきことは、この発行企業の格付け分布をもとに、社債ポートフォリオの将来時点の時価分布を計算することである。そのためには将来時点のイールドカーブ(利回り曲線)が必要である。

時点 t における満期 T のイールド $Y(t, T)$ は、同じ満期を持つ割引債券価格 $v(t, T)$ を用いて次のように定義される。

$$Y(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log v(t, T) \quad (20)$$

ここで、格付け j を持つ企業が発行する社債のイールド $Y_j(t, T)$ と、この社債と同じ満期をもつ割引国債のイールド $Y_0(t, T)$ の差をイールドスプレッドとして次のように定義する。

$$\Delta_j(t, T) = Y_j(t, T) - Y_0(t, T) \quad (21)$$

このとき、(7)式と(20)式より、イールドスプレッドは次のように表現される。

$$\Delta_j(t, T) = \frac{-\log[\delta + (1-\delta)\tilde{P}_t\{\tau_j > T\}]}{T-t} \quad (22)$$

ただし、デフォルト確率 $\tilde{P}_t\{\tau_j > T\}$ は、(8)式によっ

表3 期初のイールド(単位%)

	1	2	3	4	5
国債	5.76	5.89	5.96	6.12	6.14
AAA	6.15	6.50	6.66	6.90	6.94
AA	6.19	6.54	6.71	6.97	7.03
A	6.47	6.76	6.92	7.21	7.31
BBB	6.85	7.16	7.35	7.63	7.75
BB	8.19	8.46	8.71	9.04	9.22
B	9.04	9.64	9.89	10.35	10.58
CCC	9.89	10.82	11.07	11.66	11.94
	6	7	8	9	10
	6.17	6.19	6.22	6.24	6.25
	7.01	7.07	7.11	7.14	7.12
	7.11	7.18	7.23	7.28	7.29
	7.39	7.45	7.51	7.60	7.62
	7.85	7.94	8.06	8.21	8.24
	9.34	9.44	9.54	9.63	9.67
	10.73	10.87	10.99	11.01	11.09
	12.13	12.30	12.36	12.29	12.26

て定義される。

この方法で、現在のイールド・データから、将来のイールドスプレッドを算出することができる。例えば現在のイールドが表3のように与えられたとき、これをイールドカーブとして、最初の5年間分をグラフ化すると図5のようになるが、(22)式を用いて5年後のイールドカーブを計算すると図6のように求められる。なお、デフォルトフリー(国債)のイールドカーブについては、現状のイールドカーブより推定したフォワードレート¹が実現するものとした。

このように、将来時点のイールドカーブを決定することができれば、各銘柄の将来時点でのキャッシュフローを前節で発生させた銘柄の格付けに対応したイールドで評価することにより、将来時点における社債の時価評価が可能になる。

この方法を先の銘柄の格付け変動300回のシミュレーション結果に適用することで、表1の社債銘柄の将来価格の同時分布を得ることができる。次節では、このようにして得られた社債価格のシミュレーション結果をもとに、社債ポートフォリオの最適化を行う。

¹現時点のイールドカーブに内包される将来金利のこと。

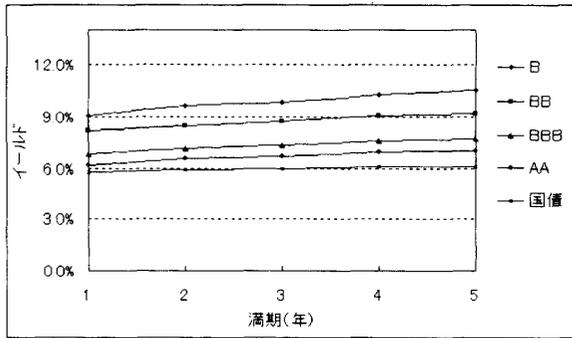


図5 期初のイールドカーブ

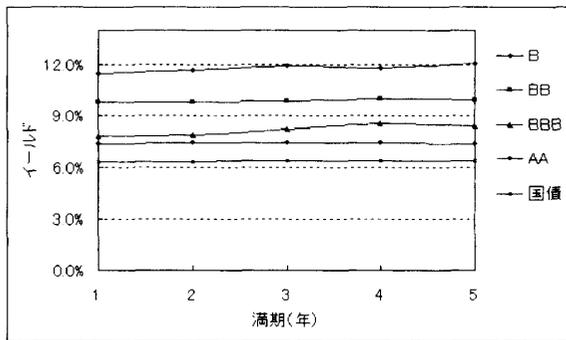


図6 5年後のイールドカーブ

3.3 最適化

ポートフォリオの最適化を行う場合の最も一般的な方法は平均・分散法、すなわち分散をリスクと考えて、同じリターンであれば分散が最も小さくなるポートフォリオを選択するという考え方である。これに対して今回のモデルでは、

1. 絶対偏差をリスクとした最適化
2. 下方リスクによる最適化

の2つの最適化方法を用いる。今野 (1995) によれば、平均・分散法などの2次計画法を用いる場合に比べ、絶対偏差や下方リスクによる最適化問題は線形計画に帰着することができるため、計算時間を大幅に短縮することができる。これは今回のモデルのように、シミュレーション結果に基づく最適化のような大規模な問題に対して有効である。また、Rockafellar and Uryasev (2000) による CVaR の最適化も同様に可能である。

まず、絶対偏差をリスクとした場合のポートフォリオの最適化は次式で表される。

$$\min \sum_{t=1}^T \frac{|u_t|}{T} \quad (23)$$

$$\text{s.t. } u_t = \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) w_j \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^n r_j w_j = r, \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1, \quad (25)$$

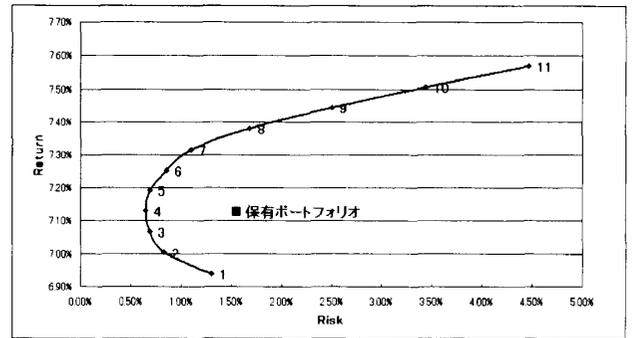


図7 社債ポートの効率的フロンティア

$$w_j \geq 0 \quad (26)$$

ただし、 r はポートフォリオのリターン、 r_j は銘柄 j の期待リターン、 r_{jt} は銘柄 j の t 番目のパスに対応するリターン、 w_j は銘柄 j のウェイトを表す。また、 T はシミュレーション回数、 n は銘柄数を示し、今回の計算では、 $T=300$ 、 $n=20$ である。

ポートフォリオの期待リターン r をパラメトリックに変化させながら、(23)式の最適化問題を解くことにより、効率的フロンティアを描くことができる。この結果を図7に示す。この図には効率的フロンティア上の11個のポートフォリオについて番号を付与するとともに、現在保有しているポートフォリオのリターン・リスク特性についてもプロットした。この図を見ると、効率的フロンティア上のポートフォリオ4は、現在の保有ポートフォリオとほぼ等しい期待リターンを持つが、リスクは小さいことが分かる。同様にポートフォリオ8を見ると、リスクは保有ポートフォリオとほぼ等しいが、期待リターンは高いことが分かる。

したがって、投資家がこのようなリスク・リターン特性をもとに、現在保有するポートフォリオの投資戦略を考える場合には、4番から8番の間に位置するポートフォリオがその目標となる。そこで、これらに位置するポートフォリオについて、銘柄の構成比率を見てみよう。図8は、現在保有しているポートフォリオの各銘柄への投資比率、図9~11はそれぞれポートフォリオ番号4、6、8番の投資比率をグラフ化したものである。

これらの図において、横軸は銘柄番号を表しているが、左に行くほど格付けが高くなるように順序を並べ替えてある。各ポートフォリオの投資比率を見ると、期待リタンの低いポートフォリオ4番は、比較的格付けの高い銘柄に投資しているのに対して、ポートフォリオ6、8番の順に期待リターンが高くなるにつれて、グラフが右寄り、すなわち格付けの低い銘柄への

投資比率が高まっているのを見て取ることができる。

次に、下方リスク最小化によるポートフォリオの最適化について考える。社債などの確定利付資産は、特定のリターンを確保するための運用などに用いられるため、このような手法の現実的な用途は高いと考えられる。下方リスクは、あらかじめ決められたリターン

の閾値を下回る部分として定義され、これをリスクとしたポートフォリオの最適化問題は次のように表される。

$$\min \sum_{t=1}^T \frac{|u_t|}{T} \quad (27)$$

$$\text{s.t. } u_t = \max(u_t, 0) \quad (28)$$

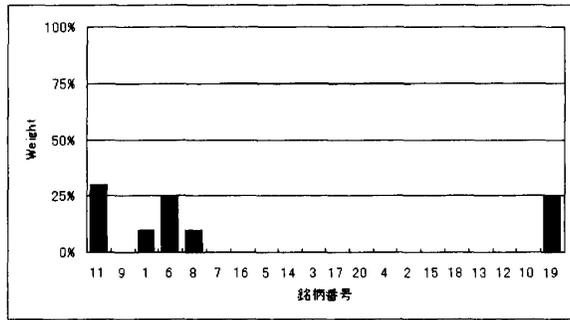


図8 保有ポートフォリオの投資比率

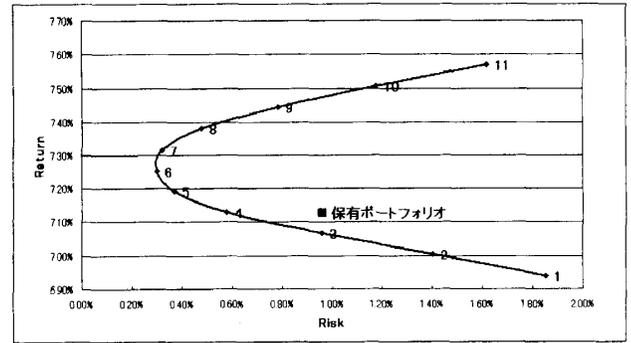


図12 下方リスクによる効率的フロンティア

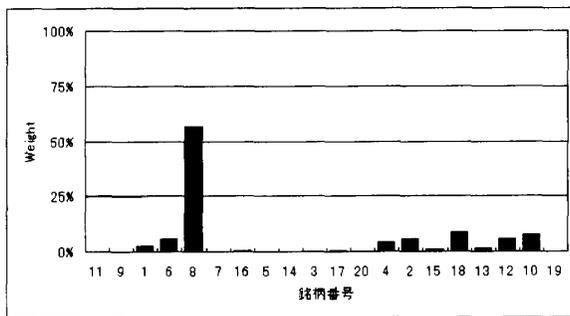


図9 ポートフォリオ4の投資比率

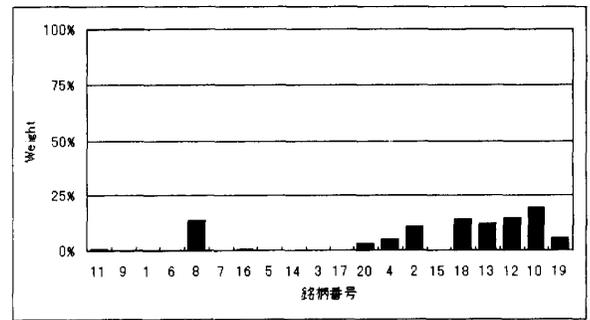


図13 ポートフォリオ4の投資比率

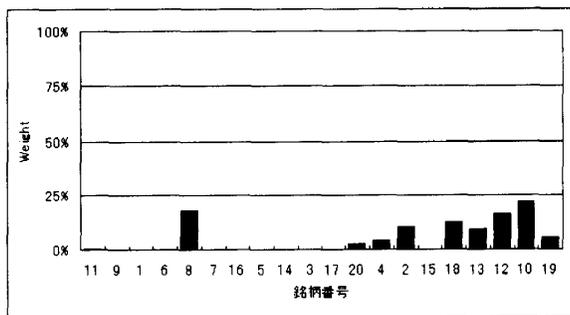


図10 ポートフォリオ6の投資比率

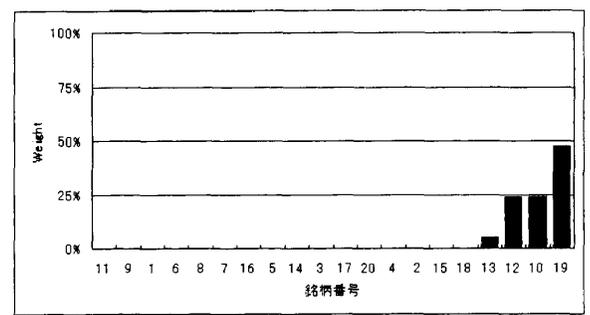


図14 ポートフォリオ6の投資比率

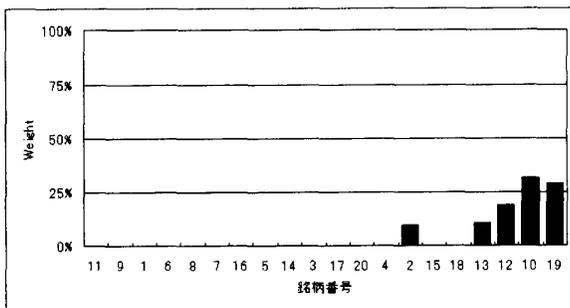


図11 ポートフォリオ8の投資比率

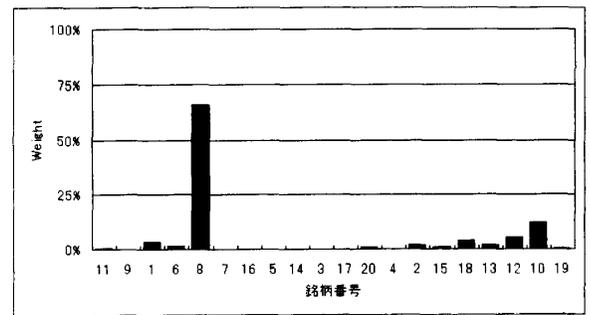


図15 ポートフォリオ9の投資比率

$$u_t = r_a - \sum_{j=1}^n r_{jt} w_j \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^n r_j w_j = r, \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1, \quad (30)$$

$$w_j \geq 0 \quad (31)$$

このような最適化について、閾値 r_a を 7.2% とした場合の効率的フロンティアを図 12 に、効率的フロンティア上のポートフォリオ 4, 6, 9 番の各銘柄への投資比率を図 13~15 に示す。

下方リスクによる最適化を行った場合についても、絶対偏差を用いた場合と同様に、高い期待リターンを目指すにつれて、格付けの低い銘柄への投資比率が高まっていく様子を見ることができる。

このように、絶対偏差や下方リスクによる最適化を実施することにより、現在保有する社債ポートフォリオに対して、どのようなリバランスを実施すればよいかについての指針策定に活用することが可能になる。

参考文献

- [1] 木島正明, 小守林克哉 (1999), “信用リスク評価の数理モデル”, 朝倉書店.
- [2] 今野浩 (1995), “理財工学 I, II”, 日科技連.
- [3] Andersson, F., H. Mausser, D. Rosen and S. Uryasev (2001), “Credit risk optimization with Conditional Value-at-Risk criterion”, *Mathematical Programming, Series B*, **89**, 273-291.
- [4] Black, F. and J. Cox (1976), “Valuing corporate securities: Some effects on bond indenture provisions”, *Journal of Finance*, **31**, 351-367.

- [5] *CreditMetrics*TM (1997), JP Morgan.
- [6] Duffie, D. and K. Singleton (1999), “Modeling term structures of defaultable bonds”, *Review of Financial Studies*, **12**, 687-820.
- [7] Jarrow, R. A., D. Lando and S. M. Turnbull (1995), “A Markov model for the term structure of credit risk spread”, *Review of Financial Studies*, **10**, 481-523.
- [8] Jarrow, R. A. and S. M. Turnbull (1995), “Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk”, *Journal of Finance*, **50**, 53-86.
- [9] Kijima, M. and K. Komoribayashi (1998), “A Markov chain model for valuing credit risk derivatives”, *Journal of Derivatives*, **6**, 97-108.
- [10] Kijima, M., K. Komoribayashi and E. Suzuki (2001), “A multivariate Markov model for simulating correlated defaults”, Working Paper.
- [11] Kijima, M. and Y. Muromachi (2000), “Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes”, *Journal of Risk*, **3**, 5-36.
- [12] Lando, D. (1998), “On rating transition analysis and correlation”, *Credit derivatives*, R. Jameson Ed., Risk Magazine, forthcoming.
- [13] Merton, R. C. (1974), “On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates”, *Journal of Finance*, **29**, 21-41.
- [14] Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000), “Optimization of conditional Value-at-Risk”, *Journal of Risk*, **2**, 21-41.