階層構造を有する成長現象の微分方程式モデル
—家庭用ゲーム機の販売実績に基づく分析例—

中桐　裕子
（慶應義塾大学理工学部管理工学科　現所属・同大学院理工学研究科開放環境科学専攻）
指導教員　栗田　治　助教授

1．はじめに

私たちの身の回りでは，携帯電話が爆発的に普及したり，新しい言葉が広がるなど，様々な成長現象が見られる．本研究はこのような『成長現象』を，構造的な数理モデルで記述することを目的としている．

本稿では，『定数項付指数曲線に段階的成長の考えを取り入れたモデル（本稿中ではドーナツ型モデルと命名する）』に注目した．このモデルでは，ある現象が複数の段階を経てデータとして現れるのだと仮定することで，従来のモデルよりも，ある種の現実に対して当てはまりが良くなる．例えば文献［1］では，宅地化を経て市街化面積が広がるという仮定から，実際の市街化が進行する様子を上手く記述するモデルが作られた．本研究では「ドーナツ型モデル」の特徴をまとめ，現実のゲーム機売上データに当てはめて，モデルの有効性を確認する．更にモデルの応用方法を提案したい．

2．基本となる概念とモデル

定数項付指数成長とは，ある状態の個体数 $y(t)$ の成長速度が，その状態になっていない個体数に比例するような成長を指し，式(1)のような微分方程式で表せる：

$$\frac{dy(t)}{dt}=b\{S-y(t)\} \quad \text{ただし，}S\text{は個体数の上限．} \tag{1}$$

本研究では，段階的に定数項付指数成長が起こると仮定したモデルを扱う．このモデルでは，どの段階の状態も前段階の成長が発生した後に発生するという前提を置く．更にその成長速度は，1段階前の状態に達してはいるがその状態にはなっていない個体数に比例するものとする．i 段階目の状態の個体数を $y_i(t)$ と置き，この成長を微分方程式で表すと式(2)のようになる．今後このモデルを「ドーナツ型モデル」と呼ぶ．

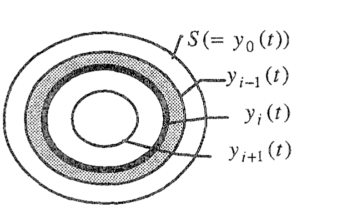

図1　ドーナツ型モデル概念図．

微分方程式(2)の一般解は本研究中で初めて(3)の通りに算出された：

$$\frac{dy_i(t)}{dt}=b_i\{y_{i-1}(t)-y_i(t)\} \qquad (i=0,1,2\cdots), \tag{2}$$

$$y_n(t)=S-\sum_{u=1}^{n}\{\frac{C_u\prod_{m=u+1}^{n}b_m}{\prod_{l=u+1}^{n}(b_l-b_u)}\times Exp(-b_u t)\}. \tag{3}$$

3．ゲーム機本体売上への当てはめ

本研究では，ゲーム機を購入する過程で，まずゲーム機本体の購入希望者が増加して，希望者の中から本体の購入者が現れるという仮説を設けた．更にその中からゲームソフト購入者が出現・増加するという段階的成長を仮定したモデルを作成した．このとき式(2)にならって方程式を立てると次の通り：

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1(t)}{dt}=b_1(S-y_1(t)), & (4)\\[2mm] \dfrac{dy_2(t)}{dt}=b_2(y_1(t)-y_2(t)), & (5)\\[2mm] \dfrac{dy_3(t)}{dt}=b_3(N\cdot y_2(t)-y_3(t)). & (6)\end{cases}$$

S ：ハード市場の規模，$y_1(t)$ ：ハード購入希望者数，
$y_2(t)$ ：ハード売上台数，$y_3(t)$ ：ソフト売上数，
$N\cdot y_2(t)$ ：ソフト購入希望者数（$N\leq 1$）．

当てはめ結果

・ゲーム機本体の売上　…　発売直後の売上推移の記述については，ドーナツ型モデルの有効性がはっきり示された（図2）．図からは，**定数項付指数曲線やロジスティック曲線では，発売直後の売上の急な伸びや，前半と後半で売上の伸びが異なる点が記述できない**ことが読み取れる．また，発売からしばらく経った後の売上推移は，ドーナツ型モデルを使わずとも，狭義凹関数である定数項付指数曲線で説明が可能であった．これはグラフの概形からも予想される（図3）．

・ゲームソフトの売上　…　これには仮定した式（6）が上手く当てはまらなかった．ハードがある程度普及しないとソフトの売上が伸びないという制約があるので，ハード発売直後には顕著な増加傾向が出るまで時間を要する．そのためかえってロジスティック曲線の

方が良く当てはまる．ハード普及後は，ソフトの多くが発売直後に購入されるために，その売上推移には段階的成長を仮定しない定数項付指数曲線が当てはまる．

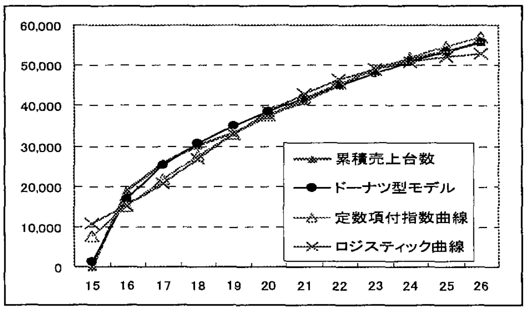

図2　発売直後の本体の売上当てはめ結果.
（ネオジオポケットカラー本体売上）

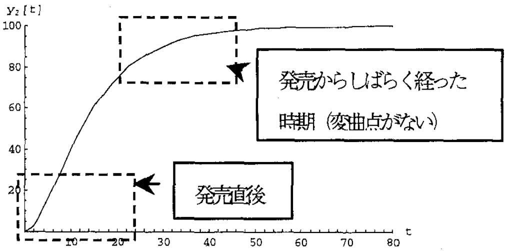

図3　ドーナツモデル2段階目のグラフ概形.

各成長曲線が記述できる局面は表1のようになる．

表1 成長曲線の使い分け

ドーナツモデル	一段階目≪定数項付指数曲線≫	·容易に実行可能な物事の成長 ·発生から時間が経った現象の成長
	二段階目 y2(t)	発生直後の現象の成長
	三段階目 y3(t)	⇒式が複雑なので適当な現象を選ばないとあてはまりが悪い
ロジスティック曲線		発生直後の現象に付随する物事の成長

4．「ドーナツ型モデル」の応用例

次のような仮定をたてて，キャンペーン時に売上が伸びる様子を説明することを試みる：

時刻Tからのキャンペーンによって，最終的な売上S_0が，瞬間的にS_0+Scに増える．Scは，キャンペーン効果を表す指標とみなせる．但し，それ以外の時の売上推移はドーナツ型モデルで説明可能であるとする．

対応する微分方程式は（4），（5）式とほぼ同型である．但し仮定に従い，Sを下のような$S(t)$に変更する：

$$\begin{array}{ll} 0 \le t \le T & S(t)=S_0\,, \\ T \le t & S(t)=S_0+Sc\,. \end{array}$$

方程式の解は，T, Scだけを追加した簡便な形となる．図4は，あるゲーム機の売上が値下げキャンペーンによって増加した様子に，上のモデルを当てはめたものである．

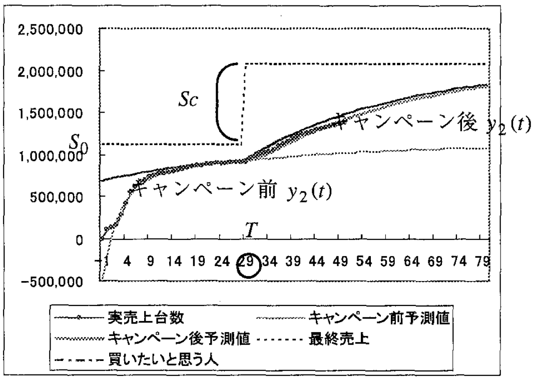

図4　ドリームキャスト値下げキャンペーン時の実データの当てはめ.

実際の売上増加の様子に良く当てはまったことから，他の現象（過去に流行した服装の再流行など）への当てはめも可能であると考えられる．上手く当てはまれば，その出来事の影響力や将来の状態について一つの手がかりが得られる．従前の成長曲線の当てはまりが悪い現象の中には，成長を促進した出来事を見つけ出すと，このモデルで説明が可能になる例もあるだろう．

5．今後の課題

今後の課題としては，適当な現象のデータにドーナツモデルの3段階目以降の曲線を当てはめて，モデルの有効性を確かめることが挙げられる．とはいえ，適当なデータを入手するにはしばしば困難が伴う．その場合，各段階の発生時間を変化させて，これと他の曲線との適合を考えるなど別の考察方法が提案できる．また段階的成長を前提として，他の成長法則を適用すると多様なモデルが作られ，様々な検討ができる．

今回取り上げたゲーム機の例以外にも，ドーナツモデルが有効でありそうな現象は多く考えられる．例えば，公共施設数が建設予定→建設中という2段階の過程を経て増加する様子などにモデルを適用することには興味をひかれるところである．成長現象を微分方程式モデルで扱っている過去の研究例としては，疫病の流行を例に再起性を持つ現象を扱う理論や開戦時の国民の態度変容を記述するモデルなど枚挙に暇がない(文献[2])．これらの発想をドーナツ型モデルに組み込み，モデルを更に発展させることも可能であると思われる．

6．参考文献

[1] 古藤浩（1990）：区画整理事業地区の市街化曲線に関する研究．第26回日本都市計画学会学術研究論文集，pp.541-546
[2] 佐藤総夫（1984）：自然の数理と社会の数理 一微分方程式で解析する Ⅰ．日本評論社