【書評】

Winfried K. Grassmann 編

Computational Probability

Kluwer Academic Publishers 2000年 498頁

ORの応用分野では，確率過程としてモデル化されるシステムが多い．例えば，待ち行列，信頼性モデル，計算機や通信ネットワークのモデル等である．これらのシステムの性能を評価する方法には，大きく分けて，解析的方法，数値計算，モンテカルロシミュレーションの3つがあり，それぞれ長所と短所がある．本書が対象とする数値計算法は，定式化は解析的方法と同様に行うが，方程式を数式を用いて解くのではなく，数値的に解く方法である．従って，数式では解が得られない場合でも数値解が得られ，また，計算時間はシミュレーションよりも少なく，解は正確である．短所は，定式化されたシステムの状態の数が大きくなると，計算時間と記憶域量の制約から，使えなくなることである．このときは，シミュレーションに訴えるしかない．

本書は，応用確率論の分野において顕著な研究実績のあるよく知られた研究者が各章の執筆を担当し，全体として，離散事象の確率過程の数値計算法に関する最前線の研究成果が概観できるように，編成されている．以下では，各章の内容を簡単に紹介し，最後に私見を述べる．

1. Computational Probability: Challenges and Limitations（W. K. Grassmann，9ページ）

この章では，本書の編者自身が，数式をほとんど使わずに，上述のような計算確率論の概略と課題を述べている．特に，並列に動作が起こるシステムのMarkovモデルにおいては，状態の数が状態変数の数とともに指数関数的に増えるので（次元の呪い），状態間の推移確率の計算，それらの記憶，及び状態確率やシステムの性能の計算が困難になることを指摘している．

2. Tools for Formulating Markov Models（G. Ciardo，31ページ）

Markov連鎖としてモデル化される離散事象システムの数値解析のためには，状態間の推移確率が必要である．しかし，扱うシステムが少し複雑になると，推移確率を求めることが容易でなくなる．その解決策として，離散事象システムの動作をモデル化するために使われていたPetriネットに，状態推移に要する有限時間と推移先の確率的選択の要素を加えて，確率的Petriネットが80年代初めに提案された．Petriネットは図による表示に適しているので，今では，確率的Petriネットのモデルを，パソコンの画面上でアイコン操作により作成できるツールがある．ユーザがこれを用いてモデルを作ると，ソフトウェアがそれをMarkov連鎖に変換し，状態推移確率を計算する．本章では，確率的Petriネットのツールに実装されているアルゴリズムや計算の複雑性を減少させる方法等が説明されている．

3. Transient Solutions for Markov Chains（E. de Souza e Silva and H. R. Gail，37ページ）

この章では，Markov連鎖の時間に依存する解（非定常解）と，時間に依存する報酬・費用や利用可能性・信頼性の評価方法の理論が説明されている．数値計算法や数値例は示されていない．

4. Numerical Methods for Computing Stationary Distributions of Finite Irreducible Markov Chains（W. J. Stewart，31ページ）

本章と次章は，有限個の状態をもつMarkov連鎖の定常解の数値計算法に関するものである．有限Markov連鎖の定常解は，状態の数と同数の線形連立方程式の解として求められる．従って，状態数が少なければ，Gaussの掃き出し法等の直接法で簡単に解ける．しかし，状態数が多くなると，反復法が速く解を出す．本章では，直接法と反復法を，アルゴリズムを示して，詳しく説明している．更に，大きな状態空間があまり相互作用のないいくつかの部分空間に分割できるとき（複合システムのモデルでは，そのようなことが多い）に適用できる分割法について述べている．

5. Stochastic Automata Networks（B. Plateau and W. J. Stewart，39ページ）

並列システムや分散システムのMarkovモデルでは，推移確率行列は直積の形をとることが多いので，

この性質を利用して，計算時間と記憶域量を減らすことができる．本章では，これを，緩く結合した確率オートマトン網として定式化し，それを解析するためのテンソル代数が説明されている．簡単な応用例として，資源共有問題，ブロッキングと優先処理のある待ち行列が示されている．反復法により定常解を計算するときの計算時間と記憶域量に対する考察が述べられている．

6. Matrix Analytic Methods (W. K. Grassmann and D. A Stanford, 51ページ)

本章と次章は，無限個の状態をもつMarkov連鎖の定常解の数値計算法に関するものである．本章では，GI/M/1型，M/G/1型，及びGI/G/1型の確率過程の定常確率を，行列解析法により計算する方法を説明している．GI/M/1型の過程とは，GI/M/1待ち行列の隠れMarkov連鎖と同じ推移確率行列の構造（下方Hessenberg行列）をもち，その要素が行列で与えられるものである．同様に，M/G/1型の過程とは推移確率行列が上方Hessenberg行列の形で，その要素が行列で与えられるものである．これらの過程の解析方法には，行列解析法と固有値法の2つがある．行列解析法は，Wallaceが提案し（1969），その後Neutsと彼のグループが大きく発展させたものである．本章では，GI/M/1型及びM/G/1型過程に対するNeutsの理論を示した後，数値計算法を，アルゴリズムを示して，詳しく説明している．

7. Use of Characteristic Roots for Solving Infinite State Markov Chains (H. R. Gail, S. L. Hantler, and B. A. Taylor, 51ページ)

本章は，GI/M/1型及びM/G/1型Markov過程を解くためのもう1つの方法である固有値法を説明している．これらの過程の定常確率に対する連立方程式を，確率母関数に変換して解くと，解が分数式となり，分子にいくつかの未定係数があり，分母が既知の関数の式になることが多い．このとき，複素平面上の単位円の内部にある分母の零点から分子の係数を決定する．分母の零点の数は，Rouchéの定理等を適用して見つける．本章では，このような手順の説明に続いて，零点が重複する場合の扱い方，対応する分子の係数に関する連立方程式の線形独立性，零点とMarkov連鎖の再帰性との関連等が論じられる．但し，実際に分母の零点を求める方法は示されていない．

8. An Introduction to Numerical Transform Inversion and Its Application to Probability Models (J. Abate, G. L. Choudhury, and W. Whitt, 67ページ)

従来の確率過程の解析では，離散的確率変数の分布はz変換し，連続的確率変数の分布はLaplace変換して，それらの変換量を求めることで，問題が解けたとされた．しかし，変換量からは確率分布は分からないので（Laplaceのカーテン），逆変換が必要である．数値計算による逆変換法を最近大きく発展させたのは，本章の著者のWhittと彼のグループである．本章では，待ち行列の解析に現れる多くの実例とともに，z変換及びLaplace変換の逆変換法が説明されている．閉じた待ち行列網の規格化定数を多次元z変換によって求め，その逆変換を行う方法は独創的である．

9. Optimal Control of Markov Chains (S. Stidham, Jr., 39ページ)

本章は，Markov決定過程によるシステムの最適制御の方法を述べている．標準的な理論と理論的応用が，アルゴリズムとともに示されているが，数値例とか，数値計算上の注意には言及がない．

10. On Numerical Computations of Some Discrete-Time Queues (M. L. Chaudhry, 44ページ)

本章は，離散時間待ち行列であるGeom/G/1とGI/G/1モデルについて，待ち行列の長さと待ち時間の分布を実際に計算している．これらの分布は，まず解析的にz変換として得られ，数値的に求められるその分母の零点を用いた部分分数展開から，逆変換により得られる．複素平面上で，分母の零点の位置が図示されている．

11. The Product Form Tool for Queueing Networks (N. M. van Dijk and W. K. Grassmann, 35ページ)

本章は，いわゆるJackson型の積形式解をもつ待ち行列網への入門的記述である．待ち行列網が積形式解をもつための条件が，局所平衡方程式により説明され，有限容量待ち行列網ではこの条件が満たされないことが示される．積形式解が厳密には存在しない場合でも，近似や上界として使える例が挙げられている．閉じた待ち行列網の数値計算に有効な平均値解析（mean value analysis, MVA）等の数値計算アルゴリズムの説明はない．

12. Techniques for System Dependability Evaluation (J. K. Muppala, R. M. Fricks, and K. S. Trivedi, 35ページ)

本章では，複数の構成要素から成るシステムの信頼性と利用可能性に関する性能指標を評価するための理論モデルが，信頼性理論とMarkov再生過程の理論を基にして，構築されている．更に，それを相互接続されたLAN網の信頼性評価へ応用した例が示されている．

本書の各章は，まれに相互参照があるものの，ほぼ独立したサーベイになっている．実際の数値計算に直ちに使えるアルゴリズムや参考になる実例を挙げている度合いは，著者の個性を反映して，各章で異なる．各章末には，豊富な参考文献が挙げられており，それぞれの方法を更に詳しく知りたい読者にとって，非常に役立つ．

本書は，応用確率論の分野，特に待ち行列理論や信頼性理論の研究者，及び少し進んだ大学院生の参考書として推薦できる．予備知識として，Markov過程，待ち行列理論，数値計算法の一般的知識と，システムの性能解析の経験があれば，本書の内容と価値がよく理解できると思われる．

昨今は，システムの性能評価を安易にモンテカルロシミュレーションで行なった論文が多い．その理由は，現実に近いシステムの動作は複雑であり，解析または数値計算は，その基になる定式化ができないか，できるとしても多くの精密な考察を要するので，研究成果をタイムリーに発表できないからである．一方，シミュレーションは，グラフィックスを利用したモデル入力と結果の表示や，実行制御と統計処理の自動化を備えたソフトウェアパッケージが多く開発されて，計算機能力の向上とともに，ますます使い易くなっている．しかしながら，本書に示されたような堅実な方法論の研究の積み重ねが，科学技術を推進する基礎であることを銘記すべきである．（筑波大学　高木英明）