講座

半正定値計画とその応用
第4回　半正定値計画を用いた近似アルゴリズム

浅野　孝夫

1. はじめに

今回はこの講座の最後で「半正定値計画を用いた近似アルゴリズム」について述べる．主として最大化問題を扱うが，最小化問題も同様に扱える．多項式時間で最適解を求めるのが困難な最大化問題に対して，近似解を求めるアルゴリズムのうちで，いつも最適解の α 倍以上の解を入力サイズの多項式時間で求めるようなアルゴリズムをα-**近似アルゴリズム**という．最大化問題に対する $\alpha \leq 1$ を**近似率**あるいは**精度保証**という．近似率 α を限りなく1に近づけることができるとき，そのようなα-近似アルゴリズムを**PTAS**という．すなわち，任意の正数 $\epsilon \leq 1$ に対して $\alpha = 1 - \epsilon$ とできる入力サイズ n の多項式時間アルゴリズムをPTASという．さらに，入力サイズ n と $\frac{1}{\epsilon}$ の多項式時間アルゴリズムを**FPTAS**という．問題によってはPTASが存在しないものも存在する．そのような問題においては，αが，ある値L以下ならばα-近似アルゴリズムが存在するが，ある値Uより大にするとNP-困難になることもある．この場合は，$L \leq U$であるが，理論的には$L = U$となるような値を求めたい．MAX 3SAT(後述)に関しては $L = U = 0.875$ と解決しているが，多くは未解決である．さらに，そのような定数L, Uが存在しない問題もある．

精度保証のある近似アルゴリズムの研究はGarey-Johnson [9] の本が出版される以前から研究されてきているが，最近近似アルゴリズムの理論の枠組みが統一化されるに従い，以前にもまして，急速に研究が進展している [2]．特に，Goemans-Williamson [11] のMAX CUT(最大カット問題)とMAX 2SATに対する半正定値計画 (以下 SDP と略記する) 緩和に基づく方法は，従来の近似アルゴリズムの設計解析手法の枠組みを越えて，近似アルゴリズムにおけるブレークスルーをもたらした斬新で画期的な手法として今日認識されている．それまで，MAX CUTに対しては0.5-近似のアルゴリズム，MAX 2SATに対しては0.75-近似アルゴリズムが最高性能のアルゴリズムであったが，彼らはSDP緩和法に基づいて，MAX CUTおよびMAX 2SATに対して0.87856-近似アルゴリズムを得ている．特に，MAX CUTに対しては多くの研究がなされたにもかかわらず，20数年近似率は0.5のままであったことを考えると，彼らのアルゴリズムが如何に画期的なことであったかがわかる．松井の本誌3月号の貴重な解説[20]からもこのあたりの状況が理解できるだろう．

これらのアルゴリズムが提案されて以来，SDP緩和法は近似アルゴリズムにおける極めて強力な道具として使われている．実際，グラフの最小点彩色 [17]，最大独立集合 [1], [14]，スケジューリング [21]，VLSIの最大消費電力評価 [4] などの問題に対する高性能近似アルゴリズムがSDP緩和に基づいて提案されている．なかでもMAX SATに関しては特別で，数多くの高性能近似アルゴリズムがSDP緩和に基づいて提案されている．そこで本稿では，MAX SATに関連する話題に焦点をあてて解説する．

2. MAX SATとは

SAT (3SAT)は計算量の理論でNP完全性が示された最初の問題としても有名であり，多くのテキストで取りあげられている．一方，MAX SAT (MAX 3SAT)は，最近の近似理論の枠組みで近似可能性に関してMAX SNP-完全とかAPX-完全と呼ばれるクラスに属し，その意味でも頻繁に議論されている代表的問題である [2]．また，DNAコンピュータなどの将来の計算機のモデルで，性能評価のベンチマーク問題としても取りあげられている．実用と関連しては，人工知能，VLSIの配線設計，線画解析等の論理システムにおいて，各種の要求される条件をブール変数等からなる論理式を用いてSATあるいはCSP(制約充足問題)で表

あさの　たかお　中央大学理工学部情報工学科
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27
email: asano@ise.chuo-u.ac.jp

現し，その解を求めてシステムを解析し評価するという手法がかなりの成功をおさめている．本節では，SAT および MAX SAT の定義を与え，それに対する従来の代表的手法を述べる．

2.1 SATの定義

$P(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\wedge(x_1\vee\bar{x}_3)$ のような形の論理式が与えられたとき，ブール変数 (この例では x_1,x_2,x_3) に 0,1 (1=真, 0=偽) を適当に割り当てて，充足可能である (1にできる) かどうかを判定する問題が **SAT**(satisfiability problem, **充足可能性問題**) である．変数 x に対して $\bar{x}$ はその否定で，$x=1$ ならば $\bar{x}=0$ ($x=0$ ならば $\bar{x}=1$) であり，x および $\bar{x}$ は総称して**リテラル**と呼ばれている．対象とする論理式は，$x\vee y\vee\cdots\vee z$ の形のいくつかの論理和が論理積でつながれたものとする．もちろん，**論理和** $x\vee y\vee\cdots\vee z$ は，リテラル $x,y,...,z$ のどれか1つでも1のときに満たされて値1をとり，**論理積** $x\wedge y\wedge\cdots\wedge z$ は，リテラル $x,y,...,z$ がすべて1のときのみ満たされて値1をとる．たとえば，

$P(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\wedge(x_1\vee\bar{x}_3)$

に対して，$x_1=1, x_2=x_3=0$ と割り当てると，

$x_1\vee x_2\vee x_3=1,\quad \bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3=1,\quad x_1\vee\bar{x}_3=1$

となるので，$P(1,0,0)=1$ である．

SATは最初に発見されたNP-完全問題である．上の例のように，論理和の形式で表現されたいくつかの式を論理積でつなげたものは，**論理積標準形**と呼ばれ，特に，入力の各論理和が k 個以下のリテラルで表現されるものを k**SAT** と呼ぶ．SATは，3SATに限定してもNP-完全であることが知られている．一方，2SATは $O(m+n)$ の計算量のアルゴリズムで解けることが知られている (m は論理和の数，n は変数の数)[5].

2.2 MAX SATの定義

MAX SAT(maximum satisfiability problem, **最大充足化問題**) は，充足可能性問題の最適化版ともいえるが，入力は論理和の集合 $\mathcal{C}$ と各論理和 $C\in\mathcal{C}$ に対する非負の重み $w(C)$ の対 $(\mathcal{C},w)$ で規定される．$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ を $\mathcal{C}$ の論理和に現れる変数の集合とする．すると，MAX SATは，各変数 $x_i\in X$ に対して，真偽割当をして満たされる (1となる) 論理和の重みの総和を最大にする問題である．たとえば，

$\mathcal{C}=\{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6\}$,

$C_1=x_1,\ C_2=x_2,\ C_3=\bar{x}_3,\ C_4=\bar{x}_1\vee x_2,$

$C_5=\bar{x}_2\vee x_3,\ C_6=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3,$

$w(C_1)=4,\ w(C_2)=2,\ w(C_3)=6,\ w(C_4)=8,$

$w(C_5)=2,\ w(C_6)=6$

が入力として与えられたとする ($X=\{x_1,x_2,x_3\}$). そこで，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)=(0,1,0)$ と割り当てると，C_2,C_3,C_4,C_6 が満たされて重みの和は22になり，これが最適解である．$\bar{x}_i=1-x_i$ であるので $C_j\in\mathcal{C}$ は

$$C_j(\boldsymbol{x})=1-\prod_{x_i\in X_j^+}(1-x_i)\prod_{x_i\in X_j^-}x_i \tag{1}$$

として $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ の関数と考えることができる．ここで X_j^+ は C_j に肯定形であらわれる変数の集合で X_j^- は否定形であらわれる変数の集合である．こうして，任意の真偽割当 $\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n$ に対し C_j は $C_j(\boldsymbol{x})=0$ または1となり，真偽割当 $\boldsymbol{x}$ の値は

$$F(\boldsymbol{x})=\sum_{C_j\in\mathcal{C}}w(C_j)C_j(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

と定義される．すなわち $\boldsymbol{x}$ によって満たされる $\mathcal{C}$ 内の論理和の重みの和が $\boldsymbol{x}$ の値である．こうしてMAX SAT は 値が最大となるような $\boldsymbol{x}$ を見つける問題となる．なお，MAX SAT の入力 $\mathcal{C}$ の各論理和が k 個以下のリテラルからなるときは，MAX SATは**MAX** k**SAT** と呼ばれている．MAX 2SAT も有名なNP-困難 (MAX-SNP 困難) 問題である [2].

2.3 MAX SAT に対する確率的方法

SDP に基づく MAX SAT の近似アルゴリズムを述べる前に，従来の近似アルゴリズムの代表的方法 (確率的方法) を概観する．上の例で説明しよう．各変数 x_i に対して p_i を x_i が真になる確率とする．すると，論理和 C_1 が満たされる確率は p_1 となる．同様に C_2,C_3,C_4,C_5,C_6 の満たされる確率はそれぞれ，

$$p_2,1-p_3,1-p_1(1-p_2),1-p_2(1-p_3),1-p_1p_2(1-p_3)$$

となる．このように，各変数に真になる確率を割り当てた $\boldsymbol{x}^p=(p_1,p_2,p_3)$ を**ランダム真偽割当**という．ランダム真偽割当 $\boldsymbol{x}^p$ によって論理和 $C_j\in\mathcal{C}$ が満たされる確率は $C_j(\boldsymbol{x}^p)=1-\prod_{x_i\in X_j^+}(1-p_i)\prod_{x_i\in X_j^-}p_i$ となり，ランダム真偽割当 $\boldsymbol{x}^p$ の期待値は $F(\boldsymbol{x}^p)=\sum_{C_j\in\mathcal{C}}w(C_j)C_j(\boldsymbol{x}^p)$ となる．期待値は，ある意味ですべての割当の重み付き平均であるので，それ以上の値をもつ割当が必ず存在する．そのような割当を見つける方法として**条件付き確率法**が知られている．

上の例で簡単のため各 p_i を0.5とおいて，条件付き確率法を適用してみよう．するとランダム真偽割当は

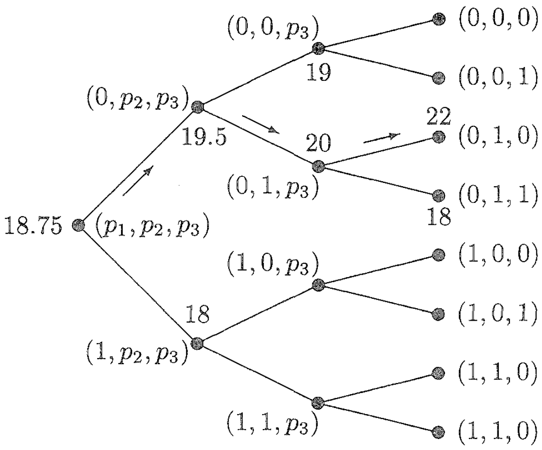

図 1: 条件付き確率法の説明図

$x^p = (0.5, 0.5, 0.5)$ となり，$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ の満たされる確率はそれぞれ，$0.5, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75, 0.875$ となり，期待値は $F(x^p) = 18.75$ となる．値が少なくとも $F(x^p)$ であるような真偽割当 $x^q \in \{0,1\}^n$ は $F(x^p)$ が各 p_i の線形関数であることから，条件付き確率法で以下のようにして求められる (図 1)．p_1 以外の p_i を固定し，p_1 を $p_1 = 0$ とおいてみる．するとランダム真偽割当 $x_0^p = (0, 0.5, 0.5)$ で $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ の満たされる確率はそれぞれ，$0, 0.5, 0.5, 1, 0.75, 1$ となり，期待値は 19.5 になる．同様に，$p_1 = 1$ とおくとランダム真偽割当 $x_1^p = (1, 0.5, 0.5)$ で $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ の満たされる確率はそれぞれ，$1, 0.5, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75$ となり，期待値は 18 になる．したがって，期待値が大きくなる方に x_1 の値を固定し，ランダム真偽割当 $x_0^p = (0, 0.5, 0.5)$ を求める．次に，$x_1 = 0$, $x_3 = p_3 = 0.5$ を固定しながら，$p_2 = 0$ とおくと期待値は 19 となり，$p_2 = 1$ とおくと期待値は 20 となるので，$x_2 = 1$ と固定し，ランダム真偽割当 $x_{01}^p = (0, 1, 0.5)$ を求める．最後に，$x_1 = 0$, $x_2 = 1$ を固定しながら，$p_3 = 0$ とおくと期待値は 22 となり，$p_3 = 1$ とおくと期待値は 18 となるので，$x_3 = 0$ と固定し，真偽割当 $x_{010}^p = (0, 1, 0)$ を求める．

このように条件付き確率法に基づいて，常に前の期待値以上の期待値をもつように，各変数に 0,1 を割り当てていくことができる．したがって，ランダム真偽割当の期待値の評価が重要になる．実際，Johnson の 0.5-近似アルゴリズムは上述のことを行っている．各変数 x_i が真になる確率 p_i を 0.5 としているので，k 個のリテラルからなる論理和 C_k の満たされる確率は $1 - 0.5^k$ となり，ランダム真偽割当 x^p の期待値 $F(x^p) = \sum_{k \geq 1} (1 - 0.5^k) W_k$ は $F(x^p) \geq \sum_{k \geq 1} (1 - 0.5^k) W_k^* \geq 0.5 F(x^*)$ をみたす．ただし，W_k は k 個のリテラルからなる論理和全体 $\mathcal{C}_k$ の総重みであり，W_k^* はそのなかで最適解で満たされる論理和の総重みである ($F(x^*) = \sum_{k \geq 1} W_k^*$)．Johnson のアルゴリズムはリテラルを多く含む論理和に対して良い近似であることに注意されたい．実際，1 個のリテラルからなる論理和が存在しなければ 0.75-近似アルゴリズムになるし，論理和がすべて 3 個以上のリテラルからなるときには 0.875-近似アルゴリズムになる．Johnson が 0.5-近似アルゴリズムを提案して以来，20 年ほど近似率の改善は成功しなかったが，Yannakakis [23] がネットワークの手法を取り入れ改良し 0.75-近似アルゴリズムを提案すると Goemans-Williamson [10] も線形計画法に基づく方法で 0.75-近似アルゴリズムを提案した．これらについては原論文あるいはその解説 [5] を参照されたい．

MAX SAT		MAX kSAT	
0.5		Johnson74 [16]	
0.75		Y92 [23], GW94 [10]	
0.7584	GW95 [11]	0.878 (2)	GW95 [11]
0.765	AOH96 [6]	0.931 (2)	FG95 [8]
0.770	A97 [3]	0.801 (3)	TSSW [22]
0.797 ‡	Z99 [25]	0.875 (3)	KZ97 [18]
0.8331 ‡	AW00 [7]	0.8721† (4)	HZ99 [12]

図 2: MAX SAT に対する近似率．† は [12] での数値実験で示された近似率．‡ は [25] で予想された近似率に基づくもの．() 内の数字は MAX kSAT の k.

3. SDP に基づく緩和法

図 2 は MAX SAT および MAX kSAT に対する近似アルゴリズムの性能比較である．0.75 を超える近似率を実現したものはいずれも SDP 緩和に基づいている．特に，MAX kSAT については純粋に SDP 緩和に基づいているので以下では MAX kSAT を主に取り扱う．MAX SAT の結果は MAX kSAT の結果と従来法を組み合わせたものが多い．なお，Håstad [13] により MAX 3SAT に対して (したがって MAX SAT に対しても) $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ でない限り 0.875 を超える近似率を達成する近似アルゴリズムが存在しないことが示されているので，Karloff-Zwick の結果 [18] はタイトである．

以下，MAX 2SAT に対する Goemans-Williamson [11], Feige-Goemans [8], Zwick [24] による SDP 緩和法および MAX kSAT に対する Karloff-Zwick [18], Halperin-Zwick [12] による SDP 緩和法について説明する．いずれも

(A) 問題の SDP 緩和による定式化を求める．

(B) SDP 緩和問題を解き最適解のベクトルを多項式時間で求める．

(C) ランダムベクトルを用いて各ベクトルを 0,1 に丸めて変数へのランダム真偽割当を求める (乱数使用ラウンディングと呼ばれる)．

(D) ランダム真偽割当の期待値以上の値をもつ真偽割当を求める (デランダミゼーションと呼ばれる)．

から成り立っている．以下では，(A) と (C) に注目する (実際最近の SDP 緩和に基づく近似アルゴリズムはこの部分の研究が主になっている)．(B) は前回までに取りあげられている．また (D) は文献 [19] を参照されたい．簡単のため以下の表記を用いる．$x_{n+i} = \bar{x}_i$ ($x_i = \bar{x}_{n+i}$, $x_i + x_{n+i} = 1$) とおく．論理和 $x_i \vee x_j$ を C_{ij} と表し，C_{ij} の重みを w_{ij} と書く．1つのリテラルからなる論理和 x_i も $x_0 \equiv 0$ を用いて便宜的に 2 つのリテラルからなる論理和 $x_0 \vee x_i$ と書けることになる．リテラルへの真偽割当 $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, ..., x_{2n}) \in \{0,1\}^{2n+1}$ に対して論理和 $C_{ij} = x_i \vee x_j$ の値 $z_{ij}(\boldsymbol{x})$ および $\boldsymbol{x}$ の値 $F(\boldsymbol{x})$ は (1), (2), より $z_{ij}(\boldsymbol{x}) = 1 - (1-x_i)(1-x_j)$, $F(\boldsymbol{x}) = \sum_{C_{ij} \in \mathcal{C}} w_{ij} z_{ij}(\boldsymbol{x})$ と書ける．

3.1 Goemans-Williamson の方法

Goemans-Williamson の MAX 2SAT に対するアルゴリズム [11] は最初に

$$y_0 = -1, \qquad y_0 y_i = 1 - 2x_i$$

とおいて，(0,1)-割当 $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, ..., x_{2n}) \in \{0,1\}^{2n+1}$ から $(-1,1)$-割当 $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, ..., y_{2n}) \in \{-1,1\}^{2n+1}$ に一対一対応させておく ($x_{n+i} = 1 - x_i$ より $y_{n+i} = -y_i$)．したがって，x_i は $\frac{1-y_0y_i}{2}$ となり ($x_i = 1$ と $y_i = 1$, $x_i = 0$ と $y_i = -1$ がそれぞれ対応し)，論理和 $C_{ij} = x_i \vee x_j$ の値は $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, ..., y_{2n})$ の関数として

$$\begin{aligned} z_{ij}(\boldsymbol{y}) &= 1 - \frac{1+y_0y_i}{2}\frac{1+y_0y_j}{2} \\ &= \frac{3 - y_0y_i - y_0y_j - y_iy_j}{4} \end{aligned}$$

と書ける．さらに，$\boldsymbol{y}$ の値は $F(\boldsymbol{y}) = \sum_{C_{i,j} \in \mathcal{C}} w_{ij} z_{ij}(\boldsymbol{y})$ となり，MAX 2SAT は $F(\boldsymbol{y}) = \sum_{C_{i,j} \in \mathcal{C}} w_{ij} z_{ij}(\boldsymbol{y})$ を最大にするような $(-1,1)$-割当 $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, ..., y_{2n})$ を求める問題となる ($y_0 = -1$, $y_{n+i} = -y_i$)．

半正定値計画問題に緩和するため，y_i に対応してノルム 1 でさらに $i \neq 0$ のときは $\boldsymbol{v}_{n+i} = -\boldsymbol{v}_i$ を満たす $(2n+1)$-次元のベクトル $\boldsymbol{v}_i \in S^{2n}$ を導入する ($i = 0, 1, ..., 2n$)．こうして，各 $y_{i_1}y_{i_2}$ をベクトルの内積 $\boldsymbol{v}_{i_1}\boldsymbol{v}_{i_2}$ に置き換え，$y_{i_1i_2} = \boldsymbol{v}_{i_1}\boldsymbol{v}_{i_2}$ とする ($Y = (y_{i_1i_2})$ は半正定値行列になる)．このように，Goemans-Williamson のアルゴリズムは絶対値 1 の変数 y_i を R^{2n+1} における単位球 S^{2n} 上のベクトル $\boldsymbol{v}_i$ で緩和して $2n+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_{2n}$ を用いるアルゴリズムである ($\boldsymbol{v}_0$ は $x_0 = 0$ を表現する参照ベクトル)．したがって，MAX 2SAT に対するベクトル計画緩和は，

$$\begin{array}{lll} \text{(GW)} & \max \sum_{C_{ij} \in \mathcal{C}} w_{ij} z_{ij} & \\ & \text{s.t. } z_{ij} = \frac{3 - \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j}{4} & (C_{ij} \in \mathcal{C}) \\ & \quad \boldsymbol{v}_i \in S^{2n} & (0 \le i \le 2n) \\ & \quad \boldsymbol{v}_{n+i}\boldsymbol{v}_i = -1 & (1 \le i \le n) \end{array}$$

となる．ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ を $\boldsymbol{v}_0 = -1$, $\boldsymbol{v}_i \in \{-1, 1\}$ とすれば MAX 2SAT と等価であることが確認できる．ベクトル計画問題と半正定値計画問題が等価であることは前回までの解説で紹介されているので，ここでは用語を互いに区別せずに用いる．

Goemans-Williamson のアルゴリズムはまずこの問題 (GW) を多項式時間で解き最適解のベクトル $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_{2n}$ を求める．この解から $(-1,1)$-割当 $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, ..., y_{2n})$ を求めることをラウンディングという．Goemans-Williamson のラウンディングは，原点を通るランダムな超平面で空間を 2 つの領域に分割し，$\boldsymbol{v}_i$ が $\boldsymbol{v}_0$ と同じ領域に入るとき $y_i = -1$ ($x_i = 0$) とし，反対の領域に入るとき $y_i = 1$ ($x_i = 1$) とするものである．

このランダム真偽割当により論理和 $C_{ij} = x_i \vee x_j$ の満たされる確率 p_{ij} は以下のように計算できる．ベクトル $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$ で決定される 3 次元の単位球面 S^2 に射影して考える．原点を通り $\boldsymbol{v}_0$ ($\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$) に直交する平面を h_0 (h_i, h_j) とする．h_0 を境界とする半空間で，$\boldsymbol{v}_0$ を 3 次元の単位球面 S^2 の点と見なしたとき，$\boldsymbol{v}_0$ を含む方 ($\boldsymbol{v}_0$ を含まない方) を h_0^+ (h_0^-) とする．同様に，h_i^+, h_i^-, h_j^+, h_j^- を定める．そして，単位球面 S^2 上の点 p を，符号付きベクトルで表現する．たとえば点 $p = (+,+,-)$ のときは，$p \in h_0^+ \cap h_i^+ \cap h_j^-$ を意味する．すると原点を通るランダムな超平面は，それ

に直交するランダムな単位ベクトル$\boldsymbol{r}$に対応し，$\boldsymbol{r}$が$(-,+,+),(-,+,-),(-,-,+),(+,-,-),(+,-,+),(+,+,-)$のときは$z_{ij}=\frac{3-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j}{4}$は1となる．したがって，全球面の面積$(4\pi)$に対する上記のような領域の面積が論理和$C_{ij}=x_i\vee x_j$の満たされる確率$p_{ij}$になる．これは$\frac{\theta_{0i}+\theta_{0j}+\theta_{ij}}{2\pi}$に等しい$(\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_i=\cos\theta_{0i}$, $\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_j=\cos\theta_{0j}$, $\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j=\cos\theta_{ij})$．論理和$C_{ij}=x_i\vee x_j$が1個のリテラル$x_i$からなるときは，$x_j=x_0$，$z_{0i}=\frac{3-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_i}{4}=\frac{1-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_i}{2}$となり，単位円周上で$(-,+),(+,-)$となる部分の割合$\frac{\theta_{0i}}{\pi}$が論理和$C_{0i}=x_0\vee x_i$の満たされる確率$p_{0i}$になる．1個のリテラルからなる論理和$C_{0i}=x_0\vee x_i$の満たされる確率$p_{0i}$と最適解における値$z_{0i}=\frac{1-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_i}{2}$の比$\frac{p_{0i}}{z_{0i}}$は少なくとも

$$\alpha_1\equiv\min_{0\le\theta_{0i}\le\pi}\frac{2\theta_{0i}}{\pi(1-\cos\theta_{0i})}$$

である．最小値を実現するθ_{0i}の値$\theta_{0i}^{(1)}$は$\frac{\theta}{1-\cos\theta}$の$\theta$に関する微分が$\frac{1-\cos\theta-\theta\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}$であることから唯一に$\theta_{0i}^{(1)}=2.331122$と定まり，$\alpha_1=0.878567$となる．一方，2個のリテラルからなる論理和$C_{ij}=x_i\vee x_j$の満たされる確率$p_{ij}$と最適解における値$z_{ij}=\frac{3-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j}{4}$の比$\frac{p_{ij}}{z_{ij}}$は少なくとも

$$\alpha_2\equiv\min_{0\le\theta_{0i},\theta_{0j},\theta_{ij}\le\pi}\frac{2(\theta_{0i}+\theta_{0j}+\theta_{ij})}{\pi(3-\cos\theta_{0i}-\cos\theta_{0j}-\cos\theta_{ij})}$$

となる．右辺のminの中身の部分は$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_j,\theta_{0i}=\theta_{0i}^{(1)}$ $(\theta_{ij}=0,\theta_{0i}=\theta_{0j}=\theta_{0i}^{(1)})$のときは$\alpha_1$に等しくなるので，$\alpha_2\le\alpha_1$であり，一方，$\alpha_2$を実現する$\theta_{0i}$, θ_{0j} θ_{ij}をそれぞれ$\theta_{0i}^{(2)},\theta_{0j}^{(2)}\ \theta_{ij}^{(2)}$とおくと，$\alpha_1$の定義より，各$\theta=\theta_{0i}^{(2)},\theta_{0j}^{(2)},\theta_{ij}^{(2)}$に対して，$2\theta\ge\alpha_1\pi(1-\cos\theta)$が得られ，$\alpha_2\ge\alpha_1$である．すなわち，$\alpha_2=\alpha_1$である．

このことから，論理和全体の期待値の最適解の値に対する比は0.87856以上となり，期待値以上の割当は必ず存在し，そのようなものを見つける(従来のランダム割当に対する確率的手法に対応する)方法[19]も存在するので，Goemans-Williamsonのアルゴリズムは0.87856-近似アルゴリズムである．

3.2 Feige-Goemansの回転

Feige-Goemans [8]は，Goemans-Williamsonのラウンディングで，最小の性能0.87856を実現するベクトルの組に注目し，そのような状況を避けるようにできれば，近似率の改善につながるはずと確信し，以下の手法を考案した．彼らは，ランダムな超平面でベクトルを分割する前に，各$\boldsymbol{v}_i$ $(i\ne0)$を$\boldsymbol{v}_0$と$\boldsymbol{v}_i$で定まる平面上で，そのなす角θ_{0i}に基づいて回転し，得られた$\boldsymbol{v}_i'$ $(i\ne0,\ \boldsymbol{v}_0'=\boldsymbol{v}_0)$に対してGoemans-Williamsonのラウンディングを適用している．より具体的には，2個のリテラルからなる論理和がなければ，原理的には，1個のリテラルからなる論理和$C_{0i}=x_0\vee x_i$の満たされる確率$\frac{\theta_{0i}}{\pi}$の最適解に対する比が1になるように，$\boldsymbol{v}_0$と$\boldsymbol{v}_i$で定まる平面上で，回転後のベクトルの角度θ_{0i}'が$\theta_{0i}'=\frac{\pi}{2}(1-\cos\theta_{0i})$を満たすようにすればよい．しかしながら，2個のリテラルからなる論理和がある時にはこの回転でそのような論理和$C_{ij}=x_i\vee x_j$の満たされる確率の最適解に対する比$\frac{p_{ij}}{z_{ij}}$が減少してしまうこともある．そこで回転角を定める関数$f:[0,\pi]\to[0,\pi]$をパラメータ$0\le\lambda\le1$を用いて

$$f(\theta)=(1-\lambda)\theta+\lambda\frac{\pi}{2}(1-\cos\theta)$$

としている．こうして$\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_i$がなす平面上で$\boldsymbol{v}_i$を回転して得られる$\boldsymbol{v}_i'$は，$\boldsymbol{v}_0$と$\theta_{0i}'=f(\theta_{0i})$の角度をなすようにした．直観的には，なす角が90度から離れるようにして，ランダム性を排除しているといえる(どの2つのベクトルも直交するときランダムということになるので)．また，fは$f(\pi-\theta)=\pi-f(\theta)$を満たしていることに注意されたい．この関数による$\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j$のなす角$\theta_{ij}$と$\boldsymbol{v}_i',\boldsymbol{v}_j'$のなす角$\theta_{ij}'$は，$\boldsymbol{v}_0$と$\boldsymbol{v}_i$がなす平面と，$\boldsymbol{v}_0$と$\boldsymbol{v}_j$がなす平面の角度を$\alpha$とおくと，一般性を失うことなく，3次元正規直交$xyz$座標形で$\boldsymbol{v}_0=(0,0,1)$, $\boldsymbol{v}_i=(\sin\theta_{0i},0,\cos\theta_{0i})$, $\boldsymbol{v}_j=(\cos\alpha\sin\theta_{0j},\sin\alpha\sin\theta_{0j},\cos\theta_{0j})$と仮定できるので，

$$\cos\theta_{ij}'=\cos\theta_{0i}'\cos\theta_{0j}'+\cos\alpha\sin\theta_{0i}'\sin\theta_{0j}'$$
$$\cos\theta_{ij}=\cos\theta_{0i}\cos\theta_{0j}+\cos\alpha\sin\theta_{0i}\sin\theta_{0j}$$

をみたすことがいえる．彼らは$\lambda=0.806765$としてGoemans-Williamsonのラウンディングをすると，得られる真偽割当は2個のリテラルからなる論理和$x_i\vee x_j$において満たされる確率p_{ij}と最適解における値の比$\frac{p_{ij}}{z_{ij}}=\frac{2(\theta_{0i}'+\theta_{0j}'+\theta_{ij}')}{\pi(3-\cos\theta_{0i}-\cos\theta_{0j}-\cos\theta_{ij})}$は0.93109 (1個のリテラルからなる論理和に対してこの比は0.976)以上になることを数値的に示し，0.93109-近似アルゴリズムが実現できることを示した．

3.3 Zwickの回転

Zwick [24]は，$f(\theta)=0$ $(\theta<\frac{\pi}{2})$, $\frac{\pi}{2}$ $(\theta=\frac{\pi}{2})$, π $(\theta>\frac{\pi}{2})$を用いてベクトルを回転しその後Goemans-Williamsonのラウンディングをすると，充足可能なMAX 2SATのインスタンスに対してはどの論理和も満たされることを示し，それに基づいて，回転関数を

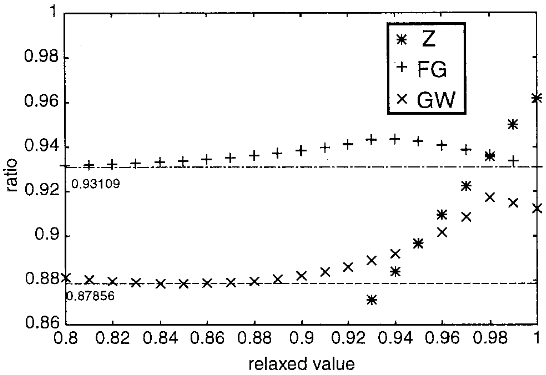

図 3: z_{ij} に対する各関数の性能

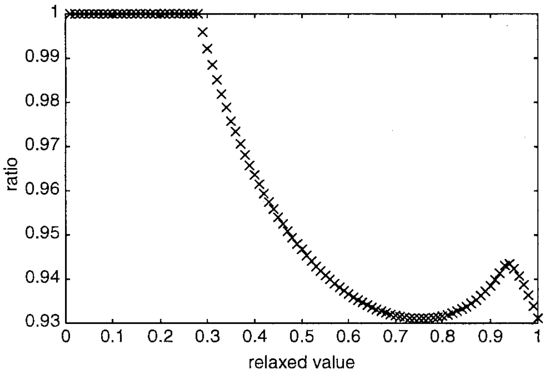

図 4: z_{ij} に対する Feige-Goemans の関数の性能

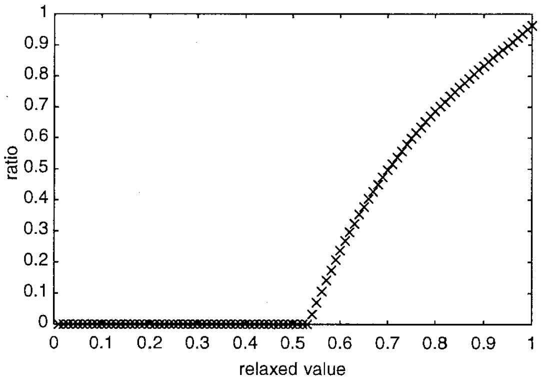

図 5: z_{ij} に対する Zwick の関数の性能

$$f_{\epsilon^{1/3}}(\theta) = \begin{cases} 0 & 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} - \epsilon^{1/3}, \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\epsilon^{1/3}}(\theta - \frac{\pi}{2}) & \frac{\pi}{2} - \epsilon^{1/3} \le \theta \le \frac{\pi}{2} + \epsilon^{1/3}, \\ \pi & \frac{\pi}{2} + \epsilon^{1/3} < \theta \le \pi \end{cases}$$

として定義した．なお，$W = \sum_{C_{ij} \in \mathcal{C}} w_{ij}$, $Z = \sum_{C_{ij} \in \mathcal{C}} w_{ij} z_{ij}$, $\epsilon = 1 - Z/W$ で，ϵ は小さいものとしている．この関数 $f_{\epsilon^{1/3}}(\theta)$ はほぼ充足可能な MAX 2SAT のインスタンス，すなわち，$\epsilon = 1 - Z/W$ の十分小さなインスタンスに対して良い性能を示す．

3.4 実験結果

図3はこれまで説明してきた Goemans-Williamson, Feige-Goemans, Zwick の SDP 緩和問題の最適解の各

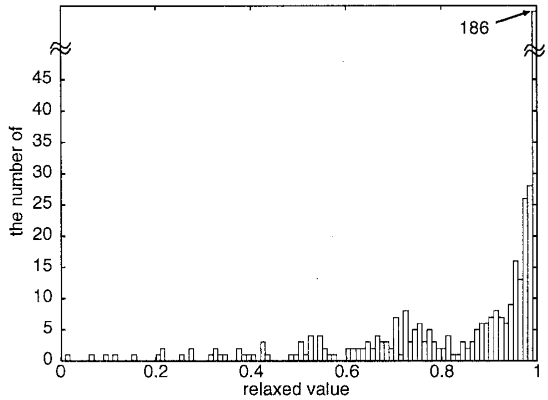

図 6: 450 個の論理和の緩和値 z_{ij} の頻度

論理和 C_{ij} の値 z_{ij} と回転した後の乱数使用ラウンディングの論理和 C_{ij} の満たされる確率 p_{ij} の比 $\frac{p_{ij}}{z_{ij}}$ を表したものである．図4と5はさらに Feige-Goemans と Zwick の詳細である．これからもわかるように，Zwick の方法では精度保証は得られない．

岩間-浅野 [15] はこれらのアルゴリズムの実際的性能評価をするための計算機実験を行なっている．詳細はそちらを参照されたいが，ほぼすべての入力に対して同様の傾向が観察された．より具体的例を挙げよう．50 変数，450 個の論理和からなる入力で $\epsilon = 0.12348$ のとき各論理和 C_{ij} の最適解における値 z_{ij} を $0 \le z_{ij} \le 0.01$, $0.01 < z_{ij} \le 0.02$, $\cdots$, $0.99 < z_{ij} \le 1$ となるように 0.01 きざみで分類して，その個数をヒストグラムとして表したグラフが図6である．最も多かったのは $0.99 < z_{ij} \le 1$ を満たす論理和であり，450 個の論理和中 186 個の論理和が存在した．また，z_{ij} の値が 1 に近い $z_{ij} > 1 - \epsilon = 0.87652$ となる論理和は全論理和の 72 % 程度であった．

このように，SDP 緩和によって得られた各 z_{ij} の値の分布を図6より観察すると，大半の z_{ij} は1に近い値をとっている．図5より Zwick の関数は z_{ij} が大きくて1に近いときに良い性能を示すのに対して，Feige-Goemans の関数は，図4より，z_{ij} が1に近いときは，最悪に近いときであり，z_{ij} が小さいときに (すなわち無視しても全体の値に与える影響は小さいものに対して) 良い性能を示すことから，実験した全てのインスタンスについて，近似解，期待値の双方に対して最も性能の良かったアルゴリズムは，Zwick のアルゴリズムであった．Zwick によるアルゴリズムは，Feige-Goemans のアルゴリズムに比べて，ϵ の値が小さいインスタンスに優れているという理論的性能を持っている．しかし，実験の結果では，一般のインスタンスに対

しても良い性能を示すことが観察できた.

SDP 緩和に基づく近似アルゴリズムの性能改善には，図6のような最適解の z_{ij} の分布を観察して，乱数使用ラウンディングの期待値ができるだけ大きくなるように最適緩和解のベクトルの回転を定めるというヒューリスティックスが有効であろう.

3.5 MAX kSAT アルゴリズム

MAX kSAT に対する SDP 緩和は，MAX 2SAT に対する SDP 緩和に比べて複雑になっている．Karloff-Zwick [18] は3個以下のリテラルからなる論理和に必要ならば $x_0 \equiv 0$ を付加して $C_{ijk} = x_i \vee x_j \vee x_k$ とし，

$$\mathrm{relax}(C_{ijk}) = \min\left\{\frac{4-(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_{i_1})(\boldsymbol{v}_{i_2}+\boldsymbol{v}_{i_3})}{4}\right\}$$

(min は (i,j,k) の順列 (i_1,i_2,i_3) すべてを対象とする) を用いて，MAX 3SAT に対する以下の SDP 緩和

$$\begin{array}{llr} \text{(KZ)} & \max \displaystyle\sum_{C_{ijk}\in\mathcal{C},} w(C_{ijk}) z_{ijk} & \\ & \text{s.t.}\ \min\{\mathrm{relax}(C_{ijk}),1\} \geq z_{ijk} & (C_{ijk}\in\mathcal{C}) \\ & \boldsymbol{v}_i \in S^{2n} & (0\leq i\leq 2n) \\ & \boldsymbol{v}_{n+i}\boldsymbol{v}_i = -1 & (1\leq i\leq n) \end{array}$$

を提案し，それに基づいて7/8-近似アルゴリズムを得ている [18]．なお，$i \neq 0, j \neq 0, k = 0$ ならば，$C_{ijk} = C_{ij}$ で $\mathrm{relax}(C_{ijk}) = \frac{3-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j}{4}$ であり，$i \neq 0, j = k = 0$ ならば，$C_{ijk} = C_{0i}$ で $\mathrm{relax}(C_{ijk}) = \frac{1-\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_i}{2}$ であることに注意されたい．この定式化は単純であるが，性能解析は極めて複雑である．ランダム超平面を用いるラウンディングで，論理和 C_{ijk} が満たされる確率は1個または2個のリテラルからなるときはこれまでと同じであるが，3個のリテラルからなる論理和 $C_{ijk} = x_i \vee x_j \vee x_k$ が満たされる確率は $1 - \mathrm{prob}(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_k)$ となり，z_{ijk} に対する比は

$$\alpha_3 \equiv \min_{\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_k\in S^3} \frac{1-\mathrm{prob}(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_k)}{z_{ijk}}$$

以上となる．ここで，$\mathrm{prob}(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_k)$ はランダム超平面で領域を2分割したとき $\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_k$ が同一の領域に存在する確率である．Karloff-Zwick は球面幾何学および数値実験に基づいてこの比 α_3 は7/8になることを示している [18].

Halperin-Zwick は MAX 4SAT に対して SDP 緩和の定式化とその解のラウンディングを提案しているが，どちらも極めて複雑なものになっている [12]．これまでと同じランダム超平面に基づくラウンディングで，4個のリテラルからなる論理和 $C_{ijk\ell}$ の満たされる確率と SDP 緩和の定式化の最適解における $C_{ijk\ell}$ の値の比は 0.845173 以上となることを示している．さらに，ランダム超平面に基づくラウンディングを適用する前にベクトルを回転することで，上記の比が 0.8721 以上になることを数値実験で示して，MAX 4SAT に対して 0.8721-近似アルゴリズムを与えている.

4. おわりに

MAX 2SAT と MAX kSAT を通して，SDP を用いた近似アルゴリズムの研究を概説した．昨年，MAX SAT に対して，Zwick [25] はベクトルの**外向き回転**を提案して，純粋に SDP のみに基づく MAX SAT の 0.7977-近似アルゴリズムを与えている．解析的な証明は与えられていないが，数値実験的にはそれが正当化されている．この外向き回転はこれまで眺めてきた MAX 2SAT で提案された回転とは異なり，ある意味で直交 (ランダム) に近くなるようにベクトルを回転するものである．Asano-Williamson [7] は MAX SAT に対して Goemans-Williamson の LP 緩和 [10] で得られる解の別の使用法を提案し，それを Zwick の 0.7977-近似アルゴリズム [25] と組み合わせて 0.833-近似アルゴリズムを得ている.

重複になるが，実際の応用と関連して SDP 緩和に基づく近似アルゴリズムを設計するには，性能改善のため，SDP 緩和の定式化とともに，乱数使用ラウンディングの工夫が重要で，図6のような最適解の z_{ij} の分布を積極的に利用して，乱数使用ラウンディングの期待値ができるだけ大きくなるように最適緩和解のベクトルの回転を定めるというヒューリスティックスも実用的には有効であろう.

参考文献

[1] Alon N. and Kahale K.: "Approximating the independence number via the θ function", *Math. Programming*, 80, pp.253–264, 1998.

[2] Arora S. "The approximability of NP-hard problems", *Proc. 30th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp.337-348, 1998.

[3] Asano T.: "Approximation algorithms for MAX SAT: Yannakakis vs. Goemans-Williamson", *Proc. 5th Israel Symposium on Theory of Computing and Systems*, pp.24–37, 1997.

[4] Asano T., Halldórsson M. M., Iwama K. and Mat-

suda T.: "Approximation algorithms for the maximum power consumption problem on combinatorial circuits", *Proc. 11th International Symposium on Algorithms and Computation,* to appear.

[5] 浅野孝夫，今井浩: "計算とアルゴリズム"，オーム社，2000.

[6] Asano T., Ono T. and Hirata T.: "Approximation algorithms for the maximum satisfiability problem", *Nordic J. Computing*, 3, pp.388–404, 1996.

[7] Asano T. and Williamson D.P.: "Improved approximation algorithms for MAX SAT", *Proc. 11th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp.96-105, 2000.

[8] Feige U. and Goemans M.X.: "Approximating the value of two prover proof systems, with applications to MAX 2SAT and MAX DICUT", *Proc. 3rd Israel Symposium on Theory of Computing and Systems*, pp.182–189, 1995.

[9] Garey M.R. and Johnson D.S.: *"Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness"*, Freeman, 1979.

[10] Goemans M.X. and Williamson D.P.: "New 3/4-approximation algorithms for the maximum satisfiability problem", *SIAM Journal of Disc. Math.*, 7, pp. 656–666, 1994.

[11] Goemans M.X. and Williamson D.P.: "Improved approximation algorithms for the maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming", *Journal of ACM* 42, pp. 1115–1145, 1995.

[12] Halperin E. and Zwick U.: "Approximation algorithms for MAX 4SAT and rounding procedures for semidefinite programs", *Proc. 7th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, Lecture Notes in Computer Science 1610*, Springer, pp. 202–217, 1999.

[13] Håstad J.: "Some optimal inapproximability results", *Proc. 28th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 1–10, 1997.

[14] Halldórsson M.M.: "Approximations of weighted independent set and hereditary subset problems", *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 4, pp.1–16, 2000.

[15] 岩間健一郎，浅野孝夫: "MAX 2SAT に対する近似アルゴリズムの実際的性能評価"，情報処理学会研究報告，アルゴリズム AL-72-7, pp.49–54, 2000.

[16] Johnson D.S.: "Approximation algorithms for combinatorial problems", *Journal of Comput. and Sys. Sci.*, 9, pp. 256–278, 1974.

[17] Karger D., Motwani R. and Sudan M.: "Approximate graph coloring by semi-definite programming", *Journal of ACM*, 45, pp.246–265, 1998.

[18] Karloff H. and Zwick U.: "A 7/8-approximation algorithm for MAX 3SAT?", *Proc. 38th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 406–415, 1997.

[19] Mahajan S. and Ramesh H.: "Derandomizing semidefinite programming based approximation algorithms", *Proc. 36th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp.162–169, 1995,

[20] 松井知己: "半正定値計画を用いた最大カット問題の.878近似解法"，オペレーションズ・リサーチ，45, pp.140–145, 2000.

[21] Skutella M.: "Semidefinte relaxations for parallel machine scheduling", *Proc. 39th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 472–481, 1998.

[22] Trevisan L., Sorkin G.B., Sudan M. and Williamson D.P.: "Gadgets, approximation, and linear programming", *Proc. 37th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 617–626, 1996.

[23] Yannakakis M.: "On the approximation of maximum satisfiability", *J. Algorithms*, 17, pp. 475–502, 1994.

[24] Zwick U.: "Finding almost-satisfying assignments", *Proc. 29th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp.551-560, 1998.

[25] Zwick U.: "Outward rotations: a tool for rounding solutions of semidefinite programming relaxations, with applications to MAX CUT and other problems", *Proc. 31st ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 679–687, 1999.