ワークフォーススケジューリング

由良　憲二

1. はじめに

ワークフォーススケジューリング問題は，組織を構成する人間の活動を時間軸上に配置する問題で，典型的な例として勤務スケジュールの作成を挙げることができる．この種の問題に対する研究の歴史は古く，集合被覆（ないし分割）問題として定式化して解を得る方法と，問題固有の特徴を利用して最適解ないし近似解を作成する方法がある．

前者については読者にとってお馴染みの問題で，定式化の方法と高速の解法を開発することが重要である．後者については，前者と伍して効率的にスケジュールを作成する最適ないし近似最適アルゴリズムを工夫して見出すことに焦点が当てられてきた．そして，多くの研究がなされた結果，いくつかの興味深い知見が得られている．本論では，後者の内で，特に最適化アルゴリズムについて焦点を当て，それらの中で重要と思われる研究成果を紹介する．

2. 基礎問題

基礎問題として，1週当り7日間オープンしているサービスシステムにおいて，各日の必要勤務者数を満足するために，何人の従業員を雇用し（必要従業員数決定），従業員の出勤日をいつにするかを決める（勤務表決定）問題を取り上げる．

平日（月～金）1日当り必要な勤務者数を D，週末（土，日）1日当り必要な勤務者数を E で表す．これらの間で，$D \geqq E$ が成り立つものとする．このとき，従業員へどのように休日を与えるかという休日割当方策によって，ワークフォーススケジュールが異なる．本章では，Brownell and Lowerre (1976) によって示された5つの休日割当方策に対する結果を紹介する．

5つの休日割当方策は以下の通りである．

ゆら　けんじ
電気通信大学　システム工学科
〒182-8585 調布市調布ケ丘 1-5-1

A：週当り2日間の休日を割当てる．

B：2週当り2回の連続2日間休日を割当てる．

C：週当り1回の連続2日間休日を割当てる．その連続休日は平日と週末のいずれかとする．

D：2週当り1回の連続2日間休日とそれを含めて4日間の休日を割当てる．

E：2週当り1回の週末休日と別に連続2日間休日割当である．

なお，証明は，最初の割当方策に対してのみ示し，他の方策については文献をご参照願いたい．

2.1 休日割当方策A

各従業員に1週間当り2日間の休日を与える方策である．このとき，必要最小従業員数 W は，

$$W = D + \lfloor (2E+4)/5 \rfloor = \lceil (5D+2E)/5 \rceil \quad (1)$$

ここで $\lfloor x \rfloor$ は x に等しいか小さい最大整数を，$\lceil x \rceil$ は x に等しいか大きい最小整数を示す．

このとき，次の手順で勤務スケジュールを作成すれば，そのスケジュールは各日の必要勤務者数を満足し，W 人の従業員には週当り2日間の休日が割当てられる．従業員には1から W の番号を付ける．

(手順)

(Step 1)　従業員1から $W-E$ に週末の休日を割当てる．休日が未割当の E 人の内，$W-D$ 人に（月，火）の休日を割当てる．

(Step 2)　Step 1の終了時点で，休日が未割当の従業員がいる場合，$W-D$ が偶数か奇数かで場合分けし，次のように休日を割当てる．

(Step 2 a)　$W-D$ が偶数の場合は，休日未割当の従業員に対して，番号順に，（水，木)，（水，金)，（木，金）の休日ペアを割当て，それでも残る場合は，再び，（水，木)，（水，金)，（木，金）の休日を割当てる．これを，休日未割当の従業員がなくなるまで繰り返す．

(Step 2 b)　$W-D$ が奇数の場合は，休日未割当の従業員の内，一人に対して（水，木）の休日を割当て，

残りの従業員に対しては，順に，(水，金)，(木，金)，(水，木) の休日を割当てる．それでも未割当の従業員が残る場合は，再び，(水，金)，(木，金)，(水，木) の休日を割当てる．このことを，休日未割当ての従業員がなくなるまで繰り返す．

(証明)

従業員数を w で表すと，週休2日なので，1週間当り利用可能延べ従業員数は $5w$ である．それに対して必要な延べ作業員数は，平日5日間で $5D$，週末2日間で $2E$ であるので，$5D+2E$ である．よって，必要最小従業員数 (W) は式(1)で与えられる．

次に，従業員数が W のとき，上記手順で各従業員に1週当り2日間の休日を与えられることを示す．

W 行7列からなる行列 (表1参照) を考える．行は従業員を，列は曜日を示す．また，行 i 列 j に X を置くことで，従業員 i の曜日 j を休日にすることを示す．

手順1は，第1行から第 $W-E$ 行の (土，日) の列に X を置くことである．この時点で，休日未割当の人数は E 人である．(月，火) という2日間の休日は，$W-D$ 人に割当可能で，$E \leqq W-D$ の場合は条件を満たすスケジュールが得られる．$E > W-D$ の場合は，E 人中の $W-D$ 人に (月，火) という休日を割当てる．この時点で，$W-E+W-D$ 人に休日を割当てたことになり，休日未割当の従業員数は $W-(W-E+W-D)=E-(W-D)$ 人であり，式(1)から，

$$E-(W-D) \leqq 3E/5 \qquad (2)$$

以下，$W-D$ が偶数か奇数かで場合分けして考える．

$W-D$ が偶数の場合は，(水，木)，(水，金)，(木，金) にそれぞれ $(W-D)/2$ 人ずつ休日を割当てることができる．これらの合計は，$3(W-D)/2$ である．式(1) より，$W-D \geqq 2E/5$ であり，$3(W-D)/2 \geqq 3E/5$ となる．一方，休日未割当の従業員数は式(2)より $3E/5$ 以下である．よって，$W-D$ が偶数の場合は，Step 2 a で従業員全員に休日を割当てることができる．

$W-D$ が奇数の場合は，(水，木)，(水，金)，(木，金) にそれぞれ $(W-D-1)/2$ 人ずつの休日を割当可能で，さらにもう一つ (水，木) という休日を割当可能である．これらの合計は，$1+3(W-D-1)/2=3(W-D)/2-1/2$ であり，式(1) より，$3(W-D)/2-1/2 \geqq 3E/5-1/2$ となる．

ところで，式(1)より，$W-D=\lceil 2E/5 \rceil$ であり，これが奇数のとき，$2E/5=2(i+j/5)$，$j=1$ or 2 である．このとき，$3E/5-1/2=3i+3j/5-1/2$ で，$j=1$ or 2 に対して $3i+\alpha(\alpha>0)$ となる．$3(W-D)/2-1/2$ は整数であることから，$3(W-D)/2-1/2 \geqq 3i+1$ である．

他方，休日未割当の従業員数は，式(2)より，$E-(W-D) \leqq 3E/5$ で，$3E/5=3i+3j/5$ より，$j=1$ or 2 に対して $E-(W-D) \leqq 3i+6/5$ となる．そして，$E-(W-D)$ が整数であることから，$E-(W-D) \leqq 3i+1$ である．よって $W-D$ が奇数の場合，Step 2 b で従業員全員に休日を割当てることができる (証明終了)．

例． $D=7$，$E=5$ の場合，式(1)より，$W=9$ となり，上記の手順を適用することで，表1のスケジュールが得られる．

2.2 休日割当方策 B

各従業員に2週間当り2回の連続2日間の休日を与える方策である．この場合の必要従業員数は，休日割当方策 A の場合と同一である．従業員の勤務スケジュールは，期間を2週間として，次の手順で作成する．

(Step 1) 従業員1から $W-E$ に第2週末の休日を割当てる．$D>E$ のとき，従業員 $W-(D-E)+1$ から W に第1週末の休日を割当てる．

(Step 2) 従業員 $W-E+1$ から従業員番号の増加順に，$W-D$ 人ずつ，第1週の (月，火)，(水，木)，(金，土)，(第1週の日，第2週の月)，第2週の (火，水)，(木，金) という休日を割当てる．ここで，従業員 $W+k(k>0)$ は，従業員 k として取り扱う．また，Step 1 で1週目に休日が割当てられた従業員 $W-(D-E)+1$ から W には，それ以外に1週目に休日を割当てない (計算終了)．

表1 $D=7, E=5$ に対する休日割当方策 A による勤務スケジュール

従業員	月	火	水	木	金	土	日
1						X	X
2						X	X
3						X	X
4						X	X
5	X	X					
6	X	X					
7			X	X			
8			X		X		
9				X	X		

表2　$D=7, E=5$ に対する休日割当方策Bによる勤務スケジュール

従業員	第1週							第2週						
	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日
1			X	X									X	X
2					X	X							X	X
3					X	X							X	X
4							X	X					X	X
5	X	X					X	X						
6	X	X							X	X				
7			X	X					X	X				
8						X	X				X	X		
9						X	X				X	X		

例． $D=7$，$E=5$ の場合，式(1)より，$W=9$ となり，上記の手順を適用することで，表2のスケジュールが得られる．

2.3　休日割当方策C

この方策では，各従業員に1週間当り1回の連続2日間休日を与える．ただし，休日の2日間は平日と週末の曜日とを両方は含めない．

必要最小従業員数 W は，

$$W=D+\lfloor(E+1)/2\rfloor \tag{3}$$

従業員の勤務スケジュールは，従業員1から $W-E$ に第1週末の休日を割当て，残りの従業員に，(木，金)，(火，水) の連続休日を割当てる．

例． $D=7$，$E=5$ の場合，式(3)より，$W=10$ となり，上記の手順を適用することで，表3の勤務スケジュールが得られる．

2.4　休日割当方策D

各従業員に，2週間当り1回の週末休日を与え，この休日を含めて2週間当り4日間の休日を与える方策である．

$8E/5D \geqq 1$ の場合，必要最小従業員数 W は $2E$ である．従業員の勤務スケジュールは，従業員1から E に第1週末の休日を割当て，残りの従業員 $E+1$ から $2E$ に第2週末の休日を割当てる．第1週について，従業員 $E+1$ から $2E$ に，月から金へ順に $2E-D$ 人ずつ休日を与え，第2週については従業員1から E に，金から月へ順に $2E-D$ 人ずつ休日を与える．

$8E/5D<1$ の場合，$W>2E$ となる．週末の勤務方策として次の2つが考えられる．

週末方策1：各週末には，E 人が働く．

週末方策2：各従業員は，2週末の内，1週末は休日で1週末は勤務とする．

表3　$D=7, E=5$ に対する休日割当方策Cによる勤務スケジュール

従業員	月	火	水	木	金	土	日
1						X	X
2						X	X
3						X	X
4						X	X
5						X	X
6				X	X		
7				X	X		
8				X	X		
9		X	X				
10		X	X				

このとき，それぞれの必要最小従業員数は，週末方策1で $2E+\lfloor(5D-8E+4)/5\rfloor$，週末方策2で $\lfloor(5D+3)/4\rfloor$ である．

2.5　休日割当方策E

この方策は，各従業員に，2週間当り1回の週末休日を与え，さらに別に連続2日間休日を与える．

$3E/2D \geqq 1$ の場合，必要最小従業員数 W は $2E$ である．従業員の勤務スケジュールは，従業員1から E に第1週末の休日を割当て，残りの従業員 $E+1$ から $2E$ に第2週末の休日を割当てる．第1(2)週について，従業員 $E+1(1)$ から $2E(E)$ に，(木，金)，(火，水) の連続休日を順に割当てる．

$3E/2D<1$ の場合，それぞれの必要最小従業員数は，休日割当方策 D で示した週末方策1のとき $2E+$

表4　$D=7, E=5$ に対する休日割当方策Eによる勤務スケジュール

従業員	第2週						
	月	火	水	木	金	土	日
1				X	X		
2				X	X		
3				X	X		
4		X	X				
5		X	X				
6						X	X
7						X	X
8						X	X
9						X	X
10						X	X

$\lfloor(2D-3E+1)/5\rfloor$，週末方策2のとき $\lfloor(4D+2)/3\rfloor$ である．

例． $D=7, E=5$ の場合，$3E/2D\geqq 1$ より，$W=10$ となり，第1週は表3，第2週は表4のスケジュールが得られる．

3．曜日毎に異なる必要勤務者数，週末休日割当の一般化並びに連続勤務日数の考慮

Brownell and Lowerre (1976) は，従業員の連続勤務日数について考慮を払っていない．そのため，連続勤務日数が長いスケジュールを結果として生成することがある．また，従業員の週末休日に関しても，2週中に1回だけ週末休日を割当てることは扱っているが，そのほかの場合を扱っていない．そこで，Baker, Burns and Carter (1979) は，これらのことを考慮したスケジューリング方法を分析した．その後，Burns and Carter (1985) は，各曜日の必要勤務者数が異なる場合を取り扱えるように一般化した．そこで本節では，この Burns and Carter (1985) のスケジューリング法を紹介する．

各曜日の必要勤務者数を $D_j (j=1,2,\cdots,7)$ で表す．ここで $j=1$ は日曜日を，$j=2$ は月曜日を，$j=7$ は土曜日を表す．また，従業員は B 週末中の少なくとも A 週末で休日を与えられる．そして1週（この場合は日曜日から土曜日までの7日間）に5日間だけ勤務し，2日間は休日とする．さらに，各従業員は，連続して6日間までしか勤務しないようにする．

以上の条件のもとで，必要従業員数 W と従業員の勤務スケジュールを決める問題を取り扱う．

必要従業員数 W を決めるに当って，少なくとも必要な人数制約として，次の3つがある．

①週末休日制約：従業員は，B 週末中の少なくとも A 週末で休日を与えられることから，従業員は B 週間で，$B-A$ 週末は勤務する．各週末の必要な出勤者数は $\max\{D_1, D_7\}$（これを E で表す）であるから，これを B 倍した数よりも，$W(B-A)$ は大きくなければならない．したがって，

$$W\geqq\lceil BE/(B-A)\rceil \tag{4}$$

②総必要従業員数制約：これは式(1)，(3)を導出したのと同じ制約で，1週間当りの総必要従業員数を，1週間当り5日間勤務する従業員が何人いれば充足できるかを示す制約である．つまり，$5W\geqq D_1+D_2+\cdots+D_7$ より，

$$W\geqq\lceil(D_1+D_2+\cdots+D_7)/5\rceil \tag{5}$$

③最大必要従業員数制約：従業員数は，曜日の中で最も多く必要とする勤務者数より多くないといけない．これは，

$$W\geqq\max\{D_1, D_2, \cdots, D_7\} \tag{6}$$

以上の式(4)～(6)を満足する W を必要従業員数とする．

次に，勤務スケジュールを作成するアルゴリズムを示す．

(Step 1)　必要従業員数 W を式(4)～(6)で求める．

(Step 2)　週末休日を従業員に割当てる．週末は E 人が勤務するので，$W-E$ 人は休日とすることができる．そこで，第1週末（第1週の日曜日）では従業員1から $W-E$ が休日，第2週末（第1週の土曜日と第2週の日曜日）では次の従業員 $W-E+1$ から $2(W-E)$ が休日，というように休日を割当てる．ただし，従業員 $W+k (k>0)$ は，従業員 k として取り扱う．

(Step 3)　従業員に割当てる平日の休日ペアを決定する．曜日 j における余分の従業員数 S_j を求める．

$$S_j=W-D_j (j=2,3,\cdots,6) \tag{7}$$

$$S_j=E-D_j (j=1,7) \tag{8}$$

次に，E 個の休日ペアのリストを求める．

①$S_k=\max\{S_j\}$ なる曜日 k を選ぶ．

②$S_i>0$ なる $i\neq k$ を任意に選ぶ．すべての $i\neq k$ について $S_i=0$ の場合は，$i=k$ とする．

③休日ペア (i,k) をリストに加え，S_i と S_k から1を引く．

④この手続きを E 回繰り返す．

(Step 4)　第1週の勤務スケジュールに休日ペアを割当てる．第1週では，従業員は週末休日の割当状況から，次の4つに分類できる．

タイプ1：週末1，2ともに休日．このタイプには，第1週に休日ペアを割当てる必要はない．

タイプ2：週末1が休日で，週末2が勤務．このタイプには，第1週に1日の休日が必要である．

タイプ3：週末1が勤務で，週末2が休日．このタイプには，第1週に1日の休日が必要である．

タイプ4：週末1，2ともに勤務．このタイプには，第1週に2組の休日ペアを割当てる必要がある．

休日ペアのリストの最初から順に，休日ペアを従業員に割当てる．まず，タイプ4の従業員に割当てる．次にタイプ2，3の従業員に割当てる．そのとき，ペアの曜日の早い方をタイプ3に，残りをタイプ2に割当てる．

(Step 5)　第 i 週 $(i \geqq 2)$ の勤務スケジュールに休日ペアを割当てる．第 $i-1$ 週までのスケジュールが決まると，各従業員が第 i 週でどのタイプに属するかが決まる．そして，Step 4の割当を適用する．

例． $D_1=D_3=D_5=D_7=5$, $D_2=D_4=D_6=7$, $B=2$, $A=1$ の場合を取り上げる．このとき，$E=5$, $W=10$ である．$S_1=S_7=0$, $S_2=S_4=S_6=3$, $S_3=S_5=5$ より，E 個の休日ペアとしては，例えば，(火，木)，(火，木)，(月，火)，(水，木)，(月，金) と選ぶことができる．このとき，勤務スケジュールは表5のように得られる．

4.　従業員能力ないし資格の階層性

従業員が有する能力ないし資格に階層性があり，上位ランクの従業員が下位ランクの従業員の代わりを果たすことができる場合 (Emmons and Burns (1991)) がある．また，必要に応じて，パートタイムの従業員を雇う場合 (Emmons and Fuh (1997)) もある．ここでは，前者の問題について，Emmons and Burns (1991) に基づいて説明する．

対象とするシステムは，1週間に7日間稼動しているとする．従業員にはすべての週において2日間の休日が割当てられ，B 週末中の少なくとも A 週末で休日を与えられないといけない．従業員の連続労働日数は2～5日間の範囲になるようにする．

従業員には m 種のタイプがあり，従業員は資格でランク付けられていて，タイプ k の従業員はタイプ $k+1$ の従業員の代わりを務めることができる．従業員タイプ毎の必要人数は，曜日で変化しないものとする．1日当り必要なタイプ1～k の最小従業員数を D_k，1日当り必要なタイプ k の最小従業員数を d_k で表す．

D_k と d_k，従業員の週当り休日が2日であること，そして B 週末中の A 週末で休日を得るという条件を満たすために必要な最小の総従業員数を W で表す．また，必要なタイプ k の最小従業員数を w_k で表す．

1日当りの必要勤務者数が n のとき，休日条件を満たすための最小従業員数 $f(n)$ は，

$$f(n)=\max\{\lceil nB/(B-A)\rceil, \lceil 7n/5\rceil\} \tag{9}$$

このとき，$f(d_k)$ はタイプ k の従業員に対する必要者

表5　$D_1=D_3=D_5=D_7=5$, $D_2=D_4=D_6=7$，連続勤務日数5日，2週末中1週末休日である場合に対する勤務スケジュール

従業員	第1週							第2週						
	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土
1	X				X					X				X
2	X				X					X				X
3	X		X						X					X
4	X				X						X			X
5	X					X			X					X
6			X				X	X				X		
7			X				X	X				X		
8		X					X	X		X				
9				X			X	X				X		
10		X					X	X					X	

数 d_k を満たすために必要なタイプ k の従業員数を示し，$f(D_k)$ はタイプ1〜k の従業員の総数に対する制約だけがあるとしたときの総従業員数を示す．必要総従業員数 W は，任意の k に対して，タイプ1〜k の従業員数が D_k の制約を満足し，タイプ $k+1$〜m の従業員数がそれぞれ固有の制約 d_k を満足するように，次式の関係を満たす．

$$W \geqq f(D_k)+f(d_{k+1})+\cdots+f(d_m) \quad (k=1,2,\cdots,m) \tag{10}$$

ランクが高い従業員は一般に給与も多く，それらの従業員数を少なくすることを目指すと，各タイプの従業員の必要人数が次式で与えられる．

$$w_1=f(d_1) \tag{11}$$

$$w_k=\max\{f(d_k), f(D_k)-w_1-w_2-\cdots-w_{k-1}\} \quad (k=2,3,\cdots,m) \tag{12}$$

各タイプの従業員数がこれらの式を満足する場合，以下のアルゴリズムで勤務スケジュールが得られる．

このアルゴリズムは，週末休日を割当てる段階と，平日に休日を割当てる段階の2段階から構成される．週末休日を割当てる段階で次の記号を用いる．

$$x_k=Aw_k/B \tag{13}$$

$$y_k=B(\lfloor x_k \rfloor+1-x_k) \tag{14}$$

このとき週末休日の割当て手順は以下の通りである．

(Step 1)　与えられた $m, d=(d_1, d_2, \cdots, d_m), D=(D_1, D_2, \cdots, D_m), A, B$ を基にして，式(11)〜(14)により，$w_k, x_k, y_k (k=1,2,\cdots,m)$ を求める．

(Step 2)　従業員のタイプ別に，$k=1,2,\cdots,m$ の順に，y_k 週末で $\lfloor x_k \rfloor$ 人の従業員に休日を与える．そして，残りの $B-y_k$ 週末で $\lceil x_k \rceil$ 人の従業員に休日を与える．休日の割当人数が少ない y_k 週末は連続せずに，交代で生じるのが良い．そこで，数列 $S=(1,3,5,\cdots,B \text{ or } B-1, 2,4,6,\cdots,B-1 \text{ or } B)$ に従って，各タイプにまたがって，$\lfloor x_k \rfloor$ 並びに $\lceil x_k \rceil$ 人の従業員が週末休日を得る週末を順に決める．

(Step 3)　各週末に休日を割当てる従業員を選択するに当っては，タイプ k の $\lfloor x_k \rfloor$ 人の従業員を先に割当て，その後で残りの従業員の週末休日割当を順番に行う．ただし，従業員 $w_k+l (l>0)$ は，従業員 l として取り扱う．

一方，平日の休日割当手順は，次の通りである．ただし，(i/j) スロットは，週末休日が続けて割当てられていない週の数が j で，その j 週の内の第 i 週を示す．

(Step 1)　タイプ $1,2,\cdots,m$ の順に，そして各タイプ k については第1週から第 B 週まで週番号順に，以下のStepに従って，休日割当を行う．

(Step 2)　週末休日が割当てられていない週が3週間あるいは4週間にわたる最初の週（つまり(1/3)ないし(1/4)）に対して，1日の平日の休日を，次の順序で与える．

(1/4)に対しては，金曜日か木曜日

(1/3)に対しては，金曜日か木曜日

いずれの場合も，金曜日に休日を与える余裕があれば，金曜日に割当てる．

(Step 3)　残りの週に対して，次の順序で，休日を割当てる．

(3/3)と(4/4)に対して，月曜日か火曜日

(2/4)に対して，(水，木)，(木，金)，(火，水) あるいは (月，火)

(3/4)に対して，(火，水)，(月，火)，(水，木) あるいは (木，金)

(2/4)と(3/4)の週が複数個存在する場合は，ステップ5の方法に従う．

(2/3)に対して，(火，水) ないし (水，木)

(1/2)に対して，木曜日，金曜日あるいは水曜日

(2/2)に対して，火曜日，月曜日あるいは水曜日

(Step 4)　ステップ3で，各週に対して割当可能な日が複数個ある場合は，次のルールで決定する．

(a)　既に割当可能な休日が残っていない曜日と連続出勤日数が2より小さいあるいは5より大きくなるような曜日は避ける．それでも決まらない場合は，(b)を用いる．

(b)　5日間の平日におけるタイプ k の従業員に割当てる休日ができるだけ均等になるように選択する．それでも決まらない場合は，各タイプの従業員全体の休日が均等になるように選択する．それでも決まらない場合は，(c)を用いる．

(c)　可能であれば，連続した休日が後の割当で使えるように残すことができる曜日を選択する．それでも決まらない場合は，(d)を用いる．

(d)　第2週から第 B 週に対して，以前に割当てた休日からの連続勤務日数が4日に近い曜日を選択する．それでも決まらない場合は，(e)を用いる．

(e)　リストの最初を選択する．

(Step 5)　同じタイプのスロットが複数個ある場合は，Step 4で示した(a)〜(e)のルールで選択する．なお，(3/3)と(4/4)，(2/4)と(3/4)は同じタイプのスロットとして取り扱う．

表6　$m=3, d_1=d_2=d_3=1, D_1=1, D_2=3, D_3=6$，3週末休日である場合に対する勤務スケジュール

従業員		第1週							第2週							第3週						
タイプ	番号	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土
1	1		X					X	X					X				X	X			
	2			X	X					X					X	X					X	
2	3	X					X				X	X					X					X
	4		X					X	X					X				X	X			
	5			X	X					X					X	X					X	
3	6		X					X	X					X				X	X			
	7			X	X					X					X	X					X	
	8	X					X				X	X					X					X
	9	X					X				X	X					X					X

例. $m=3, A=1, B=3, d=(d_1, d_2, d_3)=(1,1,1), D=(D_1, D_2, D_3)=(1,3,6)$とする．このとき，式(11)，(12)より，$w_1=2, w_2=3, w_3=4$．また，式(13)，(14)より，$x_1=2/3, x_2=1, x_3=4/3, y_1=1, y_2=3, y_3=2$である．このときの勤務スケジュールを表6に示す．

5. マルチシフトスケジューリング

マルチシフトスケジューリングでは，1日のサービス時間が長時間にわたる場合に典型的に生じる問題で，1日24時間サービスの場合は，24時間を8時間ずつの3シフトに，あるいは12時間ずつの2シフトに分けることが多い．24時間のサービスでない場合でも，1日のサービス時間が8時間を越える場合は，一般にマルチシフトで対応する．繁忙時間にシフトのサービス時間が重なるように設定して対応することもある．

Burns and Koop (1987) は，1日3シフト（1シフト8時間）で，平日のシフトiにおける必要勤務者数がD_i，週末のシフトiにおける必要勤務者数がE_iの場合に，次の4つの条件を満たすスケジューリング問題を分析した．

①従業員は各週当り平均して2日間の休日を割当てられる．そして，連続して2週末勤務する従業員は，少なくともその間に1回の連続休日を割当てられる．

②従業員はB週末中のA週末は少なくとも休日が割当てられる．

③2つの連続して勤務するシフト間には，少なくとも16時間の間がなければならない．また，シフト変更時には，少なくと1日の休日が与えられる．

④従業員の最大連続勤務日数は6シフトまである．

このとき，$D=D_1+D_2+D_3, E=E_1+E_2+E_3$とすると，最低限必要な従業員数$W$は，次式で与えられる．

$$W=\max\{D+\lceil 2E/5\rceil, \lceil BE/(B-A)\rceil\} \tag{15}$$

Burns and Koop (1987) は，この最小従業員数で，上記の4つの条件を満たす勤務スケジュールの作成法を示した．それは，予め部分的なスケジュール（モジュール）を用意しておいて，それを組み合わせてスケジュールを作成する方法である．

6. おわりに

勤務スケジュールの最適化に関する研究は，今後もより複雑で，現実に近いモデルの分析へと進んでいくものと考える．現在，この研究分野にとっての重大な問題点として挙げられるのは，どのような複雑さの問題まで最適解が得られるかがわかっていないことである．今後，研究を進め，この限界を明らかにする必要がある．

勤務スケジュールの作成は，複雑な場合では近似解を生成するヒューリスティックな解法が有望で，これらの手法が今後さらに発展・普及していくと考える．しかし，計算量の少ないアルゴリズムで解が得られる問題に対して，あえてそのような方法を使用する必要はなかろう．また，問題が複雑なために，近似解法を作成せざるを得ない場合でも，初期解作成などに解析結果は有用であろう．その意味でも，スケジュール最適化の研究が発展することが期待される．

参考文献

[1] K. R. Baker, R. N. Burns and M. W. Carter, Staff scheduling with day-off and workstretch constraints, AIIE Transactions, 11, 4 (1979), pp. 286-292.

[2] W. S. Brownell and J. M. Lowerre, Scheduling of work forces required in continuous operations under alternative labor policies, Management Science, 22, 5 (1976), pp. 597-605.

[3] R. N. Burns and M. W. Carter, Work force size and single shift schedules with variable demands, Management Science, 31, 5 (1985), pp. 599-607.

[4] R. N. Burns and G. J. Koop, A modular approach to optimal multiple-shift manpower scheduling, Operations Research, 35, 1 (1987), pp. 100-110.

[5] H. Emmons and R. N. Burns, Off-day scheduling with hierarchical worker categories, Operations Research, 39, 3 (1991), pp. 484-495.

[6] H. Emmons and D.-S. Fuh, Sizing and scheduling a full-time and part-time workforce with off-day and off-weekend constraints, Annals of Operations Research, 70 (1997), pp. 473-492.