ISMP2000 ルポ

Pulleyblank博士による組合せ最適化TOP 10 LIST

田村　明久（京都大学）

ISMP2000 (17th International Symposium on Mathematical Programming) が2000年8月7日から11日までアトランタのGeorgia Institute of Technologyで開催された．参加者は約930名，登壇発表は一人当り一件なので講演数は900前後であろう．パラレルセッションでも興味深い講演が多かったが，特にplenaryあるいはsemi-plenary talkは，内容もさることながら講演者の話術も素晴らしく，面白いものが多かった．一人でISMPすべてを網羅するルポは到底書けないので，ここでは焦点を絞りTHE COMBINATORIAL OPTIMIZATION TOP 10 LISTと題されたW.R. Pulleyblank(IBM Research)による招待講演の内容を紹介したい．講演内容をできる限り忠実に解説するつもりだが，私の解釈が入ってしまうところもある．その点は文責は私にあるということでお許し願いたい．またPulleyblankの挙げた文献以外にも私なりに関連文献を追加してみたので参考にされたい．TOP 10 LISTと参考文献を比較しながら読めるように，参考文献はリストの順に沿うようにした．

Pulleyblankはこのリストはあくまで私見であることを強調していた．それぞれの人がそれぞれのTOP 10 LISTを持っているだろうから，以下を読む前に自分でTOP 10 LISTを作って比較をしても面白いだろう．

1. Euler's Theorem 1736

Königsberg にかかる7つの橋をちょうど一度づつ通り元に戻れるかという有名な問題に対する Euler [1] の結果が最初に選ばれた．与えられたグラフにEuler閉路（各辺をちょうど一度づつ通り元の頂点に戻る閉路）が存在するための必要十分条件は各頂点の次数（接続する辺数）が偶数であるという結果は，これ自体重要である．例えば，郵便配達人問題（辺に重みを持つグラフに対して，すべての辺を通る最短閉路を求める）に対する解法では，この特徴付けが利用されている．これが選ばれたもう一つの理由は，この結果が組合せ最適化の始まりだろうということもある．

2. Max-Flow Min-Cut Theorem 1956

最大流最小カット定理は Ford–Fulkerson [2] によって最初に示された．この定理はネットワークフロー問題の根幹を成すもので，現在までの最大流問題，最小費用流問題，劣モジュラ流問題などのネットワークフロー問題に対するアルゴリズムや応用についての膨大な研究を考慮すれば選ばれて当然と思われる．多くの関連著書もあるのでこれ以上の解説も必要ないだろう．

3. Nonbipartite Matching and Polyhedral Characterization 1965

一般のグラフ上の最大（重み）マッチング問題に対する多項式時間アルゴリズムはEdmonds [3, 4] によって最初に提案された．2部グラフに対する増加道法を一般グラフに拡張する際の奇頂点集合を縮約するというアイデアはブレークスルーであり，さらには最大マッチングの奇頂点集合被覆による最大最小定理やマッチング多面体の不等式表現のアルゴリズム的証明も与えている．多面体的組合せ論 (polyhedral combinatorics) という分野の源流でもある．このアルゴリズムは先に触れた郵便配達人問題でも利用されている．またマトロイドパリティやクローフリーグラフ上の安定集合問題などへと結果は拡張されている．参考図書としては [5] を挙げたい．

入力サイズの多項式時間で終了するアルゴリズムが良いものという今では常識となったパラダイムを築いたことへのEdmondsの貢献は大きい．これも当然のランクインだろう．Pulleyblankは師匠Edmondsの声帯模写を披露したが，非常に似ていて受けていた．

4. Matroid Intersection Theorem 1970

効率的に解ける問題の多くはマトロイド構造を持つと言われている．マトロイド理論とその周辺を代表してのランクインだろう．

たむら　あきひさ　京都大学数理解析研究所
〒606-8502 京都市左京区北白川追分町

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

共通の有限台集合 V を持つ二つのマトロイド $M_1 = (V, \mathcal{I}_1, \rho_1)$ と $M_2 = (V, \mathcal{I}_2, \rho_2)$ （$\mathcal{I}_j$ は独立集合族，ρ_j はランク関数）に対して，最大共通独立集合を求める問題は重要であり，2部グラフのマッチング問題などを含む．Edmonds [6] は，マトロイド交叉定理 (Matroid Intersection Theorem) として知られる以下の最大最小定理（双対定理）を与えた．

$$\begin{aligned}&\max\{|I| : I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\}\\&= \min\{\rho_1(X) + \rho_2(V \setminus X) : X \subseteq V\}\end{aligned}$$

この他にも共通独立集合族全体の凸包として定義される多面体が M_1, M_2 のランク不等式と非負制約で記述できるという多面体的組合せ論に関する結果も示した．現在では，これらの結果は付値マトロイドなどに拡張されている．参考図書としては [7] を挙げたい．

幾つかの最大最小定理が現われたが，これらは「線形計画の双対定理＋整数性」という構図となる．この構図により組合せ最適化問題に取り組む分野が多面体的組合せ論である．

5. Cook's Theorem 1971

（判定）問題の難しさを示す指標の一つであるＮＰ完全性は，組合せ最適化においても重要な概念の一つである．Cook [8] は，ＮＰ完全問題の存在性，すなわちCookの定理として知られる「充足可能性問題がＮＰ完全である」を証明した．ある問題がＮＰ完全であることを示すのは，多項式時間還元の推移性を用いれば良いことを経験した読者も多いだろう．この論法の前提であるＮＰ完全問題の存在性を示したCookの功績は非常に大きい．文句なしのランクインだろう．またCookの結果に続き，重要な組合せ最適化問題の幾つかがNP完全であることを示したKarp(1972) [9] の貢献も無視できない．

6. Dantzig-Fulkerson-Johnson's Solution of 49 City Problem 1954

「49都市巡回セールスマン問題（TSP）が解かれる」が堂々のランクインである．Dantzig-Fulkerson-Johnson[10] による結果である．「なぜ」と驚かれる方も多いだろう（私も最初は驚いた）．今では49都市はtoy problemであるが1954年当時は大規模であった．実際文献のタイトルにもlarge-scaleとある．当時としては大規模なTSPが解けることを実証したことは大きな貢献である．また後に切除平面法とよばれる解法の源であることも重要である．Dantzigの単体法は，基底という離散的な対象をたどり解を求めるという観点から組合せ的な解法とみなせると私は思う．それも考慮してのランクインか．49都市の成功から始まり [11] の13,509都市問題が解けたことにつながるとPulleyblankは説明していた．ちなみに，[11] の著者はISMP2000においてBeale-Orchard Hays賞 (computational mathematical programmingに関する成果に与えられる) を受賞した．

将来誰かがTOP 10 LISTを作るとき，13,509都市はtoy problemだからと言われるようになるのだろうか．

Pulleyblankは「私のリストなので好きなようにさせてもらう」と6番目のエントリーを二つにした．

6. Held-Karp's Subgradient Relaxation of TSP 1970,1971

グラフ $G = (V, E)$ の各辺 $e \in E$ の長さを c_e としたとき，TSPは

$$\begin{aligned}\text{min.} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e & & \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2 & \forall i \in V & \quad (1)\\ & \sum_{e \in \delta(S)} x_i \geq 2 & \emptyset \neq \forall S \subset V & \quad (2)\\ & x_e \in \{0, 1\} & \forall e \in E &\end{aligned}$$

と定式化できる．ここで $\delta(S)$ は頂点集合 S とそれ以外の頂点を結ぶ辺全体を意味する．Held-Karp [12, 13] は制約 (1) を一つの頂点に関する式を残してラグランジュ緩和（1木緩和法）することでTSPに対する良い下界値を得て，これを分枝限定法に組み込み64都市問題を解いた．普通なら，(2) 式を緩和しマッチング問題に落すところを，(1) を緩和するというアイデアと分枝限定法の威力を周知させたことによるランクインである．

7. Lin-Kernighan Algorithm 1973

Lin-Kernighan [14] によるTSPに対する発見的解法は30年近く経った現在でもこれに勝るものはないほど強力なものである．これだけでランクインの理由にもなるが，現在盛んに研究され実用化されているメタ解法の元祖であることがもう一つの理由である．パソコンによるデモも披露された．

確かこのあたりでだと思うが，会場で携帯電話の着信音が響いた．どこにでも非常識な人がいるものだが，Pulleyblankは「ちょうどこのあたりでファンファーレが欲しかった」と切り返した．ユーモアセンスも抜群だ．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

TSP関係で三つがランクインしたが，楽しく読めるTSPの著書として[15]を推薦する．

8. Optimization = Separation 1980,1981

楕円体法の組合せ最適化問題への応用としてKarp-Papadimitriou [16]，Grötschel-Lovász-Schrijver [17]とPadberg-Rao [18]が選ばれた．与えられた多面体（不等式表現されているとは限らない）と1点に対して，この点が多面体に含まれるかを判定し，含まれない場合はそれらを分離する超平面を求める問題を分離問題という．Khachiyanの楕円体法を用いることで，多面体上の一次関数の最適化と分離問題が多項式時間で還元しあえる（一方が多項式時間で解ければ他方も多項式時間で解ける）ことが示され，この意味で「最適化＝分離」なのである．幾つかの組合せ最適化問題に対しては，解全体の凸包の不等式表現（そのサイズ自体は元問題の入力サイズの多項式でおさえられるとは限らない）が知られていて，この凸包に対する分離問題が入力サイズに関する多項式時間で解けるならば，元の最適化問題も多項式時間で解けることになる．この枠組で，[17]は劣モジュラ関数最小化問題やパーフェクトグラフ上の最大重み安定集合問題などに対する多項式時間解法を与えた．

こう言うとロシアの研究者は怒るそうだが，楕円体法はあくまで理論的な解法であり実用的ではないのが現在の我々の常識だろう．近年では，パーフェクトグラフ上の最大重み安定集合問題は，半正定値計画（SDP）に対する内点法を用いれば多項式時間で解け，実用性も高い．また，昨年には劣モジュラ関数最小化問題に対する異なる二つの組合せ的多項式時間解法がほぼ同時に提案された．劣モジュラ関数最小化については本誌45巻3月号の藤重の解説を読んで頂きたい．

9. Shannon Capacity of the Pentagon is $\sqrt{5}$ 1979

Lovász [19]は，5辺からなる長さ5の閉路（すなわち5角形）のShannon capacityが$\sqrt{5}$であることを証明した．この論文での証明方法から，SDP緩和を用いたパーフェクトグラフの特徴付けやパーフェクトグラフ上での最大重み安定集合問題に対する多項式時間解法などの結果に代表されるSDPと組合せ最適化との関連分野が発展した．リスト8, 9番の結果は[20]にまとめられている．

この分野の研究は必ずランクインするとは思っていたが，[19]が選ばれたときは思っていたよりも有名なのだと驚いたが，この分野の創始として納得した．SDPについては本誌45巻3月号の藤沢の解説，同巻7月号の小島の講座，Shannon capacityや関連結果については同巻8–9月号の藤江の講座を参照されたい．

10. .878 Approximation Algorithm for the Max Cut Problem 1994

各辺$e \in E$に重みw_eが与えられたグラフ$G = (V, E)$に対して，頂点集合Sとそれ以外の頂点を結ぶ辺の重みの総和$\sum_{e\in\delta(S)} w_e$を最大化する$S \subseteq V$を求める問題を最大カット問題（MAX CUT）という．この問題はＮＰ困難に属し，近似アルゴリズムの研究対象となる．Goemans-Williamson [21, 22]はMAX CUTに対するSDPを用いた0.878近似アルゴリズムを提案した．SDPの新たな応用分野を示したことは大きなブレークスルーとなった．彼らの研究以後，SDPを用いた優れた近似アルゴリズムが多数提案されている．彼らはこの研究によってISMP2000において，Fulkerson賞（discrete mathematicsに関する成果に与えられる）を受賞した．Goemans-Williamsonの結果については本誌45巻3月号の松井の解説，それ以降の成果については同巻10月号の浅野の講座を参照されたい．

おわりに

選者がPulleyblankということだろうか，多面体的組合せ論関連とTSP関連の成果が多いようにも思うが，選んだものは上記のどれかと関連しているという意味で皆さんのTOP 10 LISTともそれほどずれていないのではないだろうか．若い皆さんにはこのTOP 10 LISTの内容は理解していて欲しい．

内容もさることながらPulleyblankの話術にはいつもながら敬服してしまう．壇上に上がった時点で聴衆の視線を一手に集めてしまうような存在感がある．学生時代に俳優のアルバイトをしていたくらいだから聴衆を魅了するのはお手のものなのだろうか．カメラマンの女性も他の招待講演者よりもかなり多くシャッターを切っていた（最後の招待講演でフィルムが余ったていたためかも知れないが理由は不明）．他の招待講演者もそうだが一流の人は話術も一流と関心するばかりだった．

謝辞　既知のことばかりとメモも取らずに聴いた講演の解説を書いたため，初稿には色々と間違いがありました．室田一雄，松井知己，久保幹雄，池辺淑子，藤江哲也の諸氏の貴重なアドバイスにより講演内容と講演者の

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

意図をより正確に伝えることができました．深く感謝します．

参考文献

[1] Euler, L.: Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae* **8** (1736), 128–140.

[2] Ford, J. R. Jr. and Fulkerson, D. R.: Maximal flow through a network, *Canad. J. Math.* **8** (1956), 399–404.

[3] Edmonds, J.: Paths, trees, and flowers, *Canad. J. Math.* **17** (1965), 449–467.

[4] Edmonds, J.: Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices, *J. Res. Mat. Bur. Standards Sect. B.* **69B** (1965), 125–130.

[5] Lovász, L. and Plummer, M. D.: *Matching Theory*, North-Holland, 1986.

[6] Edmonds, J.: Submodular functions, matroids, and certain polyhedra, *Combinatorial Structures and Their Applications*, (R. Guy, H. Hanani, N. Sauer, and J. Schönheim, eds.), Gordon and Breach, 1970, 69–87.

[7] Murota, K.: *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer, 2000.

[8] Cook, S. A.: The complexity of theorem-proving procedures, *Proc. of 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ACM, 1971, 151–158.

[9] Karp, R. M.: Reducibility among combinatorial problems, *Complexity of Computer Computations*, (R.E. Miller and J.W. Thatcher eds.), Plenum Press, 1972, 85–103.

[10] Dantzig, G., Fulkerson, R. and Johnson, S.: Solution of a large-scale traveling-salesman problem, *J. Operations Res. Soc. Amer.* **2** (1954), 393–410.

[11] Applegate, D., Bixby, R., Chvátal, V. and Cook, W.: On the solution of traveling salesman problems, *Proc. of the International Congress of Mathematicians*, Doc. Math, 1998, 645–656.

[12] Held, M. and Karp, R. M.: The traveling-salesman problem and mimimum spanning trees, *Operations Res.* **18** (1970), 1138–1162.

[13] Held, M. and Karp, R. M.: The traveling-salesman problem and minimum spanning trees, Part II, *Math. Programming* **1** (1971), 6–25.

[14] Lin, S. and Kernighan, B. W.: An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem, *Operations Res.* **21** (1973), 498–516.

[15] 山本芳嗣, 久保幹雄: 巡回セールスマン問題への招待, 朝倉書店, 1997.

[16] Karp, R. M. and Papadimitriou, C. H.: On linear characterizations of combinatorial optimization problems, *Proc. of 21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE, 1980, 1–9.

[17] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A.: The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization, *Combinatorica* **1** (1981), 169–197.

[18] Padberg M. W. and Rao M. R.: The Russian method for linear programming III: Bounded integer programming, Research Report 81-39, New York University, Graduate School of Business Administration, 1981.

[19] Lovász, L.: On the Shannon capacity of a graph, *IEEE Trans. Inform. Theory* **25** (1979), 1–7.

[20] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A.: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer, 1988.

[21] Goemans, M. X. and Williamson, D. P.: .878-approximation algorithms for MAX CUT and MAX 2SAT, *Proc. of 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ACM, 1994, 422–431.

[22] Goemans, M. X. and Williamson, D. P.: Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming, *J. Assoc. Comput. Mach.* **42** (1995), 1115–1145.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．