Sojourn Time in a Queue with Clustered Periodic Arrivals

井上　大

(京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻　現所属・東京海上火災保険㈱)

指導教官　滝根哲哉 助教授

1.　はじめに

ATM 網では，様々な情報は固定長のセルに分割された後，送信される．このため，上位層における情報の単位である PDU (Protocol Data Unit；以下，メッセージと呼ぶ) が間隔をあけて発生する場合でも，ATM 網においては，メッセージに対応する一連のセル (以下，クラスタと呼ぶ) が次々と発生する．本修士論文では，特にメッセージが周期的に発生する場合について注目する．これは，ATM 網における CBR (Constant Bit Rate) トラヒックに対応しており，CBR MPEG はその代表例である．

上記のような背景を踏まえ，2 章において，(一定個数のセルから成る) 固定長のメッセージを周期的に発生する有限個の独立，同質な呼源を収容する多重化装置のモデル化を行う．このモデルは，$\sum D/D/1$ 待ち行列，すなわち，各メッセージが 1 つのセルから成る場合の明らかな一般化である．メッセージをセル単位でなく連続量として見たモデル (fluid モデル) についての解析は既に行われているが[1]，このモデルに対する考察はなされていなかった．3 章では，周期的なクラスタ到着を収容する多重化装置における，メッセージ内の個々のセルの系内滞在時間の定常確率分布関数に対する解析の概略を示すとともに，解析結果を用いた数値結果を与える．

4 章では，同じメッセージに含まれる隣合うセルの系内滞在時間の差の結合確率母関数の導出を行うと共に，この結果を用いて平均待ち時間の陽表現を導く．さらに，到着過程が集団到着や等間隔到着の場合と比較を行う．

2.　数学モデル

周期的なクラスタ到着を生成する独立，同質な $(K+1)$ 個の呼源を収容する FIFO 単一サーバ待ち行列を考える．各呼源は周期 T 毎にメッセージを 1 つ生成する．各メッセージは $(M+1)$ 個の固定長のセルに分解されるものとし，各セルのサービス時間は一定 $(=1)$ とする．1 つのメッセージから生成されるセルは待ち行列に連続的に間隔 1 で到着する．システムが安定であるための必要十分条件は $(K+1)(M+1) \leq T$ であり，以下，これを仮定する．

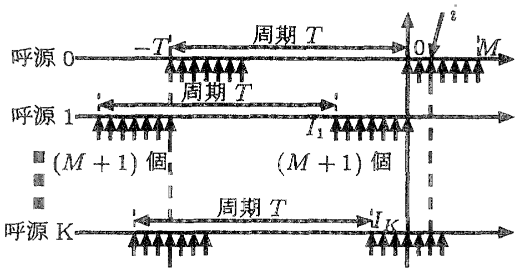

図 1　数学モデル

時刻 $-2T$ においてシステムは空であり，呼源 0 のメッセージは時刻 $t=-T, 0, T, \cdots$ に発生すると仮定する．さらに呼源 $k\,(i=1, \cdots, K)$ のメッセージは $t=\tau_k+nT\ (n=-2, -1, 0, 1, \cdots)$ に到着するものとし，τ_k は互いに独立な区間 $(0, T]$ の一様分布に従うものとする (図 1)．

3.　系内滞在時間分布

U_t を時刻 t における系内残余仕事量，$A(x, y]$ を時間間隔 $(x, y]$ に呼源 0 以外の K 個の呼源から到着するセル数としたとき，次式が成立する．

$$U_t = \max_{0 \leq u \leq t+2T} (A(t-u, t]-u), \quad \forall t > -2T.$$

これを用いて次の命題が導かれる．

命題 1

時刻 $-2T$ でシステムが空，すなわち $U_{-2T}=0$ の場合，U_t は時刻 $-T$ 以降は周期的に変動する．

$$U_t = U_{t+T}, \quad \forall t \geq -T.$$

また，$S_i\,(i=0, \cdots, M)$ を i 番目のセルの滞在時間とする．サービスが FIFO で行われるため，$S_i=U_i,\ i=0, 1, \cdots, M$ が導かれる．

$B(x, y]$ を時間 $(x, y]$ 内で発生するメッセージの数，

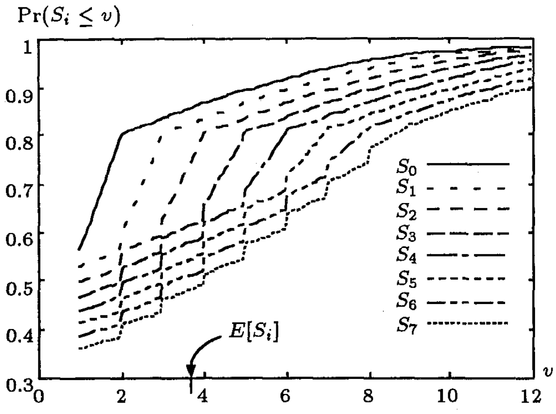

図2　確率分布関数 $\Pr(Q_i \le v)$

$G(x, y]$ を時間 $(x, y]$ 内で，最初に到着するメッセージの発生時刻と時刻 x との差と定義する．

定理 1

$$U_i = \max\Big\{G(i-M, 0], \max_{0 \le u \le T-M}((M+1)B(i-M-u, i-M]-u)\Big\} + \sum_{k=1}^{M} kB(i-k, i-k+1] + i - M + 1.$$

メッセージの到着パターンによって場合分けを行い，定理1と投票定理[2]を巧みに用いることで，分布関数 $\Pr(S_i \le v)$ を導出し，これが $\sum D/D/1$ における滞在時間分布の（かなり複雑な）線形結合で与えられることを示した（紙面の都合上，結果は省略）．なお $\Pr(S_0 \le v)$ は呼源数が K のときの系内残余仕事量の確率分布に等しい．

図2は得られた結果に基づき $\Pr(S_i \le v)$ $(i=0, 1, \cdots, M)$ を数値計算した結果を示している．図2から確率分布関数が不連続点をもつことがわかるが，これは busy period を開始するメッセージに含まれる全てのセルの系内滞在時間が整数値をとるためである．また，他の数値実験を通して，得られた解析結果が数値的に安定していることも確認した．

4. 平均待ち時間

同じメッセージに含まれる i 番目と $i-1$ 番目のセルの系内滞在時間の差を Δ_i と定義すると，次式が成立する．

$$E[z^{\Delta_i}] = \left(\frac{(M+1)z + (T-M-1)}{T}\right)^K, \qquad (1)$$

なお，$E[z_1^{\Delta_1} \cdots z_M^{\Delta_M}]$ も同様に求めることができる．この結果を用いて各セルの平均待ち時間を導出する．

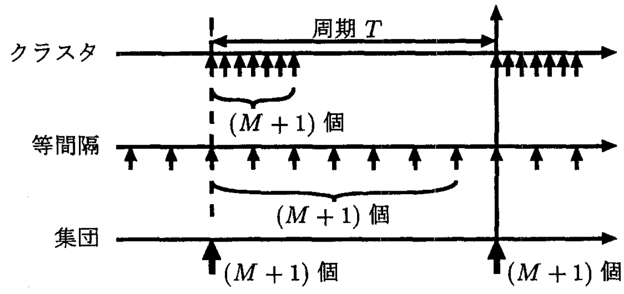

図3　セルの様々な到着過程

呼源0の $i+1$ 番目 $(i=0, 1, \cdots, M)$ のセルの待ち時間を $W_i(\equiv S_i - 1)$, $i=0, 1, \cdots, M$ と定義し，$(i+1)$ 番目のセルの平均待ち時間を $E[W_i]$，セル全体での平均待ち時間を $E[W]$ と定義すると，(1)より次式を得る．

$$E[W] = \frac{1}{M+1}\sum_{i=0}^{M} E[W_i] = E[W_0] + \frac{KM(M+1)}{2T}.$$

本文では，$E[W_0]$ が呼源数が一つ少ないシステムの平均系内残余仕事量に等しいこと，ならびに平均系内残余仕事量 $E[U]$ が

$$E[U] = \frac{(K+1)(M+1)}{T}\left(E[W] + \frac{1}{2}\right).$$

で与えられることを示した．これらを用いて呼源数に関する再帰式を構築すると，次の定理を得る．

定理 2

$K \ge 1$ に対して，

$$E[W_i] = E[W] + \frac{K(M+1)}{T}\left(i - \frac{M}{2}\right),$$

$$E[W] = \frac{M+1}{2}\sum_{j=0}^{K-1}\frac{K!}{j!}\left(\frac{M+1}{T}\right)^{K-j}.$$

また，図3のように，等間隔到着の場合と集団到着の場合を考え，それぞれの平均待ち時間を $E[W^D]$, $E[W^B]$ と定義すると次式が得られる．

$$E[W^D] = \frac{E[W]}{M+1}, \quad E[W^B] = E[W] + \frac{M}{2}.$$

よって，セルの生成の過程をクラスタでなく等間隔にすれば，平均待ち時間は $1/(M+1)$ 倍になることが分かる．

参考文献

[1] I. Cidon et al. (1995) Analysis of a statistical multiplexer with generalized periodic sources, *QUESTA*, **20**, 139-169.

[2] P. Humblet, et al. (1993) Ballot theorems applied to the transient analysis of nD/D 1 queues, *IEEE/ACM Trans. Net.*, **1**, 81-95.